I —9　三辺完全に自由，他の一辺のみ固定された矩形板の曲げについて

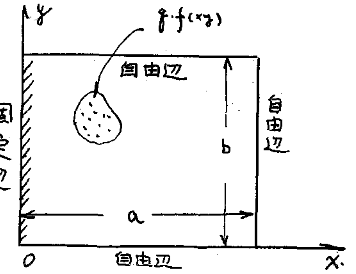
室蘭工業大学　正員　能町純雄

矩形平板の曲げにおいて，種々の境界条件が混合する Mixed problem については，一組の相対２辺が単純支持であって Levy の Ansatz が可能な場合は古くから解き尽されている。また四辺のタワミがすべて零である様な場合も井口鹿象博士の公式によって割合手軽るに解くことができる。しかし完全自由辺と固定辺が共存するような例については「三辺が固定され一辺のみが自由である」とき poisson 比 $\nu=0$ の特殊な場合が解かれているに過ぎない。同じ問題の ν にある値を与えて曲げを求めたものもあるが，これは網目反覆法によっている。著者は「三辺が完全に自由で他の一辺のみ固定された」矩形板，即ちカンテレバー平板ともいうべきものの曲げの厳密解を，有限なフーリエの二重変換を利用して誘導し，放端両端隅に等しい点荷重が作用したときの数値計算を行った。

1，基本微分方程式と境界条件

W を板のタワミ，N を板の曲げ剛さ（$=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$；$E$ 板の弾性係数，h 厚さ，ν ポアソン比），$q\cdot f(xy)$ を荷重を表わす函数（q = 定数）とすれば，タワミの微分方程式は力の釣合から

$$N\cdot\Delta^2 W = q\cdot f(xy) \quad (1)$$



境界条件式は

$x=0$ で　$W=0$ (2)，$\frac{\partial W}{\partial x}=0$ (3)，

$x=a$ で　$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0$ (4)，$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}=0$ (5)，

$y=0$ で　$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ (6)　$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}=0$ (7)

$y=b$ で　$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ (8)　$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}=0$ (9)

また，

$(a,0)$ で　$2(1-\nu)N\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0$ (10)　(a,b) で　$2(1-\nu)N\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0$ (11)

若し放端隅に P な荷重があれば

$(a,0)$ で　$2(1-\nu)N\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=P$ (10)′　(a,b) で　$2(1-\nu)N\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=P$ (11)′

となる。

2，基本微分式に関する Green 公式

上式(1)の左辺の微分式と，x 及び y で四度づつ偏微分可能な任意の函数 L とから

$$N\int_0^a\int_0^b (L\cdot\Delta^2 W - W\cdot\Delta^2 L)\,dx\,dy = R(W\cdot L) \qquad (12)$$

ただし

$$R(W\cdot L) = N\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right)L\right]_{x=0}^{x=a} dy - N\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=a} dy$$

$$+ N\int_0^b \left[\frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right)\right]_{x=0}^{x=a} dy - N\int_0^b \left[W\left(\frac{\partial^3 L}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 L}{\partial x\partial y^2}\right)\right]_{x=0}^{x=a} dy$$

$$+ N\int_0^a \left[\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right)L\right]_{y=0}^{y=b} dx - N\int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\frac{\partial L}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=b} dx$$

$$+ N\int_0^a \left[\frac{\partial W}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)\right]_{y=0}^{y=b} dx - N\int_0^a \left[W\left(\frac{\partial^3 L}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 L}{\partial x^2\partial y}\right)\right]_{y=0}^{y=b} dx$$

$$+ 2N(1-\nu)\left\{\left[\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}L\right]_0^a\right]_0^b - \left[\left[W\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\right]_0^a\right]_0^b\right\},$$

を作ることができる。

3. W の誘導

上式(12)中 $L = \sin\frac{m\pi}{a}x$, $\sin\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{n\pi}{b}y$ $m, n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$, を代入し境界条件 (2), (4), (7), (9) を適用する。そこで便宜上，次の演算記号

$$S_m[\ ] = \int_0^a [\ ]\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx, \qquad C_n[\ ] = \int_0^b [\ ]\cos\frac{n\pi}{b}y\,dy$$

を用いて求まる

$$\left.\begin{aligned}
S_m\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=b}\right] &= -\frac{a}{m\pi}\left\{(-1)^m\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ab} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ob}\right\} + \frac{a}{m\pi}C_m\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_{y=b}\right]\\
S_m\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0}\right] &= -\frac{a}{m\pi}\left\{(-1)^m\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ao} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{oo}\right\} + \frac{a}{m\pi}C_m\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_{y=0}\right]\\
C_n\left[(W)_{x=a}\right] &= \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\left\{(-1)^n\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ab} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ao}\right\} - \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 C_n\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=a}\right]\\
C_n\left[(W)_{x=0}\right] &= \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\left\{(-1)^n\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{ob} - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{oo}\right\} - \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 C_n\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=0}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

の関係を考慮して，*inversion theorem*

$$W = \frac{2}{ab}\sum_m \sin\frac{m\pi}{a}x\left\{\int_0^b S_m[W]\,dy + 2\sum_n \cos\frac{n\pi}{b}y\times S_m C_n[W]\right\} \qquad (14)$$

を計算すれば

$$\left.\begin{aligned}
W = {} & \frac{A_0}{12}(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) - \frac{A_0'\xi}{2} + \sum_n \frac{A_n}{4\alpha_n^2\pi^2}H_{\alpha_n}(\xi)\cos n\pi\eta + \sum_n \frac{A_n'}{4\alpha_n^2\pi^2}\{\\
& 2G_{\alpha_n}(1-\xi) + (1-\nu)H_{\alpha_n}(1-\xi)\}\cos n\pi\eta + \sum_m \frac{B_m}{4\beta_m^2\pi^2}\{(1-\nu)S_{\beta_m}^{(2)}(\eta) -\\
& (1-\nu)T_{\beta_m}^{(2)}(\eta)\}\sin m\pi\xi + \sum_m \frac{B_m'}{4\beta_m^2\pi^2}\{(1-\nu)S_{\beta_m}^{(1)}(\eta) - (1-\nu)T_{\beta_m}^{(1)}(\eta)\}
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\times \sin m\pi\xi \quad + \quad \frac{D}{24}\xi(1-6\eta+6\eta^2) \quad + \quad \frac{\nu D}{12}(\xi-\xi^3) \quad + \quad \frac{D'}{8}\xi(1-2\eta)$$

$$+ \quad \frac{8a^4}{N\pi^4}\sum_m \frac{R_m}{m^4}\sin m\pi\xi \quad + \quad \frac{8a^4}{N\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{R_{mn}}{(m^2+\alpha_n^2)^2}\sin m\pi\xi\cos n\pi\eta \; .$$

ただし

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \alpha_n = \frac{a}{b}n, \quad \beta_m = \frac{b}{a}m,$$

$$H\alpha_n(\xi) = \frac{\alpha_n\pi\{\xi\, sh\,\pi\alpha_n(2-\xi) - (2-\xi)\, sh\,\pi\alpha_n\xi\}}{ch\,2\pi\alpha_n - 1},$$

$$H\alpha_n(1-\xi) = \frac{\alpha_n\pi\{(1-\xi)\, sh\,\pi\alpha_n\xi - (1+\xi)\, sh\,\pi\alpha_n(1-\xi)\}}{ch\,2\pi\alpha_n - 1},$$

$$G\alpha_n(1-\xi) = \frac{ch\,\pi\alpha_n(1+\xi) - ch\,\pi\alpha_n(1-\xi)}{ch\,2\pi\alpha_n - 1},$$

$$R_m = \frac{2}{ab}\int_0^b S_m[f(xy)]\,dy, \qquad R_{mn} = \frac{4}{ab}S_m C_n[f(xy)] \; .$$

上式中 (A_0, A_n) 及び (A_0', A_n') は境界条件式 (3) 及び (5) から，B_m，B_m' は 条件式 (6)，(8) から，D，D' は 隅点条件式 (10)，(11) から 決定できる。そうすれば W は求めるタワミとなる。x 方向曲げモーメント，y 方向曲げモーメント M_x，M_y，及び捩りモーメント M_{xy} は

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -N\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -N\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -N(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

から計算できる。

4，未知数 $A_0, A_n, A_0', A_n', B_m, B_m'$ 及び D, D' の決定

未知数の計算を簡便にするため，タワミを中心線 $y = b/2$ に関して対称な部分と逆対称な部分に分けて別々に計算することとする。

i) タワミが $y = b/2$ に関して対称な場合

この場合は $n = 2, 4, 6 \cdots\cdots$，となり (15) 式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} W = \; & \frac{A_0}{12}(2\xi-3\xi^2+\xi^3) - \frac{A_0'\xi}{2} + \sum_n \frac{A_n}{4\alpha_n^2\pi^2}H\alpha_n(\xi)\cos n\pi\eta + \sum_n \frac{A_n'}{4\alpha_n^2\pi^2}\{ \\ & 2G\alpha_n(1-\xi) + (1-\nu)H\alpha_n(1-\xi)\}\cos n\pi\eta + \sum_m \frac{B_m}{4\beta_m^2\pi^2}\{(1-\nu)S_{\beta_m}^{(2)}(\eta) - \\ & (1-\nu)T_{\beta_m}^{(2)}(\eta)\}\sin m\pi\xi + \frac{D\xi}{24}(1-6\eta+6\eta^2) + \frac{\nu D}{12}(\xi-\xi^3) \\ & + \frac{8a^4}{N\pi^4}\sum \frac{R_m}{m^4}\sin m\pi\xi + \frac{8a^4}{N\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{R_{mn}}{(m^2+\alpha_n^2)^2}\sin m\pi\xi\cos n\pi\eta \; . \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

条件式(3)を(17)に適用すれば

$n=0$ の時
$$\frac{A_0}{6}-\frac{A_0'}{2}+\sum_m\frac{\nu B_m}{\pi^2\beta_m}+\frac{8a^4}{N\pi^3}\sum\frac{R_m}{m^2}-\frac{\nu}{12}D\frac{a^2}{b^2}=0 \tag{18}$$

$n\neq 0$ の時
$$A_nE_n-A_n'F_n+\frac{a}{b}\frac{8}{\pi}\sum_m\frac{B_m(n^2+\nu\beta_m^2)\alpha_n}{(n^2+\beta_m^2)^2}+\frac{4}{\pi}\frac{a}{b}\frac{D}{n}$$
$$=-\frac{8a^4}{N\pi^4}\sum_m\frac{R_{mn}\alpha_n}{(m^2+\alpha_n^2)^2}, \tag{19}$$

ただし
$$E_n=\frac{\operatorname{sh}2\pi\alpha_n-2\pi\alpha_n}{\operatorname{ch}2\pi\alpha_n-1},\quad F_n=\frac{2\{(1-\nu)\operatorname{sh}\pi\alpha_n+(1-\nu)2\pi\alpha_n\operatorname{ch}\pi\alpha_n\}}{\operatorname{ch}2\pi\alpha_n-1},$$

また条件式(5)を(17)に適用して

$n=0$ の時
$$\frac{1}{2}A_0+2(1-\nu)\frac{a^3}{b^3}\sum_m\frac{B_m}{\beta_m}-\frac{8a^4}{N\pi}\sum\frac{R_m}{m^2}+(1-\nu)\frac{a^2}{b^2}D=0 \tag{20}$$

$n\neq 0$ の時
$$A_nF_n+A_n'C_n+\frac{a^3}{b^3}\frac{8}{\pi}(1-\nu)\sum_m\left\{\frac{2\beta_m^2}{(n^2+\beta_m^2)\alpha_n}+\frac{(1-\nu)n^2\beta_m^2}{\alpha_n(n^2+\beta_m^2)^2}\right\}B_m(-1)^m$$
$$=\frac{8a^4}{N\pi^4}\sum_m\frac{R_m\{m^2+(2-\nu)\alpha_n^2\}}{(m^2+\alpha_n^2)^2\alpha_n}(-1)^m, \tag{21}$$

ただし
$$C_n=\frac{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}2\pi\alpha_n+(1-\nu)^2 2\pi\alpha_n}{\operatorname{ch}2\pi\alpha_n-1},$$

次に条件式 (6) から
$$B_mK_m-\frac{b^2}{a^2}\frac{4}{\pi}\sum_m\frac{m(\alpha_n^2+\nu m^2)}{(m^2+\alpha_n^2)^2}A_n-\frac{b^2}{a^2}\frac{4}{\pi}\sum_m\left\{\frac{(1-\nu)(-1)^m m}{(m^2+\alpha_n^2)^2}+\frac{(1-\nu)(-1)^m m\alpha_n^2}{(m^2+\alpha_n^2)^2}\right\}A_n'$$
$$-\frac{\nu A_0}{m}\frac{4}{\pi}\frac{b^2}{a^2}+\frac{4}{\pi}(1-\nu^2)(-1)^m\frac{D}{m}=\frac{8a^2b^2}{N\pi^2}\sum_m\frac{R_m}{m^2}+8\frac{a^2b^2}{N\pi^2}\sum_m\frac{R_{mn}(\alpha_n^2+\nu m^2)}{(m^2+\alpha_n^2)^2}, \tag{22}$$

ただし
$$K_m=\frac{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\pi\beta_m+(1-\nu)^2\pi\beta_m}{\operatorname{ch}\pi\beta_m-1}.$$

最後に隅点の条件式 (10) から
$$\sum B_m(-1)^m=\frac{D}{2}\frac{b}{a} \tag{23}$$

或は (10)′ から
$$\sum B_m(-1)^m=\frac{D}{2}\frac{b}{a}+\frac{b^2}{2N(1-\nu)}P \tag{23'}$$

W が $y=b/2$ に逆対称の場合には $A_0=A_0'=0$ となりその外は全く同様に求められる。

5, 数值計算例,

正方形片持板がその放端隅点に等しい点荷重 P を受ける場合について数値計算を行った結果については講演の際発表する。