I－6　任意荷重を受ける周辺支持板の数値解法

京都大学防災研究所　正員　石崎溌雄

1. まえがき　一般に周辺単純支持板の撓みや應力を求めることは容易で、種々の解法があるが、境界の形が複雑な場合や、荷重の分布が変化している場合には常に簡単に解が求まるとは限らない。このような場合の一つの解法として階差法によるものがあるが、この方法によると一次連立方程式を解くために手数を要する。従来は*Iteration* や*Relaxation Method*が用いられてきたけれども、これらはいづれも計算を繰り返して数値解を定める方法であり、しかも荷重分布が変れば解き直さねばならない。以下に述べるのは、この欠点を改める一つの試みで、一次連立方程式を厳密に解き、或形状の平面板について解いておけば、いかなる荷重分布に対する解も簡単に求められるようにしようとするものである。

なお、本解法は平面板の問題ばかりでなく重調和微分方程式を満足する函数を求める問題にはすべて適用できるわけであるが境界條件を満足させる上において、周辺支持板を解くことが最も容易であるので、こゝにとり上げた。

2. 解法　平面板の撓みwに関する微分方程式は、よく知られているように

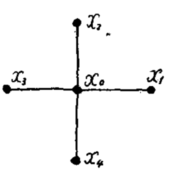
$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (2\cdot1)$$

こゝにpは荷重、Dは板剛度である。この式を解くには

$$\Delta w = -M/D, \qquad \Delta M = -p \qquad (2\cdot2)$$

として、二段に分けてもよい。周辺支持板の場合には境界において$w=0$, $M=0$であるから(2·2)式を解く方が容易である。(2·2)式はいづれもPoissonの微分方程式で、これに階差法を適用するため求めるべき未知数の各点における値をx_iで表わし右図に示すように5つの点をとれば

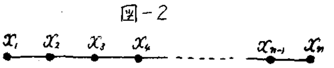
図－1



$$4x_0-(x_1+x_2+x_3+x_4)=C_0 \qquad (2\cdot3)$$

なる関係を満足するx_iの値を定めればよいことになる。この式はLaplaceの方程式を階差式で表わしたものゝ右辺に、荷重項に相當するC_0があるだけであるから、Laplaceの方程式の場合と同様にして計算できる。この計算方法についてはすでに他で述べた*から、こゝには結果のみを記す。図－2に示すように、各点が1行にn個並んでいる場合(2·3)の関係を満足するx_iの値は次式で求められる。

図－2



$$\alpha_{n+1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots\cdots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_2\alpha_{n-1} & \alpha_2\alpha_{n-2} & \cdots\cdots & & \alpha_2 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_2\alpha_{n-2} & \alpha_3\alpha_{n-2} & \cdots\cdots & & \alpha_3 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ & & \cdots\cdots & & & \\ & & \cdots\cdots & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots\cdots & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \qquad (2\cdot4)$$

こゝに係数 α_i は　　$\kappa\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}$,　$\alpha_1 = 1$,　$\alpha_2 = \kappa = 4$　　(2·5)

よりきめられる。これが Poisson の方程式の場合の解であるから、簡単にこれを

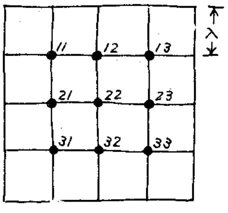
$$\alpha_{n+1}[x_i] = [\alpha_i][C_i] \tag{2·6}$$

で表わすと、(2·1) 式の解は

$$\alpha_{n+1}^2[w_i] = [\alpha_i]^2[C_i] \tag{2·7}$$

となることは容易に知られる。各点が2行以上並んでいる場合も (2·5) 式における κ の値を変えて (2·4) 式に相当する式を計算すればよいことになるが、これについても既に述べた*からこゝには省略し、つぎに計算例によってやゝ詳しく述べる。

図-3



3. 計算例　(1) 内点が3行3列の場合　比較的簡単な例として正方形の板を縦横に4等分して内点が3行3列並んだ場合、右図に示すように記号をきめて、オ1列の w_{ij} の値を計算するために

$$w_{11} - w_{13} = u_1,\quad w_{11} + \sqrt{2}\,w_{21} + w_{31} = v_1,\quad w_{11} - \sqrt{2}\,w_{21} + w_{31} = \overline{v}_1 \tag{3·1}$$

とすると

$$\gamma_{14}\,u_1 = \sum_{j=1}^{3}\gamma_{1j}(C_{1j} - C_{3j}),\quad \gamma_{24}\,v_1 = \sum_{j=1}^{3}\gamma_{2j}(C_{1j} + \sqrt{2}\,C_{2j} + C_{3j}),\quad \gamma_{34}\,\overline{v}_1 = \sum_{j=1}^{3}\gamma_{3j}(C_{1j} - \sqrt{2}\,C_{2j} + C_{3j}) \tag{3·2}$$

たゞしこゝに $\gamma_{14}, \gamma_{24}, \gamma_{34}$ は (2·7) 式の左辺の係数、$\gamma_{ij}, \gamma_{2j}, \gamma_{3j}$ $(i = 1, 2, 3)$ は右辺の行列の第 i 行に表わされる係数である。また $C_{ij} = \lambda^4 p_{ij}/D$ とする。(3·2) 式における γ_{ij} を α_i 及び κ で表わし　$\kappa_1 = 4$,　$\kappa_2 = 4 - \sqrt{2}$,　$\kappa_3 = 4 + \sqrt{2}$　として計算すれば次表のようになり $u_1, v_1, \overline{v}_1$ が求められ、さらに (3·1) 式を使えば w_{11} w_{21}, w_{31} が求められる。第2列目の値を求めるのも同様で、(2·7) の行列の第2行について計算すればよい。結果を表示すると次の通りで、実際にこの表から w_{ij} の値を求めるには、各 C_{ij} の下に記す数字を C_{ij} に掛けて全部加え合わせ 6272 で割ればよい。形が対称であるから w_{11}, w_{12}, w_{22} の3つの点についてのみ表に記した。例として等分布荷重の場合には　$C_{ij} = C$　とすれば　$w_{11} = \frac{3430}{6272}C = \frac{35}{64}C$,　$w_{12} = \frac{4704}{6272}C = \frac{48}{64}C$,　$w_{22} = \frac{6468}{6272}C = \frac{66}{64}C$

表-1

			$\kappa_1 = 4$	$\kappa_2 = 4 - \sqrt{2}$	$\kappa_3 = 4 + \sqrt{2}$
γ_{i4}	α_4^2	$(\kappa^3 - 2\kappa)^2$	3136	$11008 - 7680\sqrt{2}$	$11008 + 7680\sqrt{2}$
γ_{i3}	$\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2$	$\kappa^4 - \kappa^2 + 2$	242	$436 - 280\sqrt{2}$	$436 + 280\sqrt{2}$
γ_{i2}	$2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^3$	$2\kappa^3$	128	$176 - 100\sqrt{2}$	$176 + 100\sqrt{2}$
γ_{i1}	$2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^3$	$3\kappa^2 - 2$	46	$52 - 24\sqrt{2}$	$52 + 24\sqrt{2}$

表-2

	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{31}	C_{32}	C_{33}
$6272w_{11}$	729	520	245	520	490	264	245	264	153
$6272w_{12}$	520	974	520	490	784	490	264	398	264
$6272w_{22}$	490	784	490	784	1372	784	490	784	490

(2) 内点が3行4列の場合　結果のみを次表に示す。この場合、各係数を分数で表わすと非常に桁数が多くなるので小数で表わしておいた。この表から或点の荷重による他の点への撓みの影響を知ることができる。

表-3

	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
w_{11}	.1192	.0899	.0522	.0233	.0870	.0875	.0593	.0285	.0419	.0485	.0358	.0180
w_{12}	.0899	.1714	.1131	.0522	.0875	.1463	.1160	.0593	.0485	.0777	.0664	.0358
w_{21}	.0870	.0875	.0593	.0285	.1611	.1383	.0880	.0413	.0870	.0875	.0593	.0285
w_{22}	.0875	.1463	.1160	.0593	.1383	.2491	.1796	.0880	.0875	.1463	.1160	.0593

4. むすび　本解法を充分活用するためには表-1に相当する表を数多く用意しておくと便利である。また計算例として矩形板のみをとり上げたが、矩形に多少の凹凸あるものも計算できる。周辺固定板については次の機会にゆづりたい。　(1957. 3. 7)

* 石崎溌雄, Laplace の微分方程式数値解法の簡易化, 京大防災研究所創立5周年記念論文集　153 頁　昭和31年11月