土木学會第1回年次学術講演會講演

（橋梁及一般構造物之部 No. 9）

橋桁に及ぼす衝撃に就て

准員 矢 野 勝 正*

1. 概説 本論文は兩端支持の單桁上にスプリングを有する自動車荷重が作用する時，其の路面の凹凸性に依り自動車が上下振動を生じ橋桁に衝撃を與へる現象を力学的に研究せるものにして，先づ橋桁の運動を Lagrange の運動方程式に依つて解き，次に路面の凹凸に因る走行自動車の上下振動を求め，因つて生ずる衝撃を求めたものである。

計算を簡單にするために次の如き假定をなした。即ち (1) 路面は変形しない，(2) 自動車は一様不変の速度にて障害物上を走行する，(3) 各種摩擦力は無視する。

2. 桁橋の振動 橋桁の振動曲線を一般に次式で表す。

$$y=\sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \sin\frac{i\pi x}{l}$$

此の振動体系に於て運動及位置の勢力を求めるに，

$$V=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right)^2 dx=\frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 q_i^2, \qquad T=\frac{\gamma F}{2g}\int_0^l y^2 dx=\frac{\gamma F l}{4g}\sum_{i=1}^{i=\infty} q_i^2$$

Lagrange の運動方程式に依るときは，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i$$

Q は一般座標 q_i に依り表された一般力 (generalized force) である。上式に運動及位置の勢力を代入するときは，

$$\frac{F\gamma l}{2g}\ddot{q}_i+\frac{EI\pi^4 i^2}{2l^3}q_i=Q_i$$

今 $a^2=EIg/F\cdot\gamma$ とすれば簡單に次の様に與へられる。

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}+\frac{i^4\pi^4 a^2}{l^4}q_i=\frac{2g}{F\cdot\gamma l}Q_i$$

此の微分方程式の一般解は

$$q_i=A_i\cos\frac{i^2\pi^2 at}{l^2}+B_i\sin\frac{i^2\pi^2 at}{l^2}+\frac{l^2}{i^2\pi^2 a}\cdot\frac{2g}{F\gamma l}\int_0^l Q_i\sin\frac{i^2\pi^2 a(t-t_1)}{l^2}\cdot dt_1$$

此の解の最初の 2 項は桁の自由振動を與へ，第 3 項は强制振動を與へるものである。

尙一般力 Q_i は P を外力とするときは，

$$Q_i=P\sin\frac{i\pi vt}{l}$$

として與へらる。P は路面を走る自動車が凹凸のために橋桁に及ぼす動力学的力であつて，次の如くにして計算を試みた。

---

* 京都府技師 工学士 土木部道路課勤務 （昭和 12 年 4 月 10 日講演）

3. 車体の上下動及其の力 凹凸を有する橋面上を自動車が走行するときは車体は障害物のため上下振動を生じ，車輪の橋面に及ぼす圧力は衝撃の爲に著しく增大する。

自動車は其の機構を彈下荷重と彈上荷重とに分れスプリング及車輪に依り聯結及支持さるゝものとし，二つの自由度を有する振動系と考へ，路面の凹凸は Fourier 級數に依り表されるものと考へた。

$$y_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\sin vt\alpha\cdot d\alpha,\qquad F(\alpha)=\int_0^l f(\lambda)\sin\alpha\lambda\cdot d\lambda$$

然るときに車体の運動方程式は，m_1 及 m_2 を夫々彈下，彈上荷重とするときは，

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}=c_1(y_0-y_1)-c_2(y_1-y_2),\qquad m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=c_2(y_1-y_2).$$

此の方程式を解き y_1 及 y_2（彈下及彈上荷重の垂直變位）を求めるときは，衝撃に依る力は $P=c_1(y_1-y_0)$ として與へられる。

今算式を簡單にするため次の如き假定をする。

$$\varphi(\alpha)=\frac{\{K_2^2-(v\alpha)^2\}F(\alpha)}{\{(\alpha v)^2-\beta_1^2\}\{(\alpha v)^2-\beta_2^2\}},\qquad \psi_1(\alpha)=\frac{K_1^2(\beta_1^2-K_2^2)}{\beta_1(\beta_1^2-\beta_2^2)}\int_0^\infty\frac{\alpha v F(\alpha)}{\{(\alpha v)^2-\beta_1^2\}}d\alpha,$$

$$\psi_2(\alpha)=\frac{K_1^2(K_2^2-\beta_2^2)}{\beta_2(\beta_1^2-\beta_2^2)}\int_0^\infty\frac{\alpha v F(\alpha)}{\{(\alpha v)^2-\beta_2^2)\}}d\alpha.$$

然るときは $$P=-\frac{2c_1}{\pi}\left\{\int_0^\infty F(\alpha)\sin vt_1\alpha\cdot d\alpha-K_1^2\int_0^\infty\varphi(\alpha)\sin vt_1\alpha\cdot d\alpha-\psi_1(\alpha)\sin\beta_1t_1-\psi_2(\alpha)\sin\beta_2t_1\right\}$$

一般座標に依る一般力は上式の P が求められたる事に依り

$$Q_i=P\sin\frac{i\pi vt_1}{l}$$

として求められる。

4. 動力学的最大撓 一般力 Q_i が斯樣にして求められるときは，q_i 式中の第 3 項は

$$q_i=\frac{l^2}{i^2\pi^2a}\cdot\frac{2g}{F\gamma l}\int_0^l Q_i\sin\frac{i^2\pi^2a(t-t_1)}{l^2}\cdot dt_1$$

として與へられ，從つて橋桁の振動曲線は

$$y=\sum_{i=1}^{i=\infty}q_i\sin\frac{i\pi x}{l}$$

今外力の週期が橋桁の振動週期と一致せる時を以て最も危險な狀態であるとし，其の時の最大動力学的撓を求め，靜力学的撓との比率に依り，橋桁に及ぼす衝撃係數を計算した。著者は上記諸式に依り鉄筋コンクリート單桁橋の撓を夫々計算し衝撃係數を求めたるに，外力荷重の 20～60% の値を得た。而して自動車の速度に依る変化は極めて少く，衝撃力の大部分は路面の凹凸に起因するものなる事を知つた。

本論文を起草するに當り下記の論文を參考とし多大の指示を受けたものにして，深く感謝の意を表すものである。

Timoschenko: Schwingungsprobleme der Technik. 妹澤克惟: 振動学
小澤久太郎: 走行自動車に因る橋桁强制振動の理論, 松村孫治: 自動車の路面への衝撃に關する研究