第1會場講演15~35.

5月27日(日)大阪大學醫學部4階第1講義室

15. 不靜定構造物の未知量を含む多元1次連立方程式の行列式による解法 (20分)

准員　日本大學工學部　遠藤篤康

1. 要旨 不靜定構造物の應力を解くに當つては，數多の未知量を含む多元1次連立方程式を解くことに多大の手數と時間を必要とすることがしばしばあつて，これに對しては一般に消去法，イテラチオン法等の諸法があるがこれらに比してはるかに簡單で，かつ計算尺を使用して相當の精度を得られるものである．

2. 理論 本法は行列式による多元1次連立方程式の解法にLaplaceの展開定理を應用し，未知量を1回に3個ずつ消去し得るものである．(山内恭彥著代數學及幾何學165頁參照)

いま一般形の多元1次連立方程式をn個取り扱い，係數のみをまとめて**表-1**の如くする．

次に**表-1**の未知數及び方程式を3個ずつ區切り，その3個ずつの未知數を行列式において取り扱う．いま方程式(1)，(2)，(3)から取り扱うとすれば，方程式(1)，(2)，(3)のx_4，x_5，……，x_r，……，x_mまでの項を方程式の右邊に移して，τ_1，τ_2，τ_3とおく(**表-2**)と，x_1，x_2，x_3は次の如くなる．

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\frac{\begin{vmatrix}\tau_1&b_1&c_1\\\tau_2&b_2&c_2\\\tau_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d_4&e_4\cdots&n_4\\d_5&&\vdots\\\vdots&&\vdots\\d_n&\cdots\cdots&n_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d_4&e_4\cdots&n_4\\d_5&&\vdots\\\vdots&&\vdots\\d_n&\cdots\cdots&n_n\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}\tau_1&b_1&c_1\\\tau_2&b_2&c_2\\\tau_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}=\frac{k_{11}\tau_1+k_{12}\tau_2+k_{13}\tau_3}{\triangle_1}\\
x_2&=\frac{\begin{vmatrix}a_1&\tau_1&c_1\\a_2&\tau_2&c_2\\a_3&\tau_3&c_3\end{vmatrix}}{\triangle_1}=\frac{k_{21}\tau_1+k_{22}\tau_2+k_{23}\tau_3}{\triangle_1},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_1&b_1&\tau_1\\a_2&b_2&\tau_2\\a_3&b_3&\tau_3\end{vmatrix}}{\triangle_1}=\frac{k_{31}\tau_1+k_{32}\tau_2+k_{33}\tau_3}{\triangle_1}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

また方程式(4)，(5)，(6)の右邊に移項したものをτ_4，τ_5，τ_6とし，(r-1)，(r)，(r+1)の移項したものをτ_{r+1}，τ_r，τ_{r-1}とする．同様に(n)式まで移項しτ_nとすると，x_4，x_5，x_6，……，x_{r-1}，x_r，x_{r+1}，……x_{n-1}，x_nは次の如き關係を有する．

但し，τ_4，τ_5，τ_6，……，τ_{r-1}，τ_r，τ_{r+1}，……x_{n-1}，x_nは〔**表-1**〕の3個ずつ區切つた對角線上のブロックを除いた外，全部の未知數を方程式右邊に移項したものである〔**表-3，4，5**〕

$$\left.\begin{aligned}
x_4&=\frac{\begin{vmatrix}\tau_4&e_4&f_4\\\tau_5&e_5&f_5\\\tau_6&e_6&f_6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}d_4&e_4&f_4\\d_5&e_5&f_5\\d_6&e_6&f_6\end{vmatrix}}=\frac{k_{44}\tau_4+k_{45}\tau_5+k_{46}\tau_6}{\triangle_2}\\
x_5&=\frac{\begin{vmatrix}d_4&\tau_4&f_4\\d_5&\tau_5&f_5\\d_6&\tau_6&f_6\end{vmatrix}}{\triangle_2}=\frac{k_{54}\tau_4+k_{55}\tau_5+k_{56}\tau_6}{\triangle_2},\quad x_6=\frac{\begin{vmatrix}d_4&e_4&\tau_4\\d_5&e_5&\tau_5\\d_6&e_6&\tau_6\end{vmatrix}}{\triangle_2}=\frac{k_{64}\tau_4+k_{65}\tau_5+k_{66}\tau_6}{\triangle_2}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

……………………………………………………………………

$$\left.\begin{aligned}
x_{r-1}&=\frac{\begin{vmatrix}\tau_{r-1}&r_{r-1}&q_{r-1}\\\tau_r&r_r&q_r\\\tau_{r+1}&r_{r+1}&q_{r+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p_{r-1}&r_{r-1}&q_{r-1}\\p_r&r_r&q_r\\p_{r+1}&r_{r+1}&q_{r+1}\end{vmatrix}}=\frac{k_{r-1\cdot r-1}\tau_{r-1}+k_{r-1\cdot r}\tau_r+k_{r-1\cdot r+1}\tau_{r+1}}{\triangle_r}\\
x_r&=\frac{\begin{vmatrix}p_{r-1}&\tau_{r-1}&q_{r-1}\\p_r&\tau_r&q_r\\p_{r+1}&\tau_{r+1}&q_{r+1}\end{vmatrix}}{\triangle_r}=\frac{k_{r\cdot r-1}\tau_{r-1}+k_{r\cdot r}\tau_r+k_{r\cdot r+1}\tau_{r+1}}{\triangle_r}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$x_{r+1}=\frac{\begin{vmatrix}p_{r-1} & r_{r-1} & \tau_{r-1}\\ p_r & r_r & \tau_r\\ p_{r+1} & r_{r+1} & \tau_{r+1}\end{vmatrix}}{\triangle_r}=\frac{k_{r+1\cdot r-1}\tau_{r-1}+k_{r+1\cdot r}\tau_r+k_{r+1\cdot r+1}\tau_{r+1}}{\triangle_r},\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1}=\frac{\begin{vmatrix}\tau_{n-1} & n_{n-1}\\ \tau_n & n_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m_{n-1} & n_{n-1}\\ m_n & n_n\end{vmatrix}}=\frac{k_{n-1\cdot n-1}\tau_{n-1}+k_{n-1\cdot n}\tau_n}{\triangle_n}\qquad x_n=\frac{\begin{vmatrix}m_{n-1} & n_{n-1}\\ m_n & n_n\end{vmatrix}}{\triangle_n}=\frac{k_{n\cdot n-1}\tau_{n-1}+k_{n\cdot n}\tau_n}{\triangle_n}\cdots(4)$$

〔表1〕

方程式番号	方程式左辺																	方程式右辺
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	---	→	x_{r-1}	x_r	x_{r+1}	---	---	→	x_{n-1}	x_n	常数
(1)	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	↓	↓	p_1	r_1	q_1	↓	↓	↓	m_1	n_1	C_1
(2)	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2			p_2	r_2	q_2				m_2	n_2	C_2
(3)	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3	g_3			p_3	r_3	q_3				m_3	n_3	C_3
(4)	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4	f_4	g_4			p_4	r_4	q_4				m_4	n_4	C_4
(5)	a_5	b_5	c_5	d_5	e_5	f_5	g_5			p_5	r_5	q_5				m_5	n_5	C_5
(6)	a_6	b_6	c_6	d_6	e_6	f_6	g_6			p_6	r_6	q_6				m_6	n_6	C_6
(7)	a_7	b_7	c_7	d_7	e_7	f_7	g_7			p_7	r_7	q_7				m_7	n_7	C_7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			↓	↓	↓				↓	↓	↓
($r-1$)	a_{r-1}	b_{r-1}	c_{r-1}	d_{r-1}	e_{r-1}	f_{r-1}	g_{r-1}			p_{r-1}	r_{r-1}	q_{r-1}				m_{r-1}	n_{r-1}	C_{r-1}
(r)	a_r	b_r	c_r	d_r	e_r	f_r	g_r			p_r	r_r	q_r				m_r	n_r	C_r
($r+1$)	a_{r+1}	b_{r+1}	c_{r+1}	d_{r+1}	e_{r+1}	f_{r+1}	g_{r+1}			p_{r+1}	r_{r+1}	q_{r+1}				m_{r+1}	n_{r+1}	C_{r+1}
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓			↓	↓	↓				↓	↓	↓
($n-1$)	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}			p_{n-1}	r_{n-1}	q_{n-1}				m_{n-1}	n_{n-1}	C_{n-1}
(n)	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	↓	↓	p_n	r_n	q_n	↓	↓	↓	m_n	n_n	C_n

〔表2〕

	x_4	x_5	x_6	x_7	---	→	x_{r-1}	x_r	x_{r+1}	---	---	→	x_{n-1}	x_n	常数
τ_1	$-d_1$	$-e_1$	$-f_1$	$-g_1$	↓	↓	$-p_1$	$-r_1$	$-q_1$	↓	↓	↓	$-m_1$	$-n_1$	C_1
τ_2	$-d_2$	$-e_2$	$-f_2$	$-g_2$			$-p_2$	$-r_2$	$-q_2$				$-m_2$	$-n_2$	C_2
τ_3	$-d_3$	$-e_3$	$-f_3$	$-g_3$	↓	↓	$-p_3$	$-r_3$	$-q_3$	↓	↓	↓	$-m_3$	$-n_3$	C_3

〔表3〕

	x_1	x_2	x_3	x_7	---	→	x_{r-1}	x_r	x_{r+1}	---	---	→	x_{n-1}	x_n	常数
τ_4	$-a_4$	$-b_4$	$-c_4$	$-g_4$	↓	↓	$-p_4$	$-r_4$	$-q_4$	↓	↓	↓	$-m_4$	$-n_4$	C_4
τ_5	$-a_5$	$-b_5$	$-c_5$	$-g_5$			$-p_5$	$-r_5$	$-q_5$				$-m_5$	$-n_5$	C_5
τ_6	$-a_6$	$-b_6$	$-c_6$	$-g_6$	↓	↓	$-p_6$	$-r_6$	$-q_6$	↓	↓	↓	$-m_6$	$-n_6$	C_6

〔表4〕

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	---	→	x_{r-2}	x_{r+2}	--→	x_{n-1}	x_n	常数
τ_{r-1}	$-a_{r-1}$	$-b_{r-1}$	$-c_{r-1}$	$-d_{r-1}$	$-e_{r-1}$	$-f_{r-1}$	$-g_{r-1}$	↓	↓	$-i_{r-1}$	$-j_{r-1}$	↓	$-m_{r-1}$	$-n_{r-1}$	C_{r-1}
τ_r	$-a_r$	$-b_r$	$-c_r$	$-d_r$	$-e_r$	$-f_r$	$-g_r$			$-i_r$	$-j_r$		$-m_r$	$-n_r$	C_r
τ_{r+1}	$-a_{r+1}$	$-b_{r+1}$	$-c_{r+1}$	$-d_{r+1}$	$-e_{r+1}$	$-f_{r+1}$	$-g_{r+1}$	↓	↓	$-i_{r+1}$	$-j_{r+1}$	↓	$-m_{r+1}$	$-n_{r+1}$	C_{r+1}

〔表5〕

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	--→	x_{r-1}	x_r	x_{r+1}	---	--→	x_{n-2}	常数
τ_{n-1}	$-a_{n-1}$	$-b_{n-1}$	$-c_{n-1}$	$-d_{n-1}$	$-e_{n-1}$	$-f_{n-1}$	$-g_{n-1}$	↓	$-p_{n-1}$	$-r_{n-1}$	$-q_{n-1}$	↓	↓	$-l_{n-1}$	C_{n-1}
τ_n	$-a_n$	$-b_n$	$-c_n$	$-d_n$	$-e_n$	$-f_n$	$-g_n$		$-p_n$	$-r_n$	$-q_n$			$-l_n$	C_n

よつて，上述の式(1)より次の如き作表をなし機械的に操作を行う〔表-6〕(省略)

次に表-6において，係數の項の方程式(4),…(r),…(n)は表-1の方程式(4),…(r)…(n)の x_1，x_2，x_3 の項を消去し，x_4，x_5,…，x_r,…，x_n の函數に置き換えたことになり，表-1の方程式(4)，(5),…,(r),…,(n)の x_4，x_5，x_6,…,x_r,…,x_n までと表-6(省略)の方程式(4)，(5),…，(r),…，(n)の代數和をもつて表-1の方程式(1)，(2)，(3)と(4)，(5)，(6),…,(r),…,(n)までの x_1，x_2，x_3 が消去せられたことになる〔表-7〕(省略)同樣にくり返して，x_4，x_5，x_6 と方程式(4)，(5)，(6)を消去し，最後に未知數が3個以内まで行い最後の未知數が決定されたら，順次逆に x_1 まで決定できるのである．(注)本法では x_1，x_2，x_3 より消去を行つたがなるべく最初の行列式の展開に簡單のところより(1)，(2)，(3)，(4)の性質を應用して消去を行うを便とする．なお例題は軌條と地下鐵の問題をあつかう．

16. 方列による靜定主系の決定法 (20分)

正員 山梨大學工學部 近 藤 繁 人

土木學會誌第35巻第11號には一般代數式による不靜定値の選び方について述べたが，ここではこれを方列によつて解く方法について述べる．

先ず n 次不靜定構造物の上の1點 i に $P_i=1$ が作用した場合には次式が成り立つ．

$$\left.\begin{aligned}X_a\delta_{aa}+X_b\delta_{ab}+\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{an}-\delta_{ai}=0\\ X_a\delta_{ba}+X_b\delta_{bb}+\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{bn}-\delta_{bi}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ X_a\delta_{na}+X_b\delta_{nb}+\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{nn}-\delta_{ni}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$