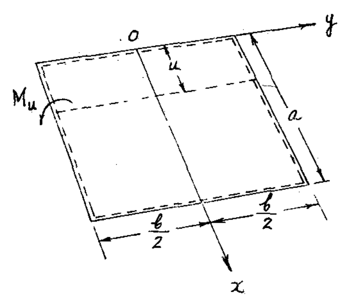
I－8　周辺の任意区間に沿り固定された矩形板の解法に就て

大阪市大理工学部　正員　倉田宗章

要旨—周辺が単純支承された矩形板の周辺の中途より完全固定に支持條件が変ずる如き板の曲げの問題に就いては既にその特別の場合に就いて発表したが、更に固定区間が任意長任意位置である場合に対する解を別の見地から導いたものである

図－1



1)周辺に単一モーメントを受ける矩形板—図-1に示す如く周辺に単一モーメントM_uを受ける単純支承矩形板の撓度wは次の如く求められる。即,(u,v) なる点に unit load を載せる場合の撓度を$\overline{w}(u,v,x,y)$とすれば

$$w = M_u \left|\frac{\partial \overline{w}}{\partial u}\right|_{v=-\frac{b}{2}}$$

なる演算操作で求められて次式を得る

$$w = \frac{M_u}{\pi D}\sum_n \frac{\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}}{n\sinh 2\alpha_n}\left\{-b\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}+\alpha_n\right)}{\sinh 2\alpha_n}+\left(y+\frac{b}{2}\right)\cosh\left(\alpha_n-\frac{n\pi y}{a}\right)\right\} \qquad (1)$$

但　$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}$　　　D－板の曲げ剛度

2)或る区間に沿って與へられた周辺撓角を cancel する如き撓角を生ずる分布モーメントを決定する方法—$y=-\frac{b}{2}$ に於て $x=u$ なる点に働く単一モーメント$M(u)$による撓度式は(1)を参照して次の如く書かれる

$$w = \frac{M(u)}{\pi D}\sum_n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot f_n(y)$$

故に此場合 $y=-\frac{b}{2}$ なる辺の撓角を $\theta(u,x)$ とすれば

$$\theta(u,x) = \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{M(u)}{\pi D}\sum_n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi u}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot f_n'\left(-\frac{b}{2}\right)$$

今モーメント$M(u)$が $a_1<u<a_2$ なる区間に分布するものとすれば斯る分布モーメントに依る撓角$\theta(x)$は

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi D}\sum_n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot f_n'\left(-\frac{b}{2}\right)\int_{a_1}^{a_2} M(u)\sin\frac{n\pi u}{a}\,du$$

で表される。処で$M(u)$が $a_2-a_1=h$ を半周期とする Fourier 級数で表されるものとし

$$M(x) = \sum_m E_m \sin\frac{m\pi x'}{h} = \sum_m E_m \sin\frac{m\pi(x-a_1)}{h}, \qquad (2)$$

但　$x'=x-a_1$

と書かれるものとすれば前式に代入して

$$\theta(x)=\frac{h}{\pi^2 D}\sum_n \frac{f_n'\left(-\frac{b}{2}\right)}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sum_m \frac{mE_m}{n^2\frac{h^2}{a^2}-m^2}\left\{(-1)^m\sin\frac{na_2\pi}{a}-\sin\frac{na_1\pi}{a}\right\} \tag{3}$$

扨所與の荷重による $y=-\frac{b}{2}$ の辺の撓角が

$$\frac{1}{\pi D}\sum_n B_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad (0<x<a) \tag{4}$$

の形に表されてゐるものとすれば $a_1<x<a_2$ の区間に於て (3)+(4)=0 即(4)なる撓角を打消して固定の條件を満足せしむる如き $M(u)$ 或は E_m が求められる筈である

3) 三角級数の Fourier 再展開—前節(3),(4)式は $0<x<a$ での表示式であるから $a_1<x<a_2$ の区間でのみ (3)+(4)=0 の成立を要求する為には此等両式を $a_2-a_1=h$ なる区間で再び Fourier 級数に展開して置かなくてはならない。(3),(4)を此区間で正弦級数に展開すると夫々次の結果を得る

$$\theta(x)=\frac{2h}{\pi^3 D}\sum_m m\sin\frac{m\pi x_1}{h}\sum_s sE_s\sum_n \frac{f_n'\left(-\frac{b}{2}\right)}{n}\frac{\left\{(-1)^m\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}\right\}\left\{(-1)^s\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}\right\}}{\left(m^2-\frac{n^2h^2}{a^2}\right)\left(s^2-\frac{n^2h^2}{a^2}\right)} \tag{3'}$$

$$\frac{1}{\pi D}\sum_n B_n\sin\frac{n\pi x}{a}=-\frac{2}{\pi^2 D}\sum_m m\sin\frac{m\pi x_1}{h}\sum_n B_n\frac{(-1)^m\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-n^2\frac{h^2}{a^2}} \tag{4'}$$

従て前記の (3)+(4)=0 なる條件式は次の如く書かれる事が解る

$$\sum_n B_n\frac{(-1)^m\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}}{m^2-n^2\frac{h^2}{a^2}}=\frac{h}{\pi}\sum_s sE_s\sum_n\frac{f_n'\left(-\frac{b}{2}\right)}{n}\frac{\left\{(-1)^m\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}\right\}\left\{(-1)^s\sin\frac{n\pi a_2}{a}-\sin\frac{n\pi a_1}{a}\right\}}{\left(m^2-\frac{n^2h^2}{a^2}\right)\left(s^2-\frac{n^2h^2}{a^2}\right)} \tag{5}$$

上式は未定常数 E_s に関する無限多の一次聯立方程式であつて此れより E_s を決定出来れば前記の分布モーメント(2)が定まる

4) $y=-\frac{b}{2}$ なる辺上で区間 $a_1<x<a_2$ が固定された板の撓度—分布モーメント $M(x)$ が定まれば此による撓度 w は

$$w=\frac{1}{\pi D}\sum_n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot f_n(y)\int_{a_1}^{a_2}M(u)\sin\frac{n\pi u}{a}\,du$$

で表されるから此式に(2)式を代入すると

$$w=\frac{h}{\pi^2 D}\sum_n\frac{f_n(y)}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sum_m\frac{mE_m}{n^2\frac{h^2}{a^2}-m^2}\left\{(-1)^m\sin\frac{na_2\pi}{a}-\sin\frac{na_1\pi}{a}\right\} \tag{6}$$

従て上式に荷重に依る撓度を superpose すると $a_1<x<a_2$ の区間で固定の條件が満足されて求むる撓曲面の表式が得られる。上記の方法は容易に任意の数ヶ所で固定された場合に拡張する事が出来る。

本文は文部省科学研究費に依る研究の一部なる事を附記す。