第 1 会 場 (1)～(23) (応用力学・都市計画・衛生工学)

5 月 25 日 (日) 早稲田大学商学部教室

(1–1) 弾性基礎上の変厚円板について

正員 早稲田大学理工学部 村 上 博 智

構造物の基礎の如く弾性床上の変厚円板が板の中心に関して対称な荷重をうける場合，その釣合の条件から次式を得る。

$$D\left\{\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}\right\}+\frac{dD}{dr}\left\{2\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{2+\nu}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right\}$$
$$+\frac{d^2D}{dr^2}\left\{\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right\}=q-kw \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 任意点の板剛度，h：板厚，w：板の撓み，q：分布荷重，k：地盤の沈下係数である。

(1) 式を無次元化するため $k/D_0=1/l^4$ ($D_0=\dfrac{Eh_0{}^3}{12(1-\nu^2)}$ 板中心の剛度)，$r/l=x$, $w/l=z$, $h/h_0=y$ と置き，又板厚の変化を $y^3=1-\alpha x^4$ (α は常数)，とすると (1) 式は次の如くなる。

$$\left(\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{2}{x}\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{1}{x^2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x^3}\frac{dz}{dx}\right)-\alpha x^4\left(\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{10}{x}\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{19+4\nu}{x^2}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{12\nu-3}{x^3}\frac{dz}{dx}\right)$$
$$+z=\frac{q}{kl} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) 式の同次式の一般解は次の形式で表わされる。

$$Z=A\cdot X_{1(x)}+B\cdot X_{2(x)}+C\cdot X_{3(x)}+D\cdot X_{4(x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但し A, B, C, D は積分常数，X_1, X_2, X_3, X_4 は(2) の同次式の互に独立な解で夫々次の四つの式の如くなる。

$$X_{1(x)}=1-\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{(A_4-1)x^8}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\frac{(A_4-1)(A_8-1)x^{12}}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2\cdot12^2}- \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$X_{2(x)}=x^2+\frac{A_2-1}{4^2\cdot6^2}x^6+\frac{(A_2-1)(A_6-1)}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2}x^{10}+ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但し $A_n=\alpha\cdot[n(n-1)(n-2)(n+7)+n\{(19+4\nu)(n-1)+(12\nu-3)\}]$ ……(6)

$$X_{3(x)}=X_{1(x)}\log x+F_{3(x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$X_{4(x)}=X_{2(x)}\log x+F_{4(x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}F_{3(x)}&=b_4x^4+b_8x^8+b_{12}x^{12}+\\F_{4(x)}&=C_6x^6+C_{10}x^{10}+C_{14}x^{14}+\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{n^2(n-2)^2}\left[\frac{4n(n-1)(n-2)(A_{4-1})\cdots(A_{n-4}-1)}{2^2\cdot4^2\cdots\cdots n^2}-\frac{B_{n-4}\cdot(A_{4-1})\cdots(A_{n-8}-1)}{2^2\cdot4^2\cdots\cdots(n-4)^2}\right.\\&\qquad\left.+(A_{n-4}-1)b_{n-4}\right]\\C_n&=\frac{1}{n^2(n-2)^2}\left[\frac{4n(n-1)(n-2)(A_2-1)\cdots(A_{n-4}-1)}{4^2\cdot6^2\cdots\cdots n^2}-\frac{B_{n-4}\cdot(A_2-1)\cdots(A_{n-8}-1)}{4^2\cdot6^2\cdots\cdots(n-4)^2}\right.\\&\qquad\left.-(A_{n-4}-1)C_{n-4}\right]\end{aligned}\right\} \cdots(10)$$

但し $B_n=\alpha\{4n(n-1)(n-4)+8(2+\nu)n-8(1-\nu)\}$ ……(12)

$\alpha=0$ ならば等厚円板の場合を示し，(6)，(12) から分る如く $A_n=B_n=0$，従つて

$$\left.\begin{aligned}X_1&=1-\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\frac{x^8}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\cdots\\X_2&=x^2-\frac{x^6}{4^2\cdot6^2}+\frac{x^{10}}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2}-\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(13)$$

$$X_3=\left(1-\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\frac{x^8}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\cdots\right)\log x+\frac{3x^4}{128}-\frac{25}{1,769,472}x^8+$$

$$X_4=\left(x^2-\frac{x^6}{4^2\cdot6^2}+\frac{x^{10}}{4^2\cdot6^2\cdot8^2\cdot10^2}-\cdots\cdots\right)\log x+\frac{5}{3456}x^6-\frac{1054\cdot10^{-4}}{442,368}x^{10}+$$

となり等厚円板の場合の同様の解，例えば “Theory of plates and shells” by Timoshenko P.278 (p)式と一致する。

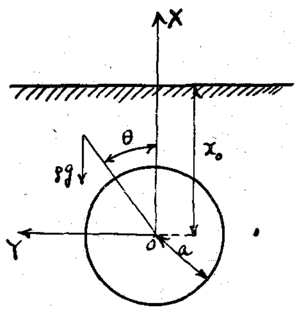
(1-2) 巻立なき円形隧道掘鑿による隧道周縁の変位及び地表面の沈下について

正員 広島大学工学部 小 田 英 一

円形隧道が水平地表面の下に穿たれた時，この円形隧道附近に生ずべき応力計算に於て，等方等質完全弾性体に関する平面歪の問題としての近似解として，平面調和函数より求められる応力が円孔中心より無限大に於て零となり，円孔周縁上では攪乱されない重力の働く弾性体内の応力と反対の符号を有し絶対値が等しいものとなる様に平面調和函数を採用し，その係数の値を決定する。

この平面調和函数 $\vartheta, r^2\dfrac{\partial^2 f'}{\partial r^2}$ より ϑ と共軛なる平面調和函数 ϑ'，及び $\dfrac{\partial f'}{\partial r}$，$\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial f'}{\partial\theta}$ を求める。又 ϑ, ϑ' より Ω 及び χ を求め，次の様にして極座標で表わした円形隧道の変位量を求める。

図—1



半径方向の変位

$$u_r=\kappa\Omega-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{r}{2}\vartheta-\frac{\partial f'}{\partial r}\right]$$

切線方向の変位

$$u_\theta=\kappa\chi+\frac{1}{2\mu}\left[\frac{r}{2}\vartheta'+\frac{1}{r}\frac{\partial f'}{\partial\theta}\right]$$

但し $\kappa=\dfrac{\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}$ λ, μ……Lamé の弾性常数

今隧道中心の深さを x_0，地山の単位体積の重さを ρg とせば，$W=\rho g r_0$ $V=\rho g a$ a：円形隧道の半径（図—1参照），σ：ポアソン比

$$\begin{aligned}(u_r)_{r=a}=&-\frac{1}{4\mu}W\left(1+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)a+\Bigg[-\left(\frac{V\kappa}{4}\frac{1}{1-\sigma}+\frac{V}{16\mu}\frac{3-4\sigma}{1-\sigma}\right)a\left(\frac{1}{2}+\log r\right)\\&+\frac{V}{16\mu}\frac{1}{1-\sigma}a\Bigg]\cos\theta+\Bigg[-2W\kappa\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)a-\frac{W}{4\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 r\\&+\frac{W}{4\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 a\Bigg]\cos2\theta+\Bigg[\frac{V\kappa}{2}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 a+\frac{V}{8\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 r\\&-\frac{V}{8\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 r-\frac{V}{8\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^4 a\Bigg]\cos3\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u_\theta)_{r=a}=&\Bigg[\left(\frac{V}{16\mu}\frac{3-4\sigma}{1-\sigma}+\frac{V\kappa}{4}\frac{1}{1-\sigma}\right)a\left(\frac{1}{2}+\log r\right)+\frac{V}{16\mu}\frac{1}{1-\sigma}a\Bigg]\sin\theta\\&+\Bigg[2W\kappa\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)a-\frac{W}{4\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 r+\frac{W}{4\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 a\Bigg]\sin2\theta\\&+\Bigg[-\frac{V\kappa}{2}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 a+\frac{V}{8\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 r-\frac{V}{8\mu}\left(1-\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^4 a\Bigg]\sin3\theta\end{aligned}$$

以上の計算式により $x_0=300\,\mathrm{m}$，$a=5\,\mathrm{m}$，$\rho g=2.345\,\mathrm{t/m^3}$，$\mu=460\,000\,\mathrm{kg/cm^2}$，$\lambda=36\,850\,\mathrm{kg/cm^2}$，$\sigma=0.22$ として円孔周縁の変位を求める。円形坑頂の変位量は内方に 0.84 cm，坑底の変位量は内方に 0.78 cm 側壁中央の半径方向の変位量は外方に 0.33 cm となる。