

- g) 横尾義貫, 畑中元弘: 建物の立体振動について, 本講演会にて講演予定, 昭 28.5
3) 前掲 2) b)

(総-5) ランガー橋の振動に関する研究

(昭和 27 年度土木学会奨励賞論文)

正員 建設省土木研究所 安 部 清 孝

ランガー橋は径間長 60m くらい以上になると単純橋より材料が少なくてすむまたアーチ橋では架設困難な軟弱地盤の所にも架設できるという長所をもっているのであるが, これはその構成の本質から明らかなように, 単純橋よりもまたアーチ橋よりも橋の剛性が少く振動量が多く, 振動学的にはあまり好ましからざる橋梁型式であろうことは明白である。従つて既設橋梁の強度判定という 実際問題の 必要に 迫られて筆者はこの研究に 着手した。この論文では基礎微分方程式に立脚点を置いた研究結果を発表する。

I. 使用記号の一般的説明

- x : 単純橋および拱肋の任意点の左支点よりの距離
 l : ランガー橋の径間長 f : 拱肋の拱矢
 h : 単純橋の高さ h/l の比に対する比, すなわち h/l
 y : 単純橋の振動変位
 y_m : 単純橋の曲げ変形による振動変位
 η_n : 単純橋の第 n 次の正則型振動の正規函数
 ds : 拱肋の ds 部分が振動中に变化する長さ
 A : 任意点における拱肋の断面積
 A_u : 任意点における単純橋の上弦材の断面積
 a : 垂直吊材の径間方向の単位長当りの断面積
 θ : 単純トラスの斜材の垂直材に対する傾斜角
 J : A_u および A_t のそれぞれの重心軸に関する断面 2 次率の和
 p : 任意点における径間方向の単位巾部分の垂直材に作用する弾力
 ε : 垂直吊材の上記部分の p による伸び
 H_x : 任意点における拱肋の振動中の軸力の水平分値
 P : 任意点における拱肋に作用する軸力
 Y : ランガー橋の単位長当りに作用する強制力
 E : ランガー橋を構成する材のヤング弾性係数
 ν_n : ランガー橋の第 n 次の固有円振動数
 I : 単純橋に対しては断面 2 次率としては次の式によつて表わされるものを採用するものとする
 $I = \frac{A_u A_t}{A_u + A_t} l^2 + J$
- y_p : 単純トラス橋の腹材変形による振動変位
 η : 単純橋の振動の正規函数
 ds : 任意点における ds 部分の拱肋の微小弧長
 ϕ : 拱肋の軸曲線を表す函数
 A_t : 任意点における単純橋の下弦材の断面積
 A_d : 単純トラスの斜材の平均断面積
 P : A_u と A_t との和, すなわち $(A_u + A_t)$
 I : 単純橋の断面 2 次率
 H : 拱肋に作用する軸力の水平分値
 H_0 : $\phi=0$ なる原点における H_x の値
 δp : 任意点における拱肋の振動中の軸力の変化量
 ρ : ランガー橋の単位長当りの質量
 ν_0 : ランガー橋の固有円振動数
 ν : ランガー橋に作用する強制力の作用円振動数

なお η はつぎの式によつて表わされる。

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty), \quad a_n: \text{任意常数}$$

II. 振動の基礎微分方程式

減衰項を含むランガー橋の強制振動の基礎微分方程式はつぎの連立微分方程式によつて与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y = E A_d \sin \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y_s + u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_l \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + Y \dots (1)$$

$$\frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) (y - y_s) = E A_d \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_l \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y_s + E \frac{\partial}{\partial x} \left\{ I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) (y - y_s) \right\} \dots (2)$$

この両式から y_s を消去すれば強制振動の普通の意味での基礎微分方程式がえられるのであるが, これは一般には消去困難である。

いま腹材変形の影響を無視すればランガー橋の減衰振動の基礎微分方程式はつぎのごとく求められる。

$$\rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y \right\} - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \right\} + u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_l \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_l \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + Y \dots (3)$$

つぎに断面 2 次率の変化が回転慣性の項に及ぼす影響は微小であるから, この影響を無視すれば, ランガー橋

の非減衰強制振動の基礎微分方程式は

$$\begin{aligned} & \left\{ EI + \frac{1}{A_d \sin \theta} (u - H_0) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left[2E \frac{dI}{dx} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left\{ I \left(v + 2 \frac{du}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} (u + H_0) \right\} \right] \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \\ & - \left[u - H_0 - E \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{1}{A_d \sin \theta} \left\{ I \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} \left(\frac{du}{dx} + v \right) \right\} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ & - \left\{ v - \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(I \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{dI}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 I}{dx^2} v \right) \right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \rho \left(1 - \frac{1}{A_d \sin \theta} \frac{d^2 I}{dx^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ & - \frac{\rho}{A_d \sin \theta} \left(\frac{I}{EF} v + 2 \frac{dI}{dx} \right) \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} - \rho I \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(1 + \frac{u - H_0}{EF} \right) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{EF A_d \sin \theta} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \\ & = \left(1 - \frac{1}{A_d \sin \theta} \frac{d^2 I}{dx^2} \right) Y - \frac{2}{A_d \sin \theta} \frac{dI}{dx} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{1}{A_d \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{EF A_d \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

単純橋が I 一定なる単純桁橋よりなるランガー桁橋の場合には桁の廻転慣性および剪断剛性に基因する項の影響を無視すると、ランガー桁橋の振動の式はつぎのごとく簡単に表わされる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{u - H_0}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{v}{EI} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{EI} \dots \dots \dots (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} u &= (AE\psi + H) \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H) \phi'' + \frac{A}{a} \phi \phi' \right\}^{-1} \\ v &= AE\phi \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H) \phi'' + \frac{A}{a} \phi \phi' \right\}^{-1} \\ \psi &= \phi'^2 (1 + \phi'^2)^{-3/2} \\ \phi &= \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{A} \frac{dA}{dx} = \psi' + \frac{\psi}{A} \frac{dA}{dx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

なお本文においては等断面の場合の基礎微分方程式を誘導し、この場合に対する ϕ , u , v , $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 v}{dx^2}$ の式を誘導してある。さらに拱軸線が拋物曲線の場合と円弧曲線の場合に対して ϕ , ϕ' , ϕ'' , ϕ''' , ϕ'''' , ψ , ψ' , ψ'' の式を誘導して実用の便に供してある。

III. 振動解並びに振動実測に対する概要 ランガー橋の振動の基礎微分方程式は複雑なので基礎微分方程式並びに境界条件をとともに満足する振動の正規函数を求めることは到底できないので、振動の正規函数としては境界条件のみを満足する函数を用い Galerkin の方法によつて振動解を近似的に求める方法を採用した。

まづ非減衰並びに減衰固有振動解を求め、あわせて固有振動周期を求める式を誘導し、つぎに非減衰並びに減衰強制振動解を求めた。

さらに円弧拱肋をもつ犀川橋の実測を行い計算結果との比較検討を行つた。この結果つぎのことが判明した。

(i) 計算固有振動周期は一般に実測値より短くなつてゐる。これは橋が架設後 18 年あまり経過しているのといくぶん橋の剛性が低下していることによることであろうが、計算過程においていくぶん橋の剛性を大きく取つてゐることにもよるのであろう。しかしながらその差は僅少であつて、理論式の誘導における仮定が大体妥当であろうことは確かめられた。

(ii) 径間長 60 m くらい以上の普通のランガー橋の振動は拱肋の軸伸縮の影響によつてほとんど決定されるのであろうことは第 1 次, 第 2 次, 第 3 次の固有振動周期 T_1 , T_2 , T_3 の比が近似的に

$$\left(\frac{1}{T_1} \right) : \left(\frac{1}{T_2} \right) : \left(\frac{1}{T_3} \right) = 1 : 2.066 : 3.460$$

の形に与えられることよりうかがわれる。

(iii) ランガー橋が同一径間長の単純トラス橋より振動の多いことは同一重量のトラックの走行による振動変位においてランガー橋 (ランガートラス橋) の方が 10~20% くらい一般に大きくなつてゐることにより確かめられた。これはランガー橋の剛性が一般に単純橋より小さく作られてゐることに帰因するのである。

IV. 結 語 本文はとにかく振動の多いといわれているランガー橋の非減衰並びに減衰固有振動および強制振動に関する理論的取扱いをなすと同時に犀川橋の実測結果につき説明し、なお非減衰固有振動周期について実測値と計算値との比較検討を行つて理論的取扱いにおける仮定の妥当であろうことを確かめることができた。