(3—11) 曲梁の歪エネルギーの公式

(Kappus 氏の公式との比較検討)

正員 東京都立大学工学部 大 野 謙

著者は土木学会誌 36 巻 12 号において曲梁の歪エネルギーに対する新公式を提案したがそれに剪力の項を追加して示せば

$$A_i=\int_0^l \frac{N_0^2}{2EF}ds_0+\int_0^l \frac{M_0^2}{2EJ_0}ds_0+\int_0^l \frac{\alpha}{2G}\frac{Q^2}{F}ds_0 \qquad (1)$$

$$J_0=Fer_0,\quad e=r_g-r_0,\quad r_0=\frac{F}{\int\frac{dF}{r}} \qquad (2)$$

$$\alpha=\frac{1}{Fer_0^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S^2(r)}{b(r)}rdr=\frac{r_0}{Fe^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{S'^2(r)}{b(r)r^3}dr \qquad (3)$$

$$S(r)=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\int_{r_1}^{r}(r_g-r)dF=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2S'(r) \qquad (4)$$

矩形断面に対しては($F=2ab=hb$)

$$\alpha=\frac{3er_g-a^2}{2e^2},\quad e=r_g-r_0,\quad r_0=\frac{h}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (5)$$

最近 Der Stahlbau, 21 Jahrgang, Heft 7, Juli 1952 に転載されている Dr.-Ing R. Kappus 氏の曲梁の歪エネルギーの公式を示せば (R. Kappus : Les contraintes de cisaillement dans les barres courbes. La Recherche Aéronautique 21 (1951). s. 49)

$$\Pi_i=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{1+\kappa}{\kappa}\frac{M^2}{Fr^2}-\frac{2MN}{Fr}+\frac{N^2}{F}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds \qquad (1a)$$

$$\kappa=\frac{1}{F}\int\frac{y}{r-y}dF=\frac{1}{F}\int_{y_a}^{y_i}\frac{yb(y)}{r-y}dy \qquad (2a)$$

$$\alpha'=\frac{1}{\kappa^2Fr}\int_{y_a}^{y_i}\frac{S^2(y)}{b(y)(r-y)^3}dy \qquad (3a)$$

$$S(y)=+\int_y^{y_i}\bar{y}b(\bar{y})d\bar{y}=-\int_{y_a}^{y}\bar{y}b(\bar{y})d\bar{y} \qquad (4a)$$

矩形断面($F=hb$)に対しては

$$\alpha'=\frac{3\kappa-(h/2r)^2(1+\kappa)}{2\kappa^2},\quad \kappa=\frac{r}{h}\ln\frac{1+h/2r}{1-h/2r}-1 \qquad (5a)$$

Kappus 氏はその結論において曲梁の応力度公式を直梁の場合と比較して κFr^2 を曲梁の修正慣性モーメント (modified moment of inertia) とただちに取るのは注意を要することで，歪エネルギーの式(1a)においてモーメントに対応する項が $M^2/2EJ$ の形とならずして$(1+\kappa)M^2/2EJ$となるから，応力度と歪エネルギーの場合に対し2つの異つた修正慣性モーメントをとる必要があるとのべているが，実はこれは考え方がまだ不充分で $N-M/r$ を $\mathfrak{N}$，κFr^2 を Z と置いて(1a)式を変形すると結局

$$\Pi_i=\frac{1}{2E}\int_0^l\left\{\frac{M^2}{Z}+\frac{\mathfrak{N}^2}{F}+\alpha'\frac{E}{G}\frac{Q^2}{F}\right\}ds \qquad (1b)$$

となるから，応力度 σ に対しても τ に対してもまた歪エネルギーに対しても $\kappa Fr^2=Z$ なる1つの修性慣性モーメントをとればよいことになる。(1b)は Müller-Breslau の公式の形であるが，ただ異なるのは Müller-Breslau の式では Timoshenko の式と同じく剪力に対しては近似的に直梁の場合の常数をとつている。それは曲梁に対する剪断応力度公式が求められていないからである。

著者の公式(1)～(5)及び Kappus 氏の公式(1a)～(5a)の主な相違は常数または積分が中立軸について考えたものかまたは重心軸について考えたものかに存している。歪エネルギー公式は曲梁の撓みまたは不静定力の計算に大切であるが公式の項が1項だけ少なくまとめてあればそれだけ便利である。半径方向の垂直応力度 σ_r に対する影響を考えると式ははなはだ面倒になるが σ_r の式が求められてあるので計算すれば得られる。

公式(1)～(5)の誘導 Kappus 氏の公式(1a)～(5a)との関係を述べるつもりである。