(3—6) 不静定構造解法への２次偏微分働の理論

正員 熊本大学工学部 工博 重 松 恩

構造部材を図—1 のごとく拱材 bc とし b を原点，格間線を横軸とする直交坐標(xy)をとれば，その任意点の曲げモーメント，軸力，剪断力はまづ部材の単純支における(x_0y_0)点の載荷に対して次式(1)の但書のごとく，さらに部材の剛連接により生ずる材端力 M_{bc}, Y_{bc}, X_{bc} に対して式(1)のごとく表わされる。

$$\left.\begin{aligned}M&=M_{bc}+xY_{bc}-yX_{bc}+M_0\\N&=\sigma+\sin\beta Y_{bc}+\cos\beta X_{bc}+N_0\\Q&=\sigma+\cos\beta Y_{bc}-\sin\beta X_{bc}+Q_0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

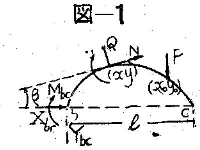
$b\sim x_0$ 間　　$x_0\sim c$ 間

ただし $M_0=x\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right)P+(l-x)\dfrac{x_0}{l}P$

$$N_0=\sin\beta\left(1-\frac{x_0}{l}\right)P-\sin\beta\frac{x_0}{l}P$$

$$Q_0=\cos\beta\left(1-\frac{x_0}{l}\right)P-\cos\beta\frac{x_0}{l}P$$

図—1



この作用力による部材の弾性内働の式は周知のごとく，

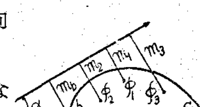
$$W=\frac{1}{2}\int M^2\frac{ds}{EI}+\frac{1}{2}\int N^2\frac{ds}{EA}+\frac{1}{2}\int Q^2\frac{ds}{GA},$$

いま bc に対する作用力の各自がなす弾性変形の性状を考えるものとし $M_{bc}=1$, $Y_{bc}=1$, $X_{bc}=1$, $P=1$ によるそれぞれの中立軸に沿う弾性変角の和を $\$_1, \$_2, \$_3, \$_P$ とし物量の重心の場合と同じくこれらの各着点の坐標をそれぞれ(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), (x_Py_P)とすればこれらの関係は次のごとく W の２次偏微分で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial M_{bc}}=\$_1 &&\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial M_{bc}}=x_1\$_1 &&\frac{-\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial M_{bc}}=y_1\$_1\\&\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial Y_{bc}}=\$_2 &&\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial Y_{bc}}=x_2\$_2 &&\frac{-\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial Y_{bc}}=y_2\$_2\\&\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial X_{bc}}=\$_3 &&\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial X_{bc}}=x_3\$_3 &&\frac{-\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial X_{bc}}=y_3\$_3\\&\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial P}=\$_P &&\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial P}=x_P\$_P &&\frac{-\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial P}=y_P\$_P\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

本式の内容で明らかなように弾性働 W の２次偏微分にあずかる任意の２つの作用力の１つが材端力であるときはその微分形は他方の作用単位力による弾性変角和のその材端力方向線に関するモーメントで表わされる。

図—2



このモーメント理論に基づき部材の弾性条件式を図—2 のごとく部材に対する任意適切なる位置(縦距 m_b，角 α)で示される原線に関するモーメント条件式として表わし得る。これを次のごとく順次の誘導形で示せば，

$$\left(m_b\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial M_{bc}}+\sin\alpha\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial M_{bc}}-\cos\alpha\frac{\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial M_{bc}}\right)M_{bc}+\cdots\cdots$$

$$\cdots+\left(m_b\frac{\partial^2W}{\partial M_{bc}\partial P}+\sin\alpha\frac{\partial^2W}{\partial Y_{bc}\partial P}-\cos\alpha\frac{\partial^2W}{\partial X_{bc}\partial P}\right)P$$

$$=(m_b+\sin\alpha x_1-\cos\alpha y_1)\$_1M_{bc}+\cdots\cdots+(m_b+\sin\alpha x_P-\cos\alpha y_P)P$$

$$=m_1\$_1M_{bc}+m_2\$_2Y_{bc}+m_3\$_3X_{bc}+m_P\$_PP$$

$$=m_b\theta_b-m_c\theta_c+\delta_b-\delta_c\quad\cdots\cdots(3)$$

ここに右辺の θ は材端変角，δ は材端の原線方向の変位を示す。本式(3)によつて静モーメント法と同じ原理により M_{bc}, Y_{bc}, X_{bc} を各自単独に表わし，あるいは各自単独の解法基本式を準備することができる。