

土木学会第1回年次学術講演會講演

(橋梁及一般構造物之部 No. 4)

鉄筋コンクリート無鉸拱の計算方法に就て

(About the Calculation of Stresses of Reinforced Concrete Hingeless Arches.)

會員 北 澤 忠 男*

1. 緒 言 茲に報告する研究は拱の解法に關する根本原理に觸れたものではなく、只先人が考出した拱解法の理論を實地計算に應用するに當りて

1. 計算を出来るだけ簡單にする事。
2. 一つの拱に就きて計算した結果を成可廣く他の拱に對しても應用し得る様にする事。
3. 理論の示す所に従つて計算を正確にする事。

等に重點を置いて研究した結果を報告する次第である。

拱の形の如何を問はず一般的に當てはまる様な方法に由る事が學術的には必要と思ふけれ共實際に用ゆる拱の形は大多數拱頂に就きて對稱の形を持つものであると云ふ點から此の研究に於ては對稱拱のみを取扱ふ事とし従て其の解法も對稱拱のみに適合する方法を採用した。

1. 及 2. を實現する爲拱曲線の方程式、拱環の厚さ、拱環横斷面積、及其の慣性モーメント等は全部拱の支間 l に依りて表はし得る如く工夫し亦拱環の内面曲線及外面曲線は拱軸曲線と同一種類の曲線を用ゆる事とした、3. の目的に對しては $I \cos \varphi$ 及 $A \cos \varphi$ は一定にあらざして變化するものとしたるは勿論、軸圧力に依る拱環壓縮の影響、拱環横斷面に平行に作用する剪力の影響を考慮し是等が拱の応力に對し如何なる割合のものとなるかを求むる事とした。

2. 拱曲線の方程式 曲線の種類は種々あるけれ共本研究に於ては橋梁として實用範圍の廣きものと認むる parabola, circle transformed-catenary の 3 種を選定した。拱曲線の座標軸の原點を拱頂に置き x 軸を水平に y 軸を垂直に取りて曲線の方程式を定むるものとする。但し

$$l: \text{拱の支間} \quad f: \text{拱矢}, \quad fl = m,$$

$$x: \text{拱頂より拱曲線の任意點に至る横距} = kl$$

として縦距 y を定める。

a. Parabola.

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} = 4 \frac{x}{l} \times \frac{x}{l} \times x = 4mk^2l \dots \dots \dots (A)$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{d(4mk^2l)}{l \times dk} = 8mk \dots \dots \dots (A')$$

b. Circle.

* 名古屋高等工業学校教授 工學士 (昭和 12 年 4 月 10 日講演)

$$R = \text{円の半径} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2}{2f} = \frac{1+4m^2}{8m} \times l = nl \dots\dots\dots (B)$$

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2} = [n - \sqrt{n^2 - k^2}] \times l \dots\dots\dots (B')$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{d[n - \sqrt{n^2 - k^2}] \times l}{l \times dk} = \frac{k}{\sqrt{n^2 - k^2}} \dots\dots\dots (B'')$$

c. Transformed Catenary.

d_c : 拱頂に於ける充填土の深さ = ξl

$$y = d_c \left[\cosh \beta \frac{x}{l} - 1 \right] = \xi [\cosh 2\beta k - 1] \times l \dots\dots\dots (C)$$

$$\beta = \log_e [n + \sqrt{n^2 - 1}], \quad n = \frac{f + d_c}{d_c} = \frac{m + \xi}{\xi}$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{d[\xi(\cosh 2\beta k - 1)]}{l \times dk} = 2\xi \beta \sinh 2\beta k \dots\dots\dots (C')$$

上記各式に於て m, n, ξ, β は皆定数であり k だけが y を求むべき點の位置に依りて変化する。 y は勿論任意點の縦距ではあるが拱計算の便宜並に拱曲線を作図する便利から見ると支間 l をある數に等分した點に就きて y を計るを可とする。従つて今 l を 20 等分し其の等分點に於て y を求むるものとすれば拱頂を原點とする k の値は 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 等であり、是等を前記各式に入れると y はすべて支間 l にある係數 γ を乗じた形として表はし得る、即 $y = \gamma l$ である。

3. 拱環の厚さ 拱頂 C, 左右起拱點 A 及 B を通過する如く拱軸曲線を描く。拱環の厚さ D は拱軸に對し直角に計るものとし先づ拱頂の厚さ D_c 及拱端の厚さ D_s を定め図-1 に示す如く $CC_1 = CC_2 = \frac{D_c}{2}$, $AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = \frac{D_s}{2}$ として $A_1A_2B_1B_2$ なる四つの點を定め $A_1C_1B_1$ を通過する如く拱の内面曲線を描き亦 $A_2C_2B_2$ を通過する如く外面曲線を引く、但し是等の曲線は拱軸曲線と同一種類の曲線とする。 D_c 及 D_s を支間 l を以て表はせば $D_c = \alpha_c l$ $D_s = \alpha_s l$ である 図-1 に依りて

$$l_1: \text{内面曲線の支間} = l - D_s \times \sin \varphi_s = [1 - \alpha_s \times \sin \varphi_s] l = a_1 l$$

$$l_2: \text{外面曲線の支間} = l + D_s \times \sin \varphi_s = [1 + \alpha_s \times \sin \varphi_s] l = a_2 l$$

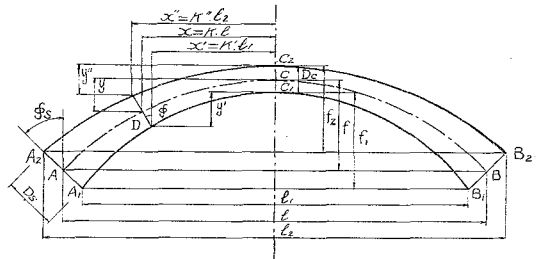
$$f_1: \text{内面曲線の拱矢} = f - \frac{D_c}{2} + \frac{D_s}{2} \cos \varphi_s = \left[m - \frac{\alpha_c}{2} + \frac{\alpha_s}{2} \cos \varphi_s \right] l = b_1 l$$

$$f_2: \text{外面曲線の拱矢} = f + \frac{D_c}{2} - \frac{D_s}{2} \cos \varphi_s = \left[m + \frac{\alpha_c}{2} - \frac{\alpha_s}{2} \cos \varphi_s \right] l = b_2 l$$

となり、 $f_1/l_1 = m_1 = b_1/a_1$, $f_2/l_2 = m_2 = b_2/a_2$ とすれば C_1 を原點する内面曲線の縦距 y' 及 C_2 を原點とした外面曲線の縦距 y'' は 2. に示した方程式に依りて計算する事が出来る。

今任意點の拱環の厚さを D とすれば 図-1 に由りて

図-1.



$$D=(y'+D_c-y'') \sec \varphi \dots\dots\dots(E)$$

となり、 y' 及 y'' は拱軸の縦距 y と同様に $y'=\gamma'.l_1$, $y''=\gamma''.l_2$ とする事が出来るから

$$D=(\gamma'.l_1+\alpha c l-\gamma''.l_2) \sec \varphi=(\gamma'.a_1+\alpha c-\gamma''.a_2) \sec \varphi, l=\alpha.l \dots\dots\dots(E')$$

であつて α は D を計る點の位置に關聯して变化する係數である。 D を計る點の位置は拱軸線上に之を定め原點 C からの距離を $x=kl$ とする。此の點に於て拱軸に直角の方向に直線を引き夫れと内面曲線及外面曲線との交點の間の距離が其の位置に於ける拱環の厚さ D であるが (E) 式に依りて D の値を實際に求むるには内面曲線及外面曲線の各の原點 C_1 及 C_2 から夫々の交點に至る横距 $x'=k'.l_1$, $x''=k''.l_2$ が先づ以て定められねばならぬ、之に對しては圖-1 に依り

$$\frac{kl-k'l_1}{y'+\frac{1}{2}D_c-y}=\frac{k'l_2-kl}{y+\frac{1}{2}D_c-y''}=\tan \varphi$$

なる關係から k' 及 k'' を求むる事が出来、從つて D を定むる爲の y' 及 y'' の係數 γ' 及 γ'' を計算する事が出来る。此の計算を行ふに當つて $k'.l_1=k' \times a_1l$, $k''.l_2=k'' \times a_2l$ とし亦 y' 及 y'' は拱曲線の種類に依りて

Parabola: $y'=4m_1(k')^2l_1=4 \times \frac{b_1}{a_1} \times (k')^2 \times a_1l=4b_1(k')^2l$

$$y''=4m_2(k'')^2l_2=4 \times \frac{b_2}{a_2} \times (k'')^2 \times a_2l=4b_2(k'')^2l$$

Circle: $y'=[n_1-\sqrt{n_1^2-(k')^2}]l_1=[n_1-\sqrt{n_1^2-(k')^2}]a_1l$

$$y''=[n_2-\sqrt{n_2^2-(k'')^2}]l_2=[n_2-\sqrt{n_2^2-(k'')^2}]a_2l$$

T. Catenary: $y'=\xi(\cosh 2\beta_1k'-1)l_1=\xi(\cosh 2\beta_1k'-1)a_1l$

$$y''=\xi(\cosh 2\beta_2k''-1)l_2=\xi(\cosh 2\beta_2k''-1)a_2l$$

の如く表せば k' 及 k'' を定むる方程式は次の形となる。

a. Parabola.

$$\tan \varphi=8mk=\frac{k-a_1k'}{4b_1(k')^2+\frac{1}{2}\alpha c-4mk^2}=\frac{a_2k''-k}{4mk^2+\frac{1}{2}\alpha c-4b_2(k'')^2}$$

$$\therefore 4b_1 \tan \varphi (k')^2+a_1k'+[(\frac{1}{2}\alpha c-4mk^2) \tan \varphi-k]=0 \dots\dots\dots(F)$$

$$4b_2 \tan \varphi (k'')^2+a_2k''-[(4mk^2+\frac{1}{2}\alpha c) \tan \varphi+k]=0 \dots\dots\dots(F')$$

b. Circle.

$$\tan \varphi=\frac{k}{\sqrt{n^2-k^2}}=\frac{k-a_1k'}{a_1n_1-a_1\sqrt{n_1^2-(k')^2}+\frac{1}{2}\alpha c-n+\sqrt{n^2-k^2}}=\frac{a_2k''-k}{n-\sqrt{n^2-k^2}+\frac{1}{2}\alpha c-a_2n_2+a_2\sqrt{n_2^2-(k'')^2}}$$

是より

$$a_1 \times \tan \varphi \sqrt{n_1^2-(k')^2}=a_1k'-c_1, \quad a_2 \tan \varphi \sqrt{n_2^2-(k'')^2}=a_2k''-c_2$$

但し

$$c_1=k-\tan \varphi (a_1n_1+\frac{1}{2}\alpha c-n+\sqrt{n^2-k^2}), \quad c_2=k+\tan \varphi (n-\sqrt{n^2-k^2}+\frac{1}{2}\alpha c-a_2n_2)$$

$$a_1^2(1+\tan^2 \varphi)(k')^2-2a_1c_1k'+(c_1^2-a_1^2n_1^2 \tan^2 \varphi)=0 \dots\dots\dots(G)$$

$$a_2^2(1+\tan^2 \varphi)(k'')^2-2a_2c_2k''+(c_2^2-a_2^2n_2^2 \tan^2 \varphi)=0 \dots\dots\dots(G')$$

c. Transformed Catenary.

$$\tan \varphi=\frac{k-a_1k'}{\xi a_1 \cosh 2\beta_1k'-\xi a_1+\frac{1}{2}\alpha c-\xi(\cosh 2\beta k-1)}=\frac{a_2k''-k}{\xi(\cosh 2\beta k-1)+\frac{1}{2}\alpha c-\xi a_2 \cosh 2\beta_2k''+\xi a_2}$$

是より

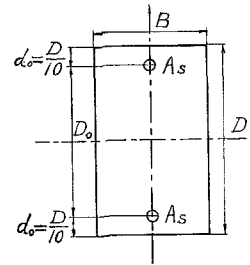
$$a_1k'+\xi a_1 \times \tan \varphi \times \cosh 2\beta_1k'=k+[\xi a_1-\frac{1}{2}\alpha c+\xi(\cosh 2\beta k-1)] \tan \varphi \dots\dots\dots(H)$$

$$a_0 k'' + \xi a_2 \times \tan \varphi \times \cosh 2\beta k'' = k + [\xi a_2 + \frac{1}{2} \alpha c + \xi (\cosh 2\beta k - 1) \tan \varphi] \dots \dots \dots (H')$$

parabola 及 circle の場合には普通の二次方程式の解法に由りて k', k'' の値を定むる事が出来るが transformed catenary では双曲線函数である爲、漸近法を用ゆる事とする。但事實上 k' は k より稍大、 k'' は稍小で共に k に極めて近似して居るから漸近法を用ゆるにしても其の範圍は狭まゝ限定せられて居り、従つて此の方法に由り k', k'' の適當なる値を見出す事はあまり困難では無い。斯くして k', k'' が定まれば (E) 式の γ', γ'' が求められ従つて (E') 式の $D = \alpha l$ が確定する。

4. 任意點の拱の横断面積及其の慣性モーメント 図-2 に於て拱環の厚さ D を αl とする如く其の幅 B を cl と表はす事が出来る。又鉄筋の被覆 d_0 は鉄筋の太さに由りて加減せらるべきが當然であり其の太さは必然拱環の厚さ D に關係する故に本研究に於ては之を $D/10$ と定める。拱環に於ては之に生ずる応力の性質上複鉄筋とする事が必要であり鉄筋量は応力の大きさに従つて定めらるべきであるから上下の鉄筋横断面積は計算上等しく無いのが普通であるけれ共、然し兩者の間に大差無き事も事實であるから上下の鉄筋横断面積は等しきものと假定し各 A_s なる面積を有するものとする。故に拱環の横断面の形狀は其の中心を通る縦横の軸に對し共に對稱の形となる。鉄筋の横断面積をコンクリートの當價面積に換算し夫より拱環の横断面積並に横軸に對する慣性モーメントを求むるには普通に行はるゝ方法に依り次の如く之を表はす(図-2 参照)。

図-2.



$$A_s: \text{鉄筋横断面積} = pBD \quad p: BD \text{ に對する鉄筋横断面積割合}$$

$$n: \text{弾性係數比} = E_s/E_c \quad d_0 = D/10 \text{ 従つて } D_0 = D - 0.2D = 0.8D$$

$$A: \text{拱環横断面積} = [1 + 2p(n-1)]BD$$

$$I: \text{横軸に對する慣性モーメント} = \frac{BD^3}{12} + \frac{D_0^2}{2} [p(n-1)]BD = [0.0833 + 0.32p(n-1)]BD^3$$

n を 10~12 ととり、 p を 0.005~0.008 とし、 $p(n-1)$ を計算するに表-1 に示す通りであり其の平均値は 0.065 となるも之を 0.06 とし A 及 I の値を求むれば

$$A = 1.12 BD = 1.12 \alpha c l^2, \quad I = 0.1025 BD^3 = 0.103 \alpha c^3 l^4$$

となり、 c は拱環の全長に互りて一定であるから結局 $1.12 \alpha c l^2$ 及 $0.103 \alpha c^3 l^4$ を計算すれば A と I とが定まる事になる。故に拱の応力計算の積分中に含まるゝ $1/A \cos \varphi$ 及 $1/I \cos \varphi$ は夫々 $\sec \varphi / 1.12 \alpha c l^2$ 及 $\sec \varphi / 0.103 \alpha c^3 l^4$ を計算すればよい。

然るに後に 6. の項に於て述ぶる通り A 及 I に對する係數 1.12 及 0.103 は單獨に夫々の積分に關係せずして 0.103/1.12 なる比の形で關係する事になる爲 $p(n-1)$ の値に多少の変化を生じても此の比に影響する處は極めて小であるから $p(n-1)$ の價として表-1 の大凡の平均値即 0.06 を採用しても實用上差支無きものと認める。

表-1. $p(n-1)$ の値

$p \backslash n$	10	11	12
0.005	0.045	0.050	0.055
0.006	0.054	0.060	0.066
0.007	0.063	0.070	0.077
0.008	0.072	0.080	0.088

5. 軸圧力 N と剪断力 T の取扱に就て 拱の計算に於て N と T とは次の如き形として影響する。

$$N: \frac{\int \cos^2 \varphi dx}{A \cos \varphi}, \quad \frac{\int \sin^2 \varphi dx}{A \cos \varphi}, \quad \frac{\int \sin \varphi \cos \varphi dx}{A \cos \varphi}$$

$$T: \frac{E}{G} \int \frac{\beta \cos^2 \varphi dx}{A \cos \varphi}, \quad \frac{E}{G} \int \frac{\beta \sin^2 \varphi dx}{A \cos \varphi}, \quad \frac{E}{G} \int \frac{\beta \sin \varphi \cos \varphi dx}{A \cos \varphi}$$

前者に於ては特に検討の要なきも、後者にありては E/G と β とが如何なるものかを定むる事を要する。

但し

- E : Modulus of elasticity of concrete
- G : Modulus of rigidity of concrete
- β : Coefficient of shearing strain of arch section

$1/m$ を Poisson's ratio とすれば $E/G=2(1+1/m)$ なる関係にあるから $1/m$ が與へらるれば E/G の値は定められるのであるが、コンクリートの Poisson's ratio は稍明瞭を欠き其の適當なる値を幾何とするかは問題であるが假に之を $1/5\sim 1/8$ の間に取りて E/G を計算すれば表-2 の如くであつて其の大体の平均値は 2.3 となるから本研究に於ては $E/G=2.3$ とする。尙又後に述ぶるが如く E/G の拱応力に對する影響は極めて輕少であり且此の値に變化を生じても拱応力計算式の一局部を修正する必要あるのみであるから E/G を前述の如く定める。

表-2.

$1/m$	E/G
1/5	2.40
1/6	2.33
1/7	2.29
1/8	2.25

次に β に就きては (圖-3 參照),

$$\beta = \frac{A}{T^2} \int r^2 dA, \quad \tau = \frac{T}{zI} \int_y^{y_0} y dA, \quad T: \text{剪断力}$$

であつて横断面の形に關係する。今鉄筋の横断面積 A_s をコンクリートの當價面積に換算し、之を圖-3 の如くコンクリートの横断面積に附加すれば I 形横断面となり、之に對する β の値は Prof. Mehrtens に依れば

$$\beta = \frac{A}{I^2} \left[\frac{h^2 d}{6} (8b^2 - 12b^2 B - B^3 + 6bB^2) + \frac{B}{2} \left(\frac{8a^3}{15} + \frac{4ia^3}{3} + i^2 a \right) \right], \quad i = \frac{4dbh}{B}$$

茲に

$$B = cl, \quad 2a = D = cl, \quad A = 1.12 BD = 1.12 ccl^2,$$

$$d = 0.2D = 0.2cl, \quad h = 0.4D = 0.4cl,$$

$$A_s = 0.06 BD = 0.06 ccl^2 = 2b' \times 0.2D = 0.4b'cl, \quad \therefore b' = 0.15cl$$

$$b = 0.65cl, \quad I = 0.103 c\alpha^3 l^4$$

等を β の式に代入すれば

$$\beta = 0.0152 \left(\frac{c}{\alpha} \right)^2 + 1.353 \dots \dots \dots (1)$$

となる。拱の計算に於て普通に行はるゝ如く $B=1.0m$ とすれば c/α は大体 $2.0\sim 0.5$ の範圍にあるから

$$\beta_{\max} = 1.4138 \quad \beta_{\min} = 1.3606$$

となり拱環の厚さの變化の割合に β の變化は小であり、從つて拱頂より拱端まで β は一定であるとしても差支無きものと認められ、 β が一定であるならば T の影響に關する積分の $\beta \times E/G$ は定數となる。今 β を最大、最小の平均即 1.39 とすれば

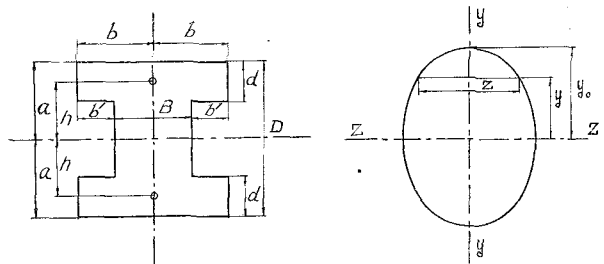
$$\beta \times E/G = 1.39 \times 2.3 = 3.2 \dots \dots (1')$$

なる結果となる。

6. 不靜定條件及其の計算式 對稱拱に於ては拱頂に於て拱を左右に切放し其の拱頂横断面に作用する軸圧力 N_0 、曲げモーメント M_0 、及剪断力 T_0 を不靜定條件とするを便とし、是等の正負の關係は次の如く定める。

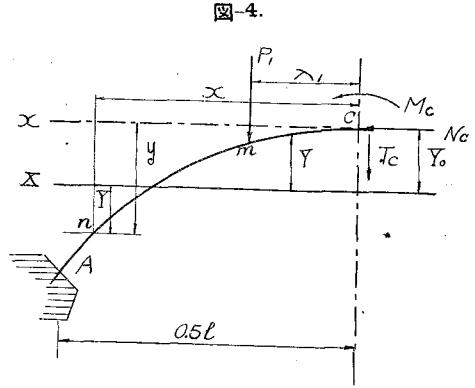
$$N: \text{圧力} \dots \dots (+) \quad \text{張力} \dots \dots (-)$$

圖-3.



- M: 拱環下面に応張力を生ずるもの……………(+)
- 拱環下面に応圧力を生ずるもの……………(-)
- T: 拱環横断面に下向に作用する剪断力……………(+)
- 拱環横断面に上向に作用する剪断力……………(-)

N_c 及 M_c は拱の左半分に対して (+) であるならば右半分に對しても (+) であるが, T_c は左半に對し (+) であれば右半に對しては (-) となる。拱軸上の任意の 1 點を n とし拱頂を原點とする n 點の横, 縦距を x, y とすれば此の n 點の軸圧力, 曲げモーメント及剪断力は次の如く表はせる (圖-4 参照)。



拱の左半分

$$\left. \begin{aligned} N &= N_c \cos \varphi + T_c \sin \varphi + P_1 \sin \varphi \\ M &= M_c + N_c y - T_c x - P_1(x - \lambda_1) \\ T &= -N_c \sin \varphi + T_c \cos \varphi + P_1 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (J)$$

拱の右半分

$$\left. \begin{aligned} N &= N_c \cos \varphi - T_c \sin \varphi + P_2 \sin \varphi \\ M &= M_c + N_c y + T_c x - P_2(x - \lambda_2) \\ T &= -N_c \sin \varphi - T_c \cos \varphi + P_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (J')$$

是等による仕事は夫々

$$\frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EA}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI}, \quad \frac{1}{2} \beta \int \frac{T^2 ds}{GA}$$

であるが此の外に温度変化に基く仕事を考へねばならぬ。温度変化は之を t で表はし ϵ を以てコンクリートの膨脹係數とし, 拱環の全部に亘りて均一に t なる変化が起りたる時の仕事は

$$\text{温度上昇: } - \int N e t ds, \quad \text{温度下降: } + \int N e t ds$$

である。但 N は圧力とする。是等を綜合した拱の全仕事の量 W は次の如くである。

$$W = \int_c^A \left[\frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + \beta \frac{T^2}{GA} \right) \mp N e t \right] ds + \int_c^B \left[\frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + \beta \frac{T^2}{GA} \right) \mp N e t \right] ds$$

之を N_c, M_c, T_c に就きて別々に微分すれば Least work の法則に依て夫々の結果は零となる。

$$(I) \quad \frac{\partial W}{\partial N_c} = \int_c^A \left(\frac{N}{A} \frac{\partial N}{\partial N_c} + \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial N_c} + \beta \frac{E}{G} \frac{T}{A} \frac{\partial T}{\partial N_c} \mp E \frac{\partial N}{\partial N_c} e t \right) ds + \int_c^B \left(\frac{N}{A} \frac{\partial N}{\partial N_c} + \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial N_c} + \beta \frac{E}{G} \frac{T}{A} \frac{\partial T}{\partial N_c} \mp E \frac{\partial N}{\partial N_c} e t \right) ds = 0$$

$$(II) \quad \frac{\partial W}{\partial M_c} = \int_c^A \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial M_c} ds + \int_c^B \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial M_c} ds = 0$$

$$(III) \quad \frac{\partial W}{\partial T_c} = \int_c^A \left(\frac{N}{A} \frac{\partial N}{\partial T_c} + \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial T_c} + \beta \frac{E}{G} \frac{T}{A} \frac{\partial T}{\partial T_c} \right) ds + \int_c^B \left(\frac{N}{A} \frac{\partial N}{\partial T_c} + \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial T_c} + \beta \frac{E}{G} \frac{T}{A} \frac{\partial T}{\partial T_c} \right) ds = 0$$

是等に對し (J) 及 (J') の値を代入する, 但 P_1 及 P_2 を含む項の積分限界は負荷點 m 又は m' より拱端 A 又

は B に至る間である。備考 図-4 は拱の左半のみを示し右半を省略した。

$$(I') \quad 2N_c \int_c^A \left(\frac{\cos^2 \varphi}{A} + \frac{y^2}{I} + \beta \frac{E \sin^2 \varphi}{G A} \right) ds + 2M_c \int_c^A \frac{y ds}{I} \\ + P_1 \int_m^A \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{A} - \frac{(x-\lambda_1)y}{I} - \beta \frac{E \sin \varphi \cos \varphi}{G A} \right] ds \\ + P_2 \int_{m'}^B \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{A} - \frac{(x-\lambda_2)y}{I} - \beta \frac{E \sin \varphi \cos \varphi}{G A} \right] ds \mp 2E\epsilon t \int_c^A \cos \varphi ds = 0$$

$$(II') \quad 2N_c \int_c^A \frac{y ds}{I} + 2M_c \int_c^A \frac{ds}{I} - P_1 \int_m^A \frac{(x-\lambda_1) ds}{I} - P_2 \int_{m'}^B \frac{(x-\lambda_2) ds}{I} = 0$$

$$(III') \quad 2T_c \int_c^A \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{x^2}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right) ds + P_1 \int_m^A \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{(x-\lambda_1)x}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right) ds \\ - P_2 \int_{m'}^B \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{(x-\lambda_2)x}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right) ds = 0$$

(I') 及 (II') より

$$N_c = \frac{\left[\int_m^A \frac{P_1(x-\lambda_1)y ds}{I} + \int_{m'}^B \frac{P_2(x-\lambda_2)y ds}{I} + \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \int_m^A \frac{P_1 \sin \varphi \cos \varphi ds}{A} + \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \int_{m'}^B \frac{P_2 \sin \varphi \cos \varphi ds}{A} \right] \\ \times \int_c^A \frac{ds}{I} - \left[\int_m^A \frac{P_1(x-\lambda_1) ds}{I} + \int_{m'}^B \frac{P_2(x-\lambda_2) ds}{I} \right] \times \int_c^A \frac{y ds}{I} \mp 2E\epsilon t \int_c^A \cos \varphi ds \times \int_c^A \frac{ds}{I}}{2 \left[\int_c^A \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \varphi}{A} + \beta \frac{E \sin^2 \varphi}{G A} \right) ds \times \int_c^A \frac{ds}{I} - \left(\int_c^A \frac{y ds}{I} \right)^2 \right]} \quad \dots \dots \dots (K)$$

(II') より

$$M_c = \frac{P_1 \int_m^A \frac{(x-\lambda_1) ds}{I} + P_2 \int_{m'}^B \frac{(x-\lambda_2) ds}{I}}{2 \int_c^A \frac{ds}{I}} - N_c \times \frac{\int_c^A \frac{y ds}{I}}{\int_c^A \frac{ds}{I}} \quad \dots \dots \dots (K')$$

(III') より

$$T_c = \frac{-P_1 \int_m^A \left[\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{(x-\lambda_1)x}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right] ds + P_2 \int_{m'}^B \left[\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{(x-\lambda_2)x}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right] ds}{2 \int_c^A \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{x^2}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right) ds} \quad \dots \dots \dots (K'')$$

N_c , M_c , 及 T_c の影響線を作る目的に對しては對稱拱に於ては拱頂より左半若しくは右半のいづれか一方のみを考へればよい, 従つて今左半のみを採るものとすれば各式中の P_2 に關する項は全部省略せられ, 又 $P_1=1$ とするから各式は次の如き形となる。

$$N_c = \frac{\int_m^A \left[\frac{(x-\lambda_1)y}{I} + \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{A} \right] ds \times \int_c^A \frac{ds}{I} - \int_m^A \frac{(x-\lambda_1) ds}{I} \times \int_c^A \frac{y ds}{I} + 2E\epsilon t \int_c^A \cos \varphi ds \times \int_c^A \frac{ds}{I}}{2 \left[\int_c^A \left(\frac{y^2}{I} + \frac{\cos^2 \varphi}{A} + \beta \frac{E \sin^2 \varphi}{G A} \right) ds \times \int_c^A \frac{ds}{I} - \left(\int_c^A \frac{y ds}{I} \right)^2 \right]}$$

$$M_c = \frac{\int_m^A \frac{(x-\lambda_1) ds}{I}}{2 \int_c^A \frac{ds}{I}} - N_c \times \frac{\int_c^A \frac{y ds}{I}}{\int_c^A \frac{ds}{I}}$$

$$T_c = \frac{-\int_m^A \left[\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{(x-\lambda_1)x}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right] ds}{2 \int_c^A \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{x^2}{I} + \beta \frac{E \cos^2 \varphi}{G A} \right) ds}$$

今水平軸を拱頂から Y_0 だけ下げると横距 x は其のまゝであるが縦距は Y となり、 $Y=y-Y_0$ であるから Y は一部は (+), 一部は (-) となる爲

$$\int_c^A \frac{Y ds}{I} = 0$$

となる場合があり得る譯である。即ち

$$\int_c^A \frac{Y ds}{I} = \int_c^A \frac{(y-Y_0) ds}{I} = 0 \quad \therefore Y_0 = \int_c^A \frac{y ds}{I} + \int_c^A \frac{ds}{I}$$

の如く x 軸を下ぐれば

$$\int_c^A \frac{Y ds}{I} = 0$$

となる。一方に於て $y=Y_0+Y$ として之を N_c 及 M_c の式に代入し $\int_c^A \frac{Y ds}{I} = 0$ とすれば

$$N_c = \frac{\int_m^A \left[\frac{(x-\lambda_1)Y}{I} + \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{A} \right] ds \pm 2Eet \int_c^A \cos \varphi ds}{2 \int_c^A \left(\frac{Y^2}{I} + \frac{\cos^2 \varphi}{A} + \beta \frac{E \sin^2 \varphi}{G A} \right) ds}$$

$$M_c = \frac{\int_m^A \frac{(x-\lambda_1) ds}{I}}{2 \int_c^A \frac{ds}{I}} - N_c \times Y_0$$

となり、 T_c には変化はない。 $ds = dx / \cos \varphi = \sec \varphi dx$ であるから之を各式に當てはめると積分の限界 $C \sim A$ は $0 \sim l/2$ となり又 $m \sim A$ は $\lambda_1 \sim l/2$ となるから

$$N_c = \frac{\int_{\lambda_1}^{l/2} \left[\frac{(x-\lambda_1) \sec \varphi Y}{I} + \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\sin \varphi}{A} \right] dx \pm Eetl}{2 \int_0^{l/2} \left[\frac{Y^2 \sec \varphi}{I} + \frac{\cos \varphi}{A} + \beta \frac{E}{G} \left(\frac{\sec \varphi}{A} - \frac{\cos \varphi}{A} \right) \right] dx}$$

$$M_c = \frac{\int_{\lambda_1}^{l/2} \frac{(x-\lambda_1) \sec \varphi dx}{I}}{2 \int_0^{l/2} \frac{\sec \varphi dx}{I}} - N_c \times Y_0$$

$$T_c = \frac{\int_{\lambda_1}^{l/2} \left[\left(\frac{\sec \varphi}{A} - \frac{\cos \varphi}{A} \right) + \frac{(x-\lambda_1)x \sec \varphi}{I} + \beta \frac{E \cos \varphi}{G A} \right] dx}{2 \int_0^{l/2} \left[\left(\frac{\sec \varphi}{A} - \frac{\cos \varphi}{A} \right) + \frac{x^2}{I} + \beta \frac{E \cos \varphi}{G A} \right] dx}$$

となる。更に是等の式に於て

$$x = kl, \quad dx = ldk, \quad \lambda_1 = km, \quad A = 1.12 \cos^2 l, \quad I = 0.103 \cos^2 l^3$$

$$y = \gamma l, \quad Y_0 = \gamma c' l, \quad \therefore Y = y - Y_0 = (\gamma - \gamma c') l = \nu l$$

とすれば、積分の限界 $0 \sim l/2$ は $0 \sim 0.5$ となり又 $\lambda_1 \sim l/2$ は $km \sim 0.5$ となるから

$$N_c = \frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{(k-k_m) \nu \sec \varphi}{\alpha^3} + \frac{0.103}{1.12} \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\sin \varphi}{\alpha} \right] dk \pm 0.103 Eetl^2}{2 \int_0^{0.5} \left[\frac{\nu^2 \sec \varphi}{\alpha^3} - \frac{0.103}{1.12} \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{0.103}{1.12} \beta \frac{E \sec \varphi}{G \alpha} \right] dk}$$

$$M_c = \left[\frac{\int_{k_m}^{0.5} \frac{(k-k_m) \sec \varphi dk}{\alpha^3} - N_c \times \gamma_c' \right] \times l$$

$$T_c = \frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{(k-k_m)k \sec \varphi}{\alpha^3} + \frac{0.103}{1.12} \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{0.103 \sec \varphi}{1.12 \alpha} \right] dk}{2 \int_0^{0.5} \left[\frac{k^2 \sec \varphi}{\alpha^3} + \frac{0.103}{1.12} \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{0.103 \sec \varphi}{1.12 \alpha} \right] dk}$$

若し $\frac{0.103}{1.12} = \gamma_1$, $\frac{0.103}{1.12} \beta \frac{E}{G} = \gamma_2$, $\frac{0.103}{1.12} \left(\beta \frac{E}{G} - 1 \right) = \gamma_3$ とせば

$$N_c = \frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{k v \sec \varphi}{\alpha^3} - k_m \frac{v \sec \varphi}{\alpha^3} + \gamma_3 \frac{\sin \varphi}{\alpha} \right] dk \pm 0.103 E c \epsilon t^2}{2 \int_0^{0.5} \left[\frac{v^2 \sec \varphi}{\alpha^3} - \gamma_3 \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \gamma_2 \frac{\sec \varphi}{\alpha} \right] dk} \dots\dots\dots (L)$$

$$M_c = \left[\frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{k \sec \varphi}{\alpha^3} - k_m \frac{\sec \varphi}{\alpha^3} \right] dk}{2 \int_0^{0.5} \frac{\sec \varphi}{\alpha^3} dk} - N_c \times \gamma_c' \right] \times l \dots\dots\dots (L')$$

$$T_c = - \frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{k^2 \sec \varphi}{\alpha^3} - k_m \frac{k \sec \varphi}{\alpha^2} + \gamma_3 \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \gamma_1 \frac{\sec \varphi}{\alpha} \right] dk}{2 \int_0^{0.5} \left[\frac{k^2 \sec \varphi}{\alpha^3} + \gamma_3 \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \gamma_1 \frac{\sec \varphi}{\alpha} \right] dk} \dots\dots\dots (L'')$$

となる。温度の変化に依りて生ずる N_c を N_{ct} として之を (L) の式より分離し且 $cl = B$ と書改めて N_a の式を次の如く定める。

$$N_{ct} = \pm \frac{0.103 E B \epsilon t l}{2 \left[\int_0^{0.5} \frac{v^2 \sec \varphi dk}{\alpha^3} - \gamma_3 \int_0^{0.5} \frac{\cos \varphi dk}{\alpha} + \gamma_2 \int_0^{0.5} \frac{\sec \varphi dk}{\alpha} \right]} \dots\dots\dots (M)$$

N_c , M_c 及 T_c の値を計算する場合に拱環圧縮の影響及剪断力の作用を省略するならば不静定条件の計算式は次の如く極めて簡単な形となる。

$$N_c = \frac{\int_{k_m}^{0.5} \left[\frac{k v \sec \varphi}{\alpha^3} - k_m \frac{v \sec \varphi}{\alpha^3} \right] dk}{2 \int_0^{0.5} \frac{v^2 \sec \varphi dk}{\alpha^3}} \dots\dots\dots (N)$$

$$N_{ct} = \pm \frac{0.103 E B \epsilon t l}{2 \int_0^{0.5} \frac{v^2 \sec \varphi dk}{\alpha^3}} \dots\dots\dots (N')$$

$$T_c = - \frac{\int_{k_m}^{0.5} \frac{k^2 \sec \varphi dk}{\alpha^3} - k_m \int_{k_m}^{0.5} \frac{k \sec \varphi dk}{\alpha^3}}{2 \int_0^{0.5} \frac{k^2 \sec \varphi dk}{\alpha^3}} \dots\dots\dots (N'')$$

M_c は (L') と同一なるを以て省略する。

拱頂に起る曲げモーメント M_c は (K') 又は (L') の式に於て見るが如く其の第 1 項は垂直荷重直接の影響であり第 2 項は拱頂に N_c なる軸圧力の存在する事に依りて生ずる曲げモーメントである、従つて温度の変化に基づき拱頂に N_{ct} なる軸圧力若しくは軸張力が起れば夫に伴ふ曲げモーメント M_{ct} が拱頂に於て作用する事になる譯である。即ち t なる温度変化に由る拱頂の曲げモーメントは、

$$M_{ct} = \mp N_{ct} \frac{\int_0^l \frac{y dx}{I \cos \varphi}}{\int_0^l \frac{dx}{I \cos \varphi}} \quad \text{又は} \quad M_{ct} = \mp N_{ct} \times \gamma c' l \dots \dots \dots (O)$$

但し温度上昇の時は N_{ct} は軸圧力で M_{ct} は (-) となり降下の場合は N_{ct} は軸張力で M_{ct} は (+) となる。

N_c, M_c, T_c の各式に於て $v, \alpha, \sin \varphi, \cos \varphi,$ 及 $\sec \varphi$ は悉く k の函數として表はし得るけれ共實際の積分は極めて困難であるから種々なる假定をなして積分を可能ならしむるか若しくは有限數の和を求むる形として近似値を得る程度に於て満足しなければならぬ。今迄普通に行はれて居る假定は $I \cos \varphi = \text{const.} = I_c$ であつて I_c は拱頂に於ける拱環横断面の慣性モーメントである。此の場合に於ては $A \cos \varphi$ は一定とならず、即ち $A \cos \varphi = A_c$ (拱頂横断面積) とならぬから同時に軸圧力及剪断力の影響を考慮に入れる事は無理であり、従つて是等を省略した式を用ゆべきである。今 $I = 0.103 B \alpha^3 l^3$ 及 $I_c = 0.103 B \alpha c^3 l^3$ であるとすれば $I \cos \varphi = I_c$ なる假定の下に

$$\frac{1}{I \cos \varphi} = \frac{\sec \varphi}{0.103 B \alpha^3 l^3} = \frac{1}{I_c} = \frac{1}{0.103 B \alpha c^3 l^3} \quad \therefore \quad \frac{\sec \varphi}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha c^3} \quad \text{であるから}$$

$$N_c = \frac{\int_{k_m}^{0.5} k v dk - k_m \int_{k_m}^{0.5} v dk}{2 \int_0^{0.5} v^2 dk}, \quad N_{ct} = \pm \frac{0.103 B \alpha c^3 E \ell l}{2 \int_0^{0.5} v^2 dk}$$

$$M_c = \left[\frac{\int_{k_m}^{0.5} k dk - k_m \int_{k_m}^{0.5} dk}{2 \int_0^{0.5} dk} - \gamma c' \times N_c \right] l = [(0.125 + 0.5 k_m^2 - 0.5 k_m) - N_c \times \gamma c'] l$$

$$T_c = - \frac{\int_{k_m}^{0.5} k^2 dk - k_m \int_{k_m}^{0.5} k dk}{2 \int_0^{0.5} k^2 dk} = -(0.5 + 2 k_m^3 - 1.5 k_m)$$

の如き極めて簡単な形を以て N_c, M_c, T_c を表はす事が出来、parabola, circle 及 transformed catenary 共に全部積分し得る事となるけれ共此の假定に従へば、

$$I \cos \varphi = 0.103 B D^3 \cos \varphi = I_c = 0.103 B D_c^3 \quad \therefore \quad D = D_c \sqrt[3]{\sec \varphi}$$

となるから起拱點の拱環の厚さを D_s , 其の傾斜を φ_s とすれば $D_s = D_c \sqrt[3]{\sec \varphi_s}$ となり従つて $D_c = 1.0$ とした場合 $D_s = \sqrt[3]{\sec \varphi_s}$ で其の値を 3 種の曲線に就きて求めて見れば 表-3 の通りで、支間及拱矢が同一であつても曲線の形の異なる事に依り D_s は異り、従つて拱環全体の厚さに相當の差ある事を示し、又 $m = f/l$

が小なる拱に於ては勿論、 m が極めて大なるものでも D_c に對する D_s の増加は甚小であり、無鉸拱橋の拱環としては不適當な形である。故に $I \cos \varphi = I_c$ とする事は不當ではあるが、與へられたる拱の N_c, M_c, T_c の影響線が如何なるものかの概念を得る爲、若しくは $I \cos \varphi$ が変化する場合とを比較するが如き目的の爲には

$I \cos \varphi = I_c$ として簡単に N_c, M_c, T_c の値を求めて見る事も必ずしも無用では無い。従つて茲に parabola, circle,

表-3.

$$D_c = 1.0, \quad D_s = \sqrt[3]{\sec \varphi_s}, \quad m = f/l$$

$m = f/l$	Parabola		Circle		T. Catenary	
	$\sec \varphi_s$	$\sqrt[3]{\sec \varphi_s}$	$\sec \varphi_s$	$\sqrt[3]{\sec \varphi_s}$	$\sec \varphi_s$	$\sqrt[3]{\sec \varphi_s}$
0.1	1.077	1.025	1.083	1.027	1.109	1.035
0.2	1.281	1.086	1.381	1.114	1.461	1.135
0.3	1.562	1.160	2.130	1.286	2.000	1.260
0.4	1.887	1.236	4.572	1.660	2.641	1.382

但し Transformed Catenary に於ては $d_c = \xi l = 0.065 l$ とする。

及 transformed catenary の 3 種に就き此の假定の下に N_c 、及 M_c の影響線を作るに必要な諸項の積分を求めて其の結果を 表-4 に示す。

表-4.

積 分	Parabola	Circle	Transformed Catenary
$Y_0 = \frac{\int y dx}{\int dx} = \gamma c' l$	$\frac{1}{3} ml$	$\left(n - \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} - n^2 \sin^{-1} \frac{1}{2n} \right) l$	$\frac{\xi}{\beta} (\sinh \beta - \beta) l$
$2 \int_0^{0.5} v^2 dk$	$\frac{4}{45} m^2$	$\gamma c' (2n - \gamma c') - \frac{1}{12}$	$\frac{\xi^2}{\beta} \left[\frac{1}{2} \sinh \beta (\cosh \beta - 4) + 1.5\beta \right] - (\gamma c')^2$
$\int_{k_m}^{0.5} (k - k_m) v dk$	$\frac{m}{48} (1 - 4k_m^2)^2$	$\frac{1}{8} (n - \gamma c') + \frac{1}{3} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$ $+\frac{1}{2} k m \left(n - k m \sqrt{n^2 - k m^2} - n^2 \sin^{-1} \frac{k m}{n} \right)$ $-\frac{1}{3} (n^2 - k m^2) \sqrt{n^2 - k m^2} - \frac{1}{2} (n + \gamma c') k m^2$	$\frac{\xi}{4\beta^2} (\beta \sinh \beta - \cosh \beta)$ $+\frac{\xi}{4\beta^2} \cosh 2\beta k m$ $-\frac{1}{8} (\xi + \gamma c') (1 + 4k m^2)$

$I \cos \varphi$ 及 $A \cos \varphi$ が変ずるものとした時 N_c, M_c, T_c の各項の積分が困難であり、又 $I \cos \varphi, A \cos \varphi$ にある假定の値をあてはむる事は積分を可能ならしむるも却て N_c, M_c, T_c の値を不正確ならしめると云ふ點から從來積分の代りに有限数の和を求める形に於て拱の計算が行はれて居る。拱計算に必要な各積分の式を次の如く書いて見る。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w dk, & \int \frac{\gamma \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w \gamma dk, & \int \frac{v \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w v dk, \\ \int \frac{v^2 \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w v^2 dk, & \int \frac{k v \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w k v dk, & \int \frac{k \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w k dk, \\ \int \frac{k^2 \sec \varphi}{\alpha^3} dk &= \int w k^2 dk, & \int \frac{\cos \varphi}{\alpha} dk &= \int w n dk, & \int \frac{\sin \varphi}{\alpha} dk &= \int w dk, \\ \int \frac{\sec \varphi}{\alpha} dk &= \int w \gamma dk \end{aligned}$$

w 及 k は無名数であるが k を横距とし w を縦距として図形を畫けば夫は w の変化を表はす図形となり $w dk$ は dk なる長さに対する w -図形の面積となるから

$$\int_0^{0.5} w dk$$

は拱頂より拱端に至る間、即ち 1/2 支間に對する図形の全面積となる。 dk の代りに Δk なる有限の長さを考ふれば

$$\int_0^{0.5} w dk = \sum w \Delta k$$

であり、 $w \Delta k$ は Δk なる長さに対する図形の面積であつて之を W とすれば

$$\int_0^{0.5} w dk = \sum_0^{n-1} W = (W_0 + W_1 + \dots + W_{n-2} + W_{n-1})$$

とする事が出来る。但し n は拱支間の 1/2 を Δx なる區分に分けた數であり、 $\Delta x = \Delta k \times l$ である。 W_0 は拱頂に於ける第 1 區分 Δk_0 に對する図形の面積であり、 W_{n-1} は拱端に於ける最終の區分 Δk_{n-1} に對する w -図形

の面積である。又

$$\int_{k_m}^{0.5} w \cdot dk = \sum_m^{n-1} W$$

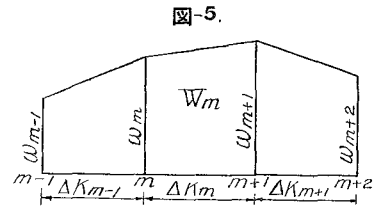
は拱頂より數へて第 m 番目の W_m から拱端の W_{n-1} までの總和である。之に由て N_c, M_c, T_c の式は次の如く表はされる。

$$N_c = \frac{\sum_m^{n-1} W_e - k_m \sum_m^{n-1} W_c + \gamma_3 \sum_m^{n-1} W_i}{2 \left[\sum_0^{n-1} W_a - \gamma_3 \sum_0^{n-1} W_h + \gamma_2 \sum_0^{n-1} W_j \right]} \dots\dots\dots (P_1)$$

$$M_c = \left[\frac{\sum_m^{n-1} W_f - k_m \sum_m^{n-1} W_a}{2 \sum_0^{n-1} W_a} - N_c \times \gamma_c' \right] \times l, \quad \gamma_c' = \frac{\sum_0^{n-1} W_b}{\sum_0^{n-1} W_a} \dots\dots\dots (P_2)$$

$$T_c = - \frac{\sum_m^{n-1} W_g - k_m \sum_m^{n-1} W_j + \gamma_3 \sum_m^{n-1} W_h + \gamma_1 \sum_m^{n-1} W_i}{2 \left[\sum_0^{n-1} W_a + \gamma_3 \sum_0^{n-1} W_h + \gamma_1 \sum_0^{n-1} W_j \right]} \dots\dots\dots (P_3)$$

$w \cdot \Delta k$ は Δk に對する w -図形の面積であるが實際に此の面積を求むるには任意の Δk の兩端に於ける w_m 及 w_{m+1} の平均値に Δk を乗じて求める、即ち W を梯形の面積とするのである、例へば W_m を求むるには (図-5 参照)



$$W_m = \frac{w_m + w_{m+1}}{2} \times \Delta k_m = (w_m + w_{m+1}) \frac{\Delta k_m}{2}$$

である。若し支間の $1/2$ を Δx に分ける時に之を n 等分したとすれば各區分に對し Δk は一定となり従つて $\Delta k/2$ は全部の W に共通であるから N_c, M_c, T_c を計算する式の分母、分子に $\Delta k/2$ が共通となつて省略されるから W_m の計算には $\Delta k/2$ を乗ずる事は不用である。即ち

$$W_m = w_m + w_{m+1}$$

とすればよい。然し N_{ct} の式には分子に $\Delta k/2$ が含まれて居らぬから W を前述の如く計算したとすれば、 N_{ct} の式は次の如く表はされる。

$$N_{ct} = \pm \frac{0.103 EBelt}{2 \times \frac{\Delta k}{2} \left[\sum_0^{n-1} W_a - \gamma_3 \sum_0^{n-1} W_h + \gamma_2 \sum_0^{n-1} W_j \right]}$$

$$= \pm \frac{0.103 EBelt}{\Delta k \left[\sum_0^{n-1} W_a - \gamma_3 \sum_0^{n-1} W_h + \gamma_2 \sum_0^{n-1} W_j \right]} \dots\dots\dots (P_4)$$

又は

$$N_{ct} = \pm \frac{0.103 EBelt}{\Delta k \sum_0^{n-1} W_a} \dots\dots\dots (P_5)$$

である。若し Δk を一定に取るものとすれば W の總和を求むるのに W_0, W_1, W_2 等を別々に計算して其の和を求むる必要なく拱頂に於ける w_0 及拱端の w_n の 1 倍と中間の全部の w を 2 倍したものと和を取ればよい、即ち次の通りである。

$$\sum_0^{n-1} W = w_0 + 2(w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{n-1}) + w_n$$

7. 不静定条件計算式に對する結論 對稱拱の拱頂に於ける不静定条件 N_c, M_c, T_c を計算する式に就きては 6. に詳述した通りであるが其の特長と認むる點を列挙すれば

- (a) 支間 l , 拱矢 f を其のまま用ひずして其の比 $f/l = m$ を用ひる事
- (b) 拱環横断面積 A 及其の慣性モーメント I を [4] の如く定むる事に由り $1/(A \cos \varphi)$ の代りに $\sec \varphi / \alpha$ を, $1/(I \cos \varphi)$ の代りに $\sec \varphi / \alpha^3$ 用ひる事とした事
- (c) 拱環圧縮の影響は勿論, 剪断力の影響を考慮した事
- (d) 計算式 (P) に於て $w \times \Delta k = W$ は Δk を底邊とした梯形の面積とし事た

等であるが (a) に由る利點は l 及 f の其のままの値を用ひないからすべての計算が簡單化せらるゝのは勿論, l 及 f の値の如何に關はず其の比 m が同一であるならば拱軸線の縦距に對する係數 γ は同一となるから計算を流用する範圍が擴大する。

(b) に就きては A 及 I の實際の値を用ひるよりも拱環の厚さに關する係數 α 及其の 3 乗を用ひる方が計算が著しく容易である事は云ふ迄もなく, 其の上に, A と I との關係が明瞭になり實地計算に便利を與へる。例へば $D_c : D_s :: 1 : 2$ なるが如き拱に於て $D_c = \alpha c l = 0.03 l$, $D_s = \alpha s l = 0.06 l$ とした時と $\alpha' c = 0.027$, $\alpha' s = 0.054$ とした場合とに於て任意點の拱環の厚さの係數の割合は $\alpha : \alpha' :: 0.03 : 0.027$ となり従つて $\alpha' = 0.9 \alpha$ となるのであるが (図式的に肯定したもので計算に由り決定したものではない)。是に依りて不静定条件の計算式に如何なる變化が起るかと云ふに A に對しては α の代りに 0.9α , I に對しては α^3 の代りに $(0.9 \alpha)^3$ を用ひる事になるから結局計算式の $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ に $(0.9)^3 = 0.729$ を乗ずればよいのである。故に m と D_c/D_s が同じであれば拱環の厚さが變つても容易に N_c, M_c, T_c の値を換算し得る事になる。若し拱環の圧縮及剪断力の影響を省略するならば前述の如き條件の下に於て拱環の厚さが變化しても只 N_{ct} が変わるだけで N_c, M_c, T_c の値に變化が起らぬ事が明かに認められる。又從來拱の計算に於て $I \cos \varphi = I_c$, $A \cos \varphi = A_c$ なる關係が同時に成立するものと假定する事が普通に行はれて居るけれ共, 是は (b) に依り $\alpha^3 \cos \varphi = \alpha c$ 及 $\alpha \cos \varphi = \alpha c$ が同時に成立する事を意味し理論上正當でない事が解かる。

(c) の拱環の圧縮及剪断力の影響の問題に就きては是等を考慮せる時の値に對し, 考慮せざる場合の差異は一般に小で, 一面より見れば是等を取入れる必要は無い様に見えるけれ共, 又一面より見れば拱頂に於ける応力の僅かの變化が拱の他の部分の応力に相當大なる變化を起す事を思ふと, 是等の影響を無視する事は正當でないと考えられる。此の點に就き參考の爲下記條件に依る, parabola, circle, 及 transformed catenary の 3 種の拱の N, M, T の影響線の面積並に拱頂に於ける温度応力 N_{ct} を計算した結果を表-5 に示す。

1. 條件

$$f/l = m = 0.3, \quad D_c = \alpha c l = 0.03 l, \quad D_s = \alpha s l = 0.06 l, \quad D_c/D_s = 1/2, \quad A = 1.12 c \alpha l^2, \quad I = 0.103 c \alpha^3 l^4$$

2. 記號

N, M, T, N_{ct} : 拱環圧縮及剪断力を考慮に入れ且 $A = 1.12 c \alpha l^2$, $I = 0.103 c \alpha^3 l^4$ を用ひて計算せる応力。

N', M', T', N_{ct}' : 拱環圧縮及剪断力を考慮せず且 $I = 0.103 c \alpha^3 l^4$ として計算せる応力。

N'', M'', T'', N_{ct}'' : $I \cos \varphi = I_c$ とし積分に依りて求めた応力。但此の假定に於ては, $D_s = 0.06 l$ でなくして parabola にありては $0.0348 l$, circle に於ては $0.0385 l$, transformed catenary では $0.0378 l$ である。

N_c, M_c, T_c : 拱頂応力。

N_0, M_0, T_0 : 拱頂より $0.3l$ なる横距にあたる點の応力。

N_s, M_s, T_s : 拱端応力。

表-5. 応力影響線面積及拱頂温度応力

曲線種類	応力正負	Parabola		Circle		T. Catenary	
		(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)
1	N_c	0.3998 5		0.4331 8		0.4305 9	
	N_c'	0.4094 5		0.4445 0		0.4427 2	
	N_c''	0.4167 0		0.4424 5		0.4396 1	
2	M_c	0.0045 1	0.0032 6	0.0064 1	0.0026 3	0.0066 8	0.0020 6
	M_c'	0.0041 9	0.0035 1	0.0063 0	0.0028 9	0.0062 7	0.0023 5
	M_c''	0.0055 0	0.0052 8	0.0076 3	0.0039 2	0.0089 9	0.0034 5
3	T_c	0.0835 5	0.0835 5	0.0851 6	0.0851 6	0.0847 6	0.0847 6
	T_c'	0.0833 8	0.0833 8	0.0850 0	0.0850 0	0.0846 1	0.0846 1
	T_c''	0.0940 8	0.0940 8	0.0940 8	0.0940 8	0.0940 8	0.0940 8
4	N_0	0.4997 6		0.5263 4		0.5242 4	
	N_0'	0.5076 0		0.5356 5		0.5345 0	
	N_0''	0.5134 2		0.5341 9		0.5318 7	
5	M_0	0.0051 5	0.0057 3	0.0049 4	0.0089 5	0.0048 9	0.0106 0
	M_0'	0.0051 9	0.0051 8	0.0049 4	0.0086 2	0.0049 1	0.0102 5
	M_0''	0.0074 6	0.0072 4	0.0066 7	0.0099 5	0.0063 9	0.0109 7
6	T_0	0.0758 4	0.0659 5	0.0843 7	0.0591 8	0.0849 7	0.0602 5
	T_0'	0.0738 6	0.0696 0	0.0819 4	0.0627 4	0.0822 7	0.0642 1
	T_0''	0.0667 3	0.0667 0	0.0784 0	0.0559 0	0.0782 7	0.0588 7
7	N_s	0.6401 0		0.6445 0		0.6482 1	
	N_s'	0.6430 3		0.6503 3		0.6544 0	
	N_s''	0.6508 9		0.6494 0		0.6528 2	
8	M_s	0.0203 6	0.0243 6	0.0278 5	0.0191 0	0.0278 6	0.0190 4
	M_s'	0.0221 1	0.0236 0	0.0301 8	0.0184 8	0.0300 4	0.0183 2
	M_s''	0.0172 1	0.0170 0	0.0249 5	0.0135 2	0.0251 4	0.0133 2
9	T_s	0.1397 2	0.1268 3	0.0767 8	0.2236 8	0.0843 9	0.2072 9
	T_s'	0.1384 0	0.1329 5	0.0760 4	0.2329 0	0.0834 4	0.2168 8
	T_s''	0.1259 6	0.1259 3	0.0688 2	0.2239 3	0.0763 4	0.2071 4
10	N_{ct}	0.0009 01	<i>EBell</i>	0.0008 54	<i>EBell</i>	0.0009 66	<i>EBell</i>
	N_{ct}'	0.0009 36	<i>EBell</i>	0.0008 87	<i>EBell</i>	0.0010 06	<i>EBell</i>
	N_{ct}''	0.0003 48	<i>EBell</i>	0.0003 96	<i>EBell</i>	0.0003 91	<i>EBell</i>

備考: 影響線の實際の面積計算には N 及 T に対しては l を M に対しては l^2 を乗する事を要す。Transformed Catenary に於ては $d_c = \xi l = 0.063l$ とする。

従来行はれて居る拱の計算に於て拱環圧縮の影響を計算式の分母にのみ取入れ、分子に對しては之を省略する事が多い様であるが之は誤差を大ならしむるものと思はれる。

(d) の $w \times \Delta k = W$ の計算に於て Δk を底邊とする梯形の面積を以てする事が便利であると云ふ事の意味は、 W を區分點に於て集中する荷重とするよりも計算が容易であると云ふ事であつて、面積とすれば

$$W_m = \frac{\Delta k}{2}(w_m + w_{m+1})$$

であり、集中荷重とすれば

$$W_m = \frac{\Delta k}{6}(w_{m-1} + 2w_m) + \frac{\Delta k}{6}(2w_m + w_{m+1})$$

である。但し實地計算の正確度に於ては兩者殆ど異なる所は無い。