I－16　二次元弾性体境界に荷重を有する應力函數の解法

信州大學工學部　正員　夏目正太郎

二次元弾性体の境界に沿って荷重分布が與えられた時 内部應力の計算には適當な應力函數が選ばれて、それに含まれている未定常數を境界條件等と考えあわせて決定し、應力ならびに変位の式を示している。Loveは $\nabla^4\chi=0$ なる微分方程式を χ ならびに $\frac{\partial\chi}{\partial n}$ の境界値 φ, ψ を満足する様に解いてをられる。こゝではその解法にPotential論の概念を導入して、與えられた境界値 φ, ψ に適合するAiryの應力函數 χ を求めようと試みた。

今求めんとするAiryの應力函數を次の如きものとす

$$\chi=\chi_1+\Phi+\Psi,\quad \nabla^4\chi=0,\quad \nabla^4\chi_1=0,\quad \nabla^2\Phi=0,\quad \nabla^2\Psi=0 \qquad (1)$$

境界値は

$$\left.\begin{aligned}&(\chi)_c=(\chi_1)_c+(\Phi)_c+(\Psi)_c \qquad \varphi=(\chi)_c=(\Phi)_c,\ (\chi_1)_c=(\Psi)_c=0,\\&\left(\frac{\partial\chi}{\partial n}\right)_c=\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial n}\right)_c+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_c+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_c,\ \psi=\left(\frac{\partial\chi}{\partial n}\right)_c=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_c,\ \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial n}\right)_c=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_c=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

なお、$\nabla^4\chi_1=0$ は $\nabla^2\nabla^2\chi_1=0$ で $\nabla^2\chi_1=F$ とおくことにより $\nabla^2F=0$ となり F は調和函數である。更に $\nabla^2\chi_1=\widehat{xx}_1+\widehat{yy}_1$ の如く書かれる。しかるに平面歪の問題では $e=0$ とすれば $\widehat{xx}_1+\widehat{yy}_1=2(\lambda+\mu)\Delta_1$ であり $\Delta_1=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}$ であるから境界における F の値は荷重條件によって決まる。従って境界値 $(F)_c$ なる調和函數が F と言うことになり $\nabla^2\chi_1=F$ の微分方程式が解かれる。このPoisson微分方程式の特解はGreen函數 $G(x,y,\xi,\eta)$ を以て

$$\chi_1=-\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x,y,\xi,\eta)\cdot F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (3)$$

によって示される。

境界値を満足し領域内で調和である様な函數を求めることは、Potential論におけるDirichletの問題として解かれるのである。それを解決するために二重層の對數ポテンシャルを考える。すなわち

$$U(x,y)=\int_c\mu(s)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}\,ds \quad ; \quad \rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \qquad (4)$$

この式に含まれる $\mu(s)$ は次の第2種Fredholm積分方程式から得られるものである。

$$\left.\begin{aligned}&\mu(t)=\varphi(t)-\int_c\mu(s)\,K(s,t)\,ds\\&K(s,t)=\frac{(y_0-\eta)\xi'-(x_0-\xi)\eta'}{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2},\qquad \varphi(t)\text{は境界値}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

今境界線が楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で表はされる弾性体に上の條件を適用してみる。單位荷重 P が一様に分布している時、P の x, y 方向の分力は $P_x=P\cos t$, $P_y=P\sin t$ であるから

$$\begin{aligned}\varphi=(\chi)_c&=-\int_0^t\left\{\frac{dx}{dt}\int_0^t P_y\,dt-\frac{dy}{dt}\int_0^t P_x\,dt\right\}dt+\alpha x+\beta y+\gamma\\&=\frac{1}{2}P(-a+b)\sin^2 t+Pa(\cos t-1)+a\alpha\cos t-b\beta\sin t+\gamma \qquad (6)\end{aligned}$$

$$\psi=\left(\frac{\partial\chi}{\partial n}\right)_c=-\frac{dy}{dt}\int_0^t P_y\,dt-\frac{dx}{dt}\int_0^t P_x\,dt-\alpha\frac{dy}{dt}+\beta\frac{dx}{dt}$$
$$=P_a\sin^2 t+P_b\cos t(\cos t-1)-b\alpha\cos t-a\beta\sin t \qquad (7)$$
となる。

(3)式にあるGreen函数　$G(x,y,\xi,\eta)$は、境界線上では0になりしかも領域内で調和である。

$$G(x,y,\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{\xi_0^2+\eta_0^2}\left\{\left(\xi-\frac{\xi_0^2+\eta_0^2}{x^2+y^2}x\right)^2+\left(\eta-\frac{\xi_0^2+\eta_0^2}{x^2+y^2}y\right)^2\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=\int_\ell \mu(t)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}\,dt \ ,\qquad \mu(s)=\frac{(F)_c}{\pi}-\int_\ell \mu(t)\,k(s,t)\,dt \\ (F)_c=2(\lambda+\mu)\cdot cP\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right) \ ,\quad k(s,t)=\frac{ab}{\pi(a^2-b^2)}\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(s+t)} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

また

$$\Phi(x,y)=\int_\ell \nu(t)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}\,dt \ ,\qquad \nu(s)=\frac{1}{\pi}(\Phi)_c-\int_\ell \nu(t)\,k(s,t)\,dt \ ;\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_c=0 \qquad (10)$$

$\Psi(x,y)$についてもΦと手順は同じであるが$(\Psi)_c=0$であるため$\omega(s)$を求めるには同次積分方程式の解を得ればよい。

$$\left.\begin{array}{l} \Psi(x,y)=\int_\ell \omega(t)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{\rho}\,dt \ ,\quad \omega(s)=\lambda\int \omega(t)\,k(s,t)\,dt \quad (\lambda\text{は固有値である}) \\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_c=\psi=P_a\sin^2 t+P_b\cos(\cos t-1)-b\alpha\cos t-a\beta\sin t. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

(9), (10), (11)に含まれる積分方程式についてはその解析値を望むことが出来ないが数値積分によって解くことが出来る。数値積分法としてGaussの方式を採用して、変域0からπまでを10に分割する。分点並びにその係数(R)は次の様になる。

$$\left.\begin{array}{lllll} t_1=2^\circ 20' 54''.28 & t_2=12^\circ 08' 39''.47 & t_3=28^\circ 51' 11''.30 & t_4=60^\circ 59' 39''.89 & t_5=76^\circ 36' 04''.71 \\ t_6=180^\circ-t_5 & t_7=180^\circ-t_4 & t_8=180^\circ-t_3 & t_9=180^\circ-t_2 & t_{10}=180^\circ-t_1 \\ R_1^{10}=R_{10}^{10}=0.033,3357 & R_2^{10}=R_9^{10}=0.074,7257 & R_3^{10}=R_8^{10}=0.109,5432 & R_4^{10}=R_7^{10}=0.134,6334 & \\ R_5^{10}=R_6^{10}=0.1477621 & & & & \end{array}\right\} \qquad (12)$$

問題の性質が仮定によりx, y両軸に對稱であるので積分方程式内のμ, ν, ω, $(F)_c$, $(\Phi)_c$は等しいものが4つづつ出来るために20の連立方程式を解く代りに5つに減らされる。そしてμ_i, ν_i, ω_iの係数は次の様になる

$$\frac{ab}{a^2-b^2}\cdot R_i\left\{\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(s_j+t_i)}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(s_j+\pi-t_i)}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(s_j+\pi+t_i)}+\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\cos(s_j+2\pi-t_i)}\right\} \qquad (13)$$

5つの連立方程式より任意の$\mu(s)$, $\nu(s)$が求まる。$\omega(s)$は同次積分方程式であるため$\omega=0$の他に$k(s,t)$によってきまる固有値(λ)が求められそれによって満足される$\omega_1:\omega_2:\omega_3:\omega_4:\omega_5$の比が得られる。更に法線微分に表はされる境界値$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_c=\psi$があるので$\Psi$は決定される。