(3–5) 擬似定流 Quasi-steady Flow について

(洪水波の理論的考察)

正員 大阪大学工学部 田 中 清

H=水位，U=流速，$A=BH^r$=水路断面積，$R\fallingdotseq\frac{1}{r}H$=径深，$I$=水路勾配，$f$=抵抗係数，$\omega$=伝播速度
$\dot{H}$=水位上昇速度，F=Froude 数，($x=0$ 点の諸量には添字 0 を附ける。) $\tilde{U}$=等流換算流速
平均流速公式として指数公式を用うれば，

$$\tilde{U}=f^{1/2}R^{s/2}I^{1/2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

Manning 公式なれば，

$$f=\frac{1}{n^2}\ (n \text{ は粗度係数}),\qquad s=\frac{4}{3}$$

$$\frac{s}{2r}=\gamma \qquad \text{と書き}$$

$|\dot{H}|\ll(1+\gamma)\tilde{U}I$ と見なされうる流れを擬似定流と命名したい。一般に洪水流ではこの関係が成り立つている。

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}\right)=I-\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{U^2}{fR^s} \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial AU}{\partial x}=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式を $|\dot{H}|\ll(1+\gamma)\tilde{U}I$ を考慮して解いてみる。

$$\text{Froude数：}\quad F=\frac{U}{\sqrt{gR}}\fallingdotseq\frac{\tilde{U}_0}{\sqrt{gR_0}}=\text{const.} \qquad \cdots\cdots(4)$$

と見なせば，(たゞし $\gamma F\neq 1$)

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}\fallingdotseq-\gamma(1+\gamma)F^2\frac{\partial H}{\partial x}\ll I,\qquad \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial x}\fallingdotseq\gamma F^2\frac{\partial H}{\partial x}\ll I \qquad \cdots\cdots(5)$$

(2) より

$$U\fallingdotseq\sqrt{fR^sI\{1-(1-\gamma^2F^2)\frac{1}{I}\frac{\partial H}{\partial x}}\qquad (I\neq 0) \qquad \cdots\cdots(6)$$

(3) に代入し，$H\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sim\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$ の項を省略し，

$$\frac{\partial H}{\partial t}+(1+\gamma)\sqrt{\frac{f}{r^s}IH^s\left\{1-(1-\gamma^2F^2)\frac{1}{I}\frac{\partial H}{\partial x}\right\}}\,\frac{\partial H}{\partial x}=0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

上式が擬似定流の基本式であり，一階偏微分方程式の特性曲線理論により，所要の条件の下に解くことが出来る。$x=0$ 点の洪水位曲線を $H=H_0(t)$ とすれば，

初期帯として，

$$t_0=t_0,\qquad x_0=0,\qquad H_0=H_0(t_0),\qquad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0=\dot{H}_0(t_0) \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$J=\int^H\frac{(1+\gamma)^2fr^{-s}IH^s}{(1+\gamma)^2fr^{-s}IH^s-a^2}\,dH \qquad \cdots\cdots(9)$$

と置けば，

$$\left.\begin{aligned}&(1-\gamma^2F^2)\frac{1}{I}[J]_{H_0}^{H}=a(t_0-t)+x\\&(1-\gamma^2F^2)\frac{1}{I}\left[\frac{\partial J}{\partial a}\right]_{H_0}^{H}=t_0-t\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

なる2式より parameter t_0 を消去したものが所要の解である。たゞし a は

$$a^3-(1+\gamma)^2f\gamma^{-s}IH_0^s\cdot a-(1-\gamma^2F^2)(1+\gamma)^2fr^{-s}IH_0^s\cdot\frac{\dot{H}_0}{I}=0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

の根として与えられ，近似的には，

$$a \fallingdotseq (1+\gamma)\widetilde{U}_0+\frac{1}{2}(1-\gamma^2F'^2)\frac{\dot{H}_0}{I} \quad\cdots\cdots(12)$$

(10) より直接に H と H_0 との関係を求めることは困難であるので，$x=0$ 点の或る位相 $H_0{}^*$ が x 点に伝播した時の対応位相を H^* とする。

$H_0{}^*$ 位相の伝播速度を ω^* とすれば，

$$x=\omega^*(t_0-t) \quad\cdots\cdots(13)$$

なる関係を保持せしめると，(10) の 2式は，

$$(1-\gamma^2F^2)\frac{1}{I}\left[J-a\frac{\partial J}{\partial a}\right]_{H_0{}^*}^{H^*}=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

と全く同等となり，x 点における H^* と $H_0{}^*$ との関係が求められる。$s=\dfrac{4}{3}$ として積分を実行すれば

$$\frac{H^*}{H_0{}^*}=\eta,\quad \kappa=\frac{(1-\gamma^2F^2)\dot{H}_0{}^*}{(1+\gamma)\widetilde{U}_0I},\quad N=\frac{2}{3}\frac{\left(1+\dfrac{2}{3}\kappa\right)\kappa Ix}{(1-\gamma^2F^2)H_0{}^*}$$

と置き，x が余り大ならざる限り近似的に

$$\eta\fallingdotseq 1-\frac{3}{4}\kappa\frac{N}{1-N}\left\{1+\frac{\kappa}{4(1-N)^2}\right\} \quad\cdots\cdots(15)$$

これより水位の減衰度が計算される。

流速 U，伝播速度 ω，水面の水路に対する勾配 $-\dfrac{\partial H}{\partial x}$，水位上昇速度 $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ は計算の途中で求められ，

$$U^*=\frac{a}{1+\gamma}=\widetilde{U}_0+\frac{1}{2}\frac{(1-\gamma^2F^2)\dot{H}_0{}^*}{(1+\gamma)\,I} \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\omega^*=\frac{dx}{dt}=(1+\gamma)\widetilde{U}_0\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\eta^s\right)+(1-\gamma^2F^2)\frac{\dot{H}_0{}^*}{I}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\eta^s\right)\cdots\cdots(17)$$

$$-\frac{\partial H^*}{\partial x}=\frac{\dot{H}_0{}^*}{(1+\gamma)\widetilde{U}_0}\cdot\frac{1}{\eta^s}+\frac{I}{1-\gamma^2F^2}\left(\frac{1}{\eta^s}-1\right) \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial t}=\dot{H}_0{}^*\left(\frac{3}{2\eta^s}-\frac{1}{2}\right)+\frac{(1+\gamma)\widetilde{U}_0I}{1-\gamma^2F^2}\left(\frac{1}{\eta^s}-1\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

$x=0$ における値は $\eta=1$ とすればよい。

なお断面が変化する場合 $A=(B_0+bx)H$ についても同様な方法で解決できる。

(3-6) 流入損失水頭について

正員　早稲田大学理工学部　米　屋　秀　三

水路入口の流入損失水頭は，一般に

$$h_r=f_e\frac{v^2}{2g} \quad (h_r：損失水頭，f_e：損失係数，v：流速)$$

で与えられ，管路については f_e が実測されている。又管径の急変による損失係数は，水の粘性を考えて次元解析すると，

$$f_e=F\left(R_e,\ \frac{d}{D}\right) \quad (R_e：\text{Reynolds 数},\ D：上流管径,\ d：下流管径)$$

になることもよく知られている。然し開水路におけるこれらの損失水頭については未だ適当な算定式がないのでそれを調べてみた。

流入損失水頭は入口に生ずる縮流部における断面積の急変に原因し，その収縮率から f_e は計算される。然し収縮率を運動方程式から二次元的に解析することは数学的に殆んど困難である。そこで図に示した様に水路入口の斜影した全水域に亘つて運動量の法則を適用してみた。その結果