

(1-12) 巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について

正員 広島大学工学部 小 田 英 一

水平地表面を有する半無限体が等質等方性の弾性体として、これに重力が作用しているものの中に、コンクリート巻立を有する楕円形トンネルを穿つた場合のトンネル周辺の応力分布を求める。

τ_{xx} : x 方向の応直力, τ_{yy} : y 方向の直応力, τ_{xy} : 剪断応力とする。添字の g は地山中にけるものを示し、添字の c はコンクリート巻立中のものを示すとする。

U : Airy の応力函数とする。

〔1〕 地山における応力, 変位を $z = x + iy$ の函数として表わす。

w_g : 地山の単位体積当りの重量, $V_{1g}(x, y)$: 重力ポテンシャル とすれば $V_{1g}(x, y) = w_g y$, $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$: 解析函数,

$$\frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} = \tau_{yyg} - V_{1g}; \quad \frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2} = \tau_{xxg} - V_{1g}; \quad -\frac{\partial^2 U_g}{\partial x \partial y} = \tau_{xyg} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2U_g = \bar{z}\varphi_{1g}(z) + z\bar{\varphi}_{1g}(\bar{z}) + \psi_{2g}(z) + \bar{\psi}_{2g}(\bar{z}) \quad \text{ただし} \quad \psi_{2g} = \int \psi_{1g}(z) dz \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに $\bar{\varphi}_1(\bar{z})$ は $\varphi_1(z)$ の共軛なる解析函数であり, $\bar{z}$ は z の共軛なるものである。 τ_x, τ_y : それぞれ境界に作用する x 方向, y 方向の外力の単位長当りの大きさ ds : 境界に沿つた微少長

$$\tau_{xg} - V_{1g} \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_g}{\partial y} \right), \quad \tau_{yg} + V_{1g} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_g}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{境界上において} \quad \varphi_{1g}(z) + z\bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z}) + \bar{\psi}_{1g}(\bar{z}) = i \int (\tau_{xy} + i\tau_{yg}) ds - \int V_{1g}(z) dz \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{ただし} \quad V_{1g}(z) = w_g y = -\frac{1}{2} i w_g (z - \bar{z}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxg} + \tau_{yyg} &= 2[\varphi_{1g}'(z) + \bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z})] + 2V_{1g}(z) \\ \tau_{yyg} - \tau_{xxg} + 2i\tau_{xyg} &= 2[\bar{z}\varphi_{1g}''(z) + \psi_{1g}'(z)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

u : x 方向の変位, v : y 方向の変位とすれば

$$2\mu_g(u_g + iv_g) = K_g \varphi_{1g}(z) - z\bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z}) - \bar{\psi}_{1g}(z) + 2(K_g - 1)r_{1g}(z) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ただし} \quad K_g = \frac{\lambda_g + 3\mu_g}{\lambda_g + \mu_g} \quad \lambda, \mu: \text{Lame の定数}$$

$V_{1g}(z) = w_g y$ の共軛なものを $W_{1g}(z) = -w_g x$ とすれば

$$r_{1g}(z) = \frac{1}{4} \int (V_{1g} + iW_{1g}) dz = -\frac{1}{8} i w_g z^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

〔2〕 巻立内の応力, 変位は〔1〕における添字 g の代りに c とおき, 重力の影響は無視できるものとし $V_1 = 0$, $r_1 = 0$ とする。

図-1

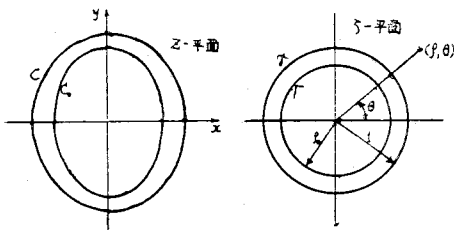


図-1において z 平面の C なる楕円を ζ 平面の単位円 r に写像し, この C なる楕円を地山と巻立との境界とする。

また巻立の内壁を z 平面で C_c なる楕円とし, これが ζ 平面の半径 ρ_c なる τ 円に写像されるものとする。写像函数は巻立内, 地山内で同一のものととして,

$$z = \omega(\zeta) = K \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad 0 < |m| < 1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式を (1) より (8) 式までに代入する。 $\tau_{\rho\rho}$, $\tau_{\theta\theta}$: それぞれ楕円周に直交する方向及び切線方向の直応力, $\tau_{\rho\theta}$: 剪断応力として

[I] 地山における応力, 変位を ζ の函数として表わす。

$$\tau_{\rho\rho g} + \tau_{\theta\theta g} = 2[\Phi_g(\zeta) + \bar{\Phi}_g(\bar{\zeta})] + 2V_g(\zeta) \quad (10)$$

$$\tau_{\theta\theta g} - \tau_{\rho\rho g} + 2i\tau_{\rho\theta g} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\bar{\omega}'(\zeta)} \left[\bar{\omega}(\zeta)\Phi_g'(\zeta) + \omega'(\zeta)\bar{\Psi}_g(\zeta) \right] \quad (11)$$

$$2\mu_g(u_g + iv_g) = K_g\varphi_g(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)}\bar{\varphi}_g'(\bar{\zeta}) - \bar{\Psi}_g(\bar{\zeta}) + 2(K_g - 1)r_g(\zeta) \quad (12)$$

ただし $\Phi_g(\zeta) = \frac{\varphi_g'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \Psi_g(\zeta) = \frac{\psi_g'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)}, V_g(\zeta) = V_{1g}(z), r_g(\zeta) = r_{1g}(z)$

第一種境界値問題: r 円上において $\sigma = 1 \cdot e^{i\theta}$ として

$$\varphi_g(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) + \bar{\Psi}_g(\bar{\sigma}) = f_{1g} + if_{2g} \quad (13)$$

ただし $f_{1g} + if_{2g} = i \int (\tau_{xg} + i\tau_{yg}) ds - \int V_{1g}(z) dz \quad (14)$

第二種境界値問題: r 円上において

$$K_g\varphi_g(\sigma) - (\sigma) \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) - \bar{\Psi}_g(\bar{\sigma}) = 2\mu_g(g_{1g} + ig_{2g}) \quad (15)$$

ただし $2\mu_g(g_{1g} + ig_{2g}) = 2\mu_g(u_g + iv_g) - 2(K_g - 1)r_{1g} \quad (16)$

[II] 巻立内の応力, 変位を ζ の函数として表わすには [I] における添字 g の代りに c とし重力の影響 $V(\zeta) = 0, r(\zeta) = 0$ とする。ただし第一種境界値問題として r 円上では $\sigma_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ となり,

$$\varphi_c(\sigma_0) + \frac{\omega'(\sigma_0)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma}_0)}\bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}_0) + \bar{\Psi}_c(\bar{\sigma}_0) = f_{1c0} + if_{2c0} \quad (13')$$

ただし $f_{1c0} + if_{2c0} = i \int (\tau_{xc0} + i\tau_{yc0}) ds \quad (14')$

巻立内壁上では $\tau_{xc0} = 0, \tau_{yc0} = 0$ となる。 $f_{1c0} + if_{2c0} = 0$

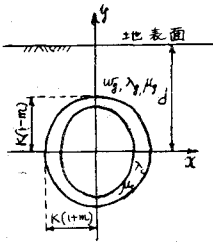
[A] 地山における解析函数

$$\varphi_g(\zeta)B_gK\zeta - \frac{X_g + iY_g}{2\pi(K_g + 1)} \log \zeta + \varphi_g^0(\zeta), \psi_g(\zeta) = (B_g' + iC_g)K\zeta + \frac{K_g(X_g - iY_g)}{2\pi(K_g \log \zeta)} + \psi_g^0(\zeta) \quad (17)$$

$$\varphi_g^0(\zeta) = \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{\zeta^2} + \dots, \psi_g^0(\zeta) = \alpha_{0g}' + i\beta_{0g}' + \frac{\alpha_{1g}' + i\beta_{1g}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g}' + i\beta_{2g}'}{\zeta^2} + \dots \quad (18)$$

B_g, B_g', C_g' は初期応力によるもの, X_g, Y_g はトンネル孔の土を排除したときの不平衡力によるもの, $\varphi_g^0(\zeta), \psi_g^0(\zeta)$ は補助解析函数である。

図-2



[B] コンクリート巻立内における解析函数

$$\varphi_c(\zeta) = A \log \zeta + \varphi_{c1}^0(\zeta) + \varphi_{c2}^0(\zeta), \psi_c(\zeta) = B \log \zeta + \psi_{c1}^0(\zeta) + \psi_{c2}^0(\zeta) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c1}^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1c1} + i\beta_{1c1}}{\zeta} + \frac{\alpha_{2c1} + i\beta_{2c1}}{\zeta^2} + \dots, \\ \varphi_{c2}^0(\zeta) &= (\alpha_{1c2} + i\beta_{1c2})\zeta + (\alpha_{2c2} + i\beta_{2c2})\zeta^2 + \dots, \\ \psi_{c1}^0(\zeta) &= \alpha_{0c1}' + i\beta_{0c1}' + \frac{\alpha_{1c1}' + i\beta_{1c1}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2c1}' + i\beta_{2c1}'}{\zeta^2} + \dots, \\ \psi_{c2}^0(\zeta) &= (\alpha_{1c2}' + i\beta_{1c2}')\zeta + (\alpha_{2c2}' + i\beta_{2c2}')\zeta^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

d : 地表面よりトンネル中心までの深さ, m_g : 地山のポアソン数 とすれば $z = \infty$ において 初期応力に等しいから

$$B_g = -\frac{w_g d}{4} \frac{m_g}{m_g - 1}, B_g' = -\frac{w_g d}{2} \left(\frac{m_g - 2}{m_g - 1} \right), C_g' = 0 \quad (21)$$

$$X_g + iY_g = -i \left[f_{1g} + if_{2g} \right]_A^A = -i \left[- \int V_{1g}(z) dz \right]_A^A = i\pi w_g K^2 (1 - m^2) \quad (22)$$

ただしこの括弧は周辺 r に沿って時計周りの方向に一巡したときの増加を示している。

境界条件: —

r 円上では地山の変位と巻立の変位とが等しいから

$$\left. \begin{aligned} K_c \varphi_c(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) &= 2 \mu_c (g_{1c} + i g_{2c}) = 2 \mu_c (u_g + i v_g) \dots\dots\dots (i) \\ K_c \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) - \frac{\omega(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) - \varphi_c(\sigma) &= 2 \mu_c (g_{1c} - i g_{2c}) = 2 \mu_c (u_g - i v_g) \dots\dots\dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

r 円上では地山と巻立の τ_x, τ_y が等しいことより

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) &= f_{1c} + i f_{2c} = i \int (\tau_{xg} + i \tau_{yg}) ds \dots\dots\dots (i) \\ \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) + \varphi_c(\sigma) &= f_{1c} - i f_{2c} = -i \int (\tau_{xg} - i \tau_{yg}) ds \dots\dots\dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

r 円上では $\tau_{xc0}=0, \tau_{yc0}=0$ より

$$\varphi_c(\sigma_0) + \frac{\omega(\sigma_0)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma}_0)} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}_0) + \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}_0) = 0 \dots\dots (i), \quad \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}_0) + \frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma}_0)}{\omega'(\sigma_0)} \varphi_c'(\sigma_0) + \varphi_c(\sigma_0) = 0 \dots\dots (ii) \quad (25)$$

[(23) 式の第1式] + [(24) 式の第1式] (26) [(23) 式の第2式] + [(24) 式の第2式] (27)

(15), (16) 式において $\zeta = \infty$ においては $u_g=0, v_g=0$ となること, 式び巻立内の $\sigma_{\theta\theta c} + \tau_{\theta\theta c}$ は鉛直軸 y 軸に関して左右対称なることを利用し, また (26) 式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ をかけて, これを r の周りに積分を行い ζ を r の外の点, または内の点と考えると計算し解析函数の係数間の比較をする。また (25) 式に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 - \zeta}$ をかけて ζ を r の外の点と考えると r の周りに積分を行い係数間の比較をする。このようにして解析函数に含まれる係数の値が決定できて, これを (10), (11) 式に代入すれば応力を求めることができる。

(1—13) 数個の孔を有する材料(薄板)の引張り

正員 名古屋工業大学 岡 林 稔

一般に2次元弾性の問題は2個の調和函数の形を境界条件によつて, 決定する方法に帰着せしめることができるが, 数個の孔のある2次元弾性体において, これを決定する方法を一般的に述べ, 例題として, 細長い矩形状の材料が等大の円孔2個を有する場合の引張りについて計算した結果を説明する。

(1—14) ダム内諸施設物が堤体の応力分布に及ぼす影響について

正員 京都大学工学研究所 工博 丹 羽 義 次

准員 京都大学工学部 ○林 口 眺 万

高ダムを合理的に設計してダムとして最も有効な最小断面を決定し, その安全度を検照するためには, 堤体に作用する諸外力によつて惹起される応力を適確に把握しなければならない。ダムの内部応力に関しては古くから研究されており, すでにダム断面内の重力, 地震力, 静水圧, 堆砂圧等による応力について弾性学的な厳密解析がなされている。それにもかかわらずダム内施設物, たとえば監査廊, 取水孔, 鉛直方向接手, フィレット, 越流部等が堤体の応力分布に及ぼす影響についての研究はほとんど行われていない。この点に鑑みこれらの構造物により堤体の応力分布がいかに変化するかを究明し, 高ダムの合理的設計について考察を行つた。下記のような諸施設による応力分布の状態を主として従来の光弾性実験により表面力作用させた場合, 高速度遠心力光弾性装置により物体力(自重及び地震力)を作用させた場合について測定し, さらに理論的な解析を行つて考察した。

(1) 堤軸方向に設けられた監査廊周辺附近の応力分布 円形監査廊に関してはすでに Silverman, Fedrov, Hanner の諸氏の理論的計算法があるが, いづれも不合理な仮定に立脚しているので, まずこれらの諸解法による計算結果を光弾性実験によつて検照し, つぎに一般形の監査廊について実験的研究を行い, これに若干の理論的考察を加え, 合理的な監査廊の設置位置, 配筋法を究明した。