

(4-20) ランガー橋の振動について

正員 建設省土木研究所 工博 谷 藤 正 三
同 同 ○安 部 清 孝

元来吊材を用いて軸力のみを受ける拱肋によつて単純橋⁽¹⁾を吊り、これを補強する目的に使用される型式として発達して来たのがランガー橋であるが、これは近年独立した橋梁型式として採用される様になり、終戦後には一層盛んに設計される様になつて来た。しかしランガー橋は発達の歴史から見てもわかるのであるが、一般に振動量が多いといわれている。筆者の知る限り目下のところランガー橋の振動を取扱つた論文が見当たらないので、既設橋梁の強度判定という実際問題の必要に迫られて筆者はこの研究に着手した。

正弦的に作用する任意の強制力を受けるランガー橋の強制振動変位並びに固有振動周期を求める方法を説明し併せて実測結果と比較検討する積りである。

I. 使用記号の一般的説明

x : 単純橋および拱肋の任意点の左支点よりの距離⁽²⁾ l : ランガー橋の径間長

f : 拱肋の拱矢 h : 単純橋の高さ

ξ : x の l に対する比, すなわち x/l

y : 単純橋の振動変位

y_s : 単純トラス橋の腹材変形による振動変位

η : 単純橋の振動の正規関数

ds : 任意点における dx 部分の拱肋の微小弧長

φ : 拱肋の軸曲線を表わす函数

A_u : 任意点における単純トラスの上弦材の断面積

A_l : 単純トラスの斜材の平均断面積

F : A_u と A_l との和, すなわち $(A_u + A_l)$

I : 単純橋の断面2次率

p : 任意点における径間方向の単位幅部分の垂直吊材に作用する張力

H : 拱肋に作用する軸力の水平分値⁽³⁾

H_0 : $x=0$ なる原点における H_x の値

P : 任意点における拱肋に作用する軸力

ρ : ランガー橋の単位長当りの質量

ν_n : ランガー橋の第 n 次の固有円振動数

u_P : P による振動中のポテンシャルエネルギー

u_{H_0} : H_0 による振動中のポテンシャルエネルギー

V : ランガー橋の振動エネルギー

$U_{\delta P}$: $u_{\delta P}$ の時間的最大値

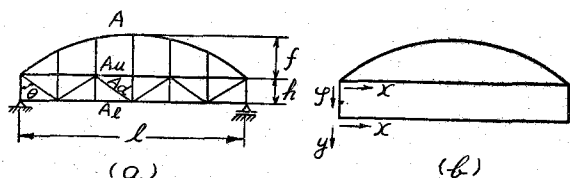
U_m : u_m の時間的最大値

u : 振動中の全ポテンシャルエネルギー

単純トラス橋に対する断面2次率としては次の式によつて表わされるものを採用する事にする。

$$I = \frac{A_u A_l}{A_u + A_l} h^2 + J$$

なお η はつぎの式によつて表わされる。



y_m : 単純橋の曲げ変形による振動変位

η_n : 単純橋の第 n 次の正則型振動の正規関数

δds : 拱肋の ds 部分が振動中に变化する長さ

A : 任意点における拱肋の断面積

A_l : 任意点における単純トラスの下弦材の断面積

a : 垂直吊材の径間方向の単位長当りの断面積

θ : 単純トラスの斜材の垂直材に対する傾斜角

J : A_u および A_l のそれぞれの重心軸に関する断面2次率の和

ϵ : 垂直吊材の上記部分の p による伸び

H_x : 任意点における拱肋の振動中の軸力の水平分値

δP : 任意点における拱肋の振動中の軸力の変化量

Y : ランガー橋の単位長当りに作用する強制力

E : ランガー橋を構成する材のヤング弾性係数

ν : ランガー橋に作用する強制力の作用円振動数

$u_{\delta P}$: δP による振動中のポテンシャルエネルギー

u_m : 単純橋の振動中の曲げによるポテンシャルエネルギー

U_P : u_P の時間的最大値

U_{H_0} : u_{H_0} の時間的最大値

V : v の時間的最大値

U : u の時間的最大値

(1) 単純トラス又は単純桁の意であるが近年は主に前者のものが多く様である。

(2) 左支点を原点に取る。

(3) 自由振動の場合には自重による軸力の水平分値。強制振動の場合は荷重の位置によつて決まる一定値。

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n (n=1, 2, \dots) \quad (a_n \text{ は任意常数})$$

II. 微分方程式による方法 断面2次率の変化が廻転慣性の項に及ぼす影響は微小であるから、この影響を無視すれば、ランガー橋に任意の強制力 Y が作用する場合の強制振動の基礎微分方程式はつぎのごとく求められる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} & \left\{ EI + \frac{I}{A_d \sin \theta} (u - H_0) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left[2E \cdot \frac{dI}{dx} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left\{ I \left(v + 2 \frac{du}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} (u - H_0) \right\} \right] \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \\ & - \left[u - H_0 - E \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{1}{A_d \sin \theta} \left\{ I \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} \left(\frac{du}{dx} + v \right) \right\} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ & - \left\{ v - \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(I \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{dI}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 I}{dx^2} \cdot v \right) \right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \rho \left(1 - \frac{1}{A_d \sin \theta} \cdot \frac{d^2 I}{dx^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ & - \frac{\rho}{A_d \sin \theta} \left(\frac{I}{EF} \cdot v + 2u \frac{dI}{dx} \right) \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} - \rho I \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(1 + \frac{u + H_0}{EF} \right) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{EFA_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \\ & = \left(1 - \frac{1}{A_d \sin \theta} \cdot \frac{d^2 I}{dx^2} \right) Y - \frac{2}{A_d \sin \theta} \cdot \frac{dI}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{I}{A_d \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{HI}{A_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

なお A, I, F がすべて一定の場合には振動の微分方程式はつぎのごとくなる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{u - H_0}{EA_d \sin \theta} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{EA_d \sin \theta} \left(2 \frac{du}{dx} + v \right) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \left\{ \frac{u - H_0}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ & - \left(\frac{v}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho v}{E^2 FA_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \\ & - \frac{\rho}{E} \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(1 + \frac{u - H_0}{EF} \right) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2}{E^2 FA_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \\ & = \frac{Y}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\rho}{E^2 FA_d \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

さらに単純橋が I 一定なる単純桁よりなるランガー桁橋の場合には桁の廻転慣性および剪断剛性に基因する項の影響を無視すると振動の微分方程式はつぎのごとく簡単になる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{u - H_0}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{v}{EI} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{EI} \dots\dots\dots(3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \varphi'^2 (1 + \varphi'^2)^{-3/2} & \varphi' &= \frac{d\varphi}{dx} \\ \phi &= \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = \psi' + \frac{\psi}{A} \cdot \frac{pA}{dx}, & \psi &= \frac{d\psi}{dx} \\ u &= (AE\psi + H) \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H) \varphi'' + \frac{A}{a} \cdot \phi \cdot \varphi' \right\}^{-1} \\ v &= AE\phi \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H) \varphi'' + \frac{A}{a} \cdot \phi \cdot \varphi' \right\}^{-1} \\ \varphi'' &= \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{拋物拱肋曲線: } \varphi &= -kl\xi(1-\xi), & k &= \frac{4f}{l}, & \xi &= \frac{x}{l} \\ \text{円弧拱肋曲線: } \varphi &= \frac{l}{2} \{ \sqrt{k^2 - 1} - \sqrt{k^2 - (2\xi - 1)^2} \}, & k &= \frac{1}{4} \left(\frac{4f}{l} + \frac{l}{f} \right), & \xi &= \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

この (2), (3), (4) 式より固有振動及び強制振動解は求められる。

(4) 式の誘導は建設省土木研究所報告 83 号に示されている。

III. エネルギーの式による方法 ポテンシャルエネルギー u 及び振動のエネルギー v はそれぞれ腹材変形 (又は剪断変形) の影響及び廻転慣性の影響を無視すればつぎのごとく与えられる⁽⁵⁾。

$$u = \frac{(1-\gamma)H}{2l} \int_0^1 \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \frac{E}{2l} \int_0^1 A \psi \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ + \frac{E}{2l^3} \int_0^1 I \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2El^3} \int_0^1 \frac{\varphi}{a} \left(u \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$v = \frac{l}{2} \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (32)$$

U, V の時間的的最大値は y に

$$y_0 = \eta_0(\xi) \sin(\nu_0 t + \beta_0) \quad \dots\dots\dots (33)$$

なる変数分離を適用すると

$$U = \frac{(1-\gamma)H}{2l} \int_0^1 \left(\frac{d\eta_0}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{E}{2l} \int_0^1 A \psi \left(\frac{d\eta_0}{d\xi} \right)^2 d\xi \\ + \frac{E}{2l^3} \int_0^1 I \left(\frac{d^2 \eta_0}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{1}{2El^3} \int_0^1 \frac{\varphi}{a} \left(u \frac{d^2 \eta_0}{d\xi^2} + v \frac{d\eta_0}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$V = \frac{l\nu_0^2}{2} \int_0^1 \rho \eta_0^2 d\xi \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここに $\gamma = \frac{H_0}{H}$ とする。

これらの U, V, u, v を用いればラグランジの方法により固有振動及び強制振動解は求められる。

IV. 実測値との比較 以上は理論的取扱いに対する説明であるが長野県の犀川橋* に対する実測を行つて、この結果を理論結果と比較検討して説明する積りである。

(5) 式の誘導は建設省土木研究所報告 83 号に示されている。

* ランガートラス橋

(4-21) 橋梁下部構造の振動性状

——基礎反力係数が 1 次的に変化する場合——

准員 京都大学工学部 後 藤 尙 男

(1) 概要 橋梁下部構造の振動性状が橋梁震害の最も重大な原因となるという事実に着目して、筆者は先に基礎地盤の弾性を考慮に入れた橋梁下部構造の振動性状に関する理論解を導き、これが現地橋梁実験の結果とよく合致することを確認した。このとき基礎地盤の弾性を基礎反力係数 K で表わし、Rayleigh の法によつて振動曲線 y が静的な撓み曲線 η に相似であると考へて、

- 1) K が根入部全長にわたつて一定のとき、 η を厳密に計算し、⁽¹⁾
- 2) K が根入深さ方向に 1 次的に増大する場合、 η を近似的に計算し、⁽²⁾

この η を用いて理論計算を進めた。ところが 1) は基礎地盤が根入深さ方向に硬くなるという事実を取入れず地表面で反力が過大になる欠点があり、2) では η の近似計算にかなりの難点があつた。こうしたことから K が 1 次的に増大する場合 η を厳密に計算して振動性状を一層明確にしようとしたのが本文の要旨である。

(2) 撓み曲線 η の計算 η を計算するのに別図を参照する。AB は橋梁下部構造根入部、BC は地上部を表わすものとする、AB、BC 区間に対して次の平衡式が成立つ。

