土木学會第1回年次学術講演會講演
(応用力学之部 No. 9)

地下水不定流の新計算法

(New Method for the Calculation of Unsteady Flow of Groundwater.)

會員 本 間 仁*

1. 基本方程式 地下水の運動に關しては Darcy の法則が成立する事が一般に認められてゐるが，この法則は水の運動に對する摩擦抵抗が流速に比例する事を意味するものであつて，地下水の速度が一般に甚だ遲く勿論限界速度以下にある事よりすれば，この法則には充分な理論的根據があると言つてよい。先づ以下に用ふる記號の主なるものを擧げれば

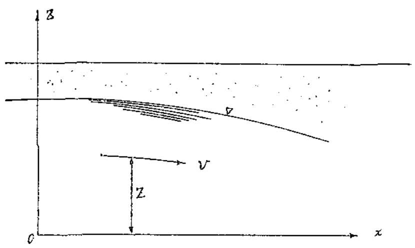
v: 地下水の流速， k: 滲透係數， Q: 或る斷面を通る流量， z: 任意の點の基準面よりの高さ，

p: この點に於ける水圧， w_0: 水の單位体積の重さ， ρ: 水の比重， μ: 水の粘性係數

v は水分子の實際の速度ではなく，流れの平均方向に垂直に小面積 ΔA を取り之を通る流量を ΔQ とする時に

$$v=\Delta Q/\Delta A$$

図-1.



にて表はしたものであつて，之に關する Darcy の法則は

$$v=-k\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{w_0}\right) \quad\cdots\cdots(1)$$

但し s は流れの方向に測る長さである。

又 k の値に關しては種々の研究があるが，此處にはこの問題には觸れず，k は常に既知の常數であると考へる。

地下水流の様な緩速度の運動に對する Navier-Stokes の一般運動方程式は

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u,\quad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v,\quad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w \quad\cdots\cdots(2)$$

速度ポテンシアルを φ とし，(2) 式の第 1 式に $\partial x/\partial s$，第2式に $\partial y/\partial s$，第 3 式に $\partial z/\partial s$ を乘じて之等を加れば

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}=\rho g\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial s}(\nabla^2\varphi)$$

從つて定流狀態に於ては

$$\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)+\frac{\mu}{\rho g}\frac{d}{ds}(\nabla^2\varphi)=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

然るに一方に於て定流に對しては Darcy の法則が成立せねばならないのであつて，之は (1) 式より

$$\frac{d\varphi}{ds}=k\frac{d}{ds}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right) \quad\cdots\cdots(4)$$

* 内務技師 工学士 内務省下關土木出張所勤務 (昭和 12 年 4 月 10 日講演)

(3)′ と (4) とが同一の式であらねばならない。その爲には次の條件が成立すればよい。

$$\mu\nabla^2 u=-\frac{\rho g}{k}u,\quad \mu\nabla^2 v=-\frac{\rho g}{k}v,\quad \mu\nabla^2 w=-\frac{\rho g}{k}w$$

之等を (2) 式に代入すれば地下水流の基本運動方程式として次式を得る。

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho g}{k}u,\quad \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\rho g}{k}v,\quad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w \cdots\cdots(5)$$

之を軸對稱の円壔座標に書き直ほせば

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\rho g}{k}v_r,\qquad \rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w \cdots\cdots(6)$$

但し v_r は r 方向の流速である。尙運動の平均方向たる s の方向の速度を v_s とすれば (5) 式より

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{g}{k}v_s-g\frac{\partial z}{\partial s} \cdots\cdots(7)$$

連續方程式の一般の形は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \cdots\cdots(8)$$

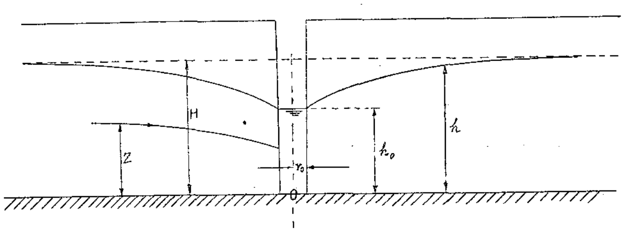
z 軸のまはりの軸對稱の場合に對しては

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial(rw)}{\partial z}=0 \cdots\cdots(9)$$

以上を以て地下水流に對して理論的な取扱ひを行ふに必要な基本方程式を導入する事が出來た。

2. 井の問題 図-2 の様な不滲透層に達する井を考へ，井の周壁は多孔質で水の滲透が全く自由なるものとする。井より一定流量 Q を絶えず汲み上げる時に，地下水面は図に示す様な狀態を保ち，地下水流は井の中心へ向ふ定流狀態にあるものと假定すれば，運動方程式は (7) 式より

図-2.



$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp}{ds}+\frac{v_s}{k}+\frac{dz}{ds}=0$$

地下水面上では $p=0$ であるから

$$v_s=-k\frac{dz}{ds},\qquad v_s^2=-kv_s\frac{dz}{ds}=-kv_z \cdots\cdots(10)$$

井の問題に於ては連續方程式は次の形にて與へる事が出來る。

$$Q=-2\pi r\int_0^h v_r dz \cdots\cdots(11)$$

h は不滲透層より地下水面までの高さであるから r の函數である。尙之に $v_r=v_z\cot\alpha$ を代入すれば

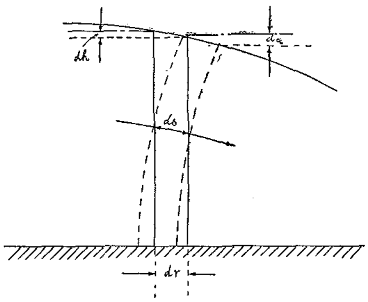
$$\frac{Q}{2\pi r}=-\int_0^h v_z\cot\alpha dz \cdots\cdots(12)$$

從來井の問題に於て一般に用ひられた方法は $d\varphi/ds=dh/dr$ と假定して (11) 式の代りに

$$Q=-2\pi rhk\frac{dh}{dr}$$

を用ふるのであるが，この假定は**図-3**に示す様に水面勾配が大きくなると誤差が大きい。

図-3.



之に對する著者の解法は (12) 式を r にて微分し

$$\frac{Q}{2\pi r^2}=[v_z\cot\alpha]_{z=h}\frac{dh}{dr}+\int_0^h\frac{\partial v_r}{\partial r}dz$$

右邊の第 1 項は水面の値を表はすものであるから水面の條件 (10) 式を代入すれば

$$v_z=-\frac{v_s^2}{k}=-k\left(\frac{dh}{ds}\right)^2$$

且つ　$\dfrac{dh}{dr}=\tan\alpha_0$　であるから

$$\frac{Q}{2\pi r^2}=-k\left(\frac{dh}{ds}\right)^2+\int_0^h\frac{\partial v_r}{\partial r}dz$$

右邊の第 2 項は直接計算し得ないが，此處で v_r が一つの鉛直線上で一樣と假定すれば

$$v_r\fallingdotseq-\frac{Q}{2\pi rh}$$

之を上の式に代入し，井内の水位を h_0，井の半徑を r_0 として計算すれば結局次の式となる[1]。

$$h^2-h_0^2=\frac{Q}{\pi k}\ln\frac{r}{r_0}+\frac{1}{H^2}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^3\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{2H^4}\left(\frac{Q}{2\pi k}\right)^5\left(\frac{1}{r_0^4}-\frac{1}{r^4}\right)\quad\cdots\cdots(13)$$

然るにこの式に於ても一般の近似解法に於けると同じ矛盾が殘されてゐる。即ち $r\to\infty$ にて $h=H$ である事は明かなるにも拘らず，(13) 式では之が成立する爲には $Q=0$ でなければならない。著者は之を以てかゝる狀態の井の周圍の地下水は定流狀態を呈する事は出來ない事を表はすものと考へる[2]。即ちこの種の井の問題は嚴密に言へば不定流として計算せねばならないのである。

3. 不定流としての井の問題　基本運動方程式は不滲透層が水平なる時は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{v_s}{k}\frac{\partial z}{\partial s}=0$$

この場合の自由水面の條件は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{v_s}{k}+\frac{\partial h}{\partial s}=0\quad\text{又は}\quad\frac{1}{2g}\frac{\partial v_s^2}{\partial t}+\frac{v_s^2}{k}+v_z=0\quad\cdots\cdots(14)$$

連續方程式は井が不滲透層に達してゐる時に，滲透層の空隙率を λ として

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\int_0^h\left(\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)dz+\frac{1}{dr}\int_h^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}v_r dz=0$$

之は近似的に次の樣に書く事が出來る。

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{r}\int_0^h v_r dz+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}=0\quad\cdots\cdots(15)$$

---

[1] この途中の誘導は土木学會誌第 21 卷第 7 號 973 頁を參照せられたい。

[2] この點は上に述べた處だけでは說明不充分であるが此處には略す。

更に今一つの條件は

$$\left[-2\pi r\int_0^h v_r dz\right]_{r=r_0}=Q(t) \quad \therefore \quad \left[\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}\right]_{r=r_0}=\frac{Q(t)}{2\pi r_0{}^2} \cdots\cdots(16)$$

以上の諸式が地下水不定流の基本式であるが，之等より直接に解答を求める事は甚だ困難であるから以下に著者の近似解法を述べる。

此の解法にて用ふる假定は dh/dr が餘り大きくないものとして

$$v_s \fallingdotseq v_r = v(r_1\ t)$$

と考へるのであつて，斯く假定すれば上述の基本式は次の様になる。

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{v}{k}=0 \cdots\cdots(17)$$

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{h}{r}v+h\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots(18)$$

自由水面にて $\quad \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{v}{k}+\dfrac{\partial h}{\partial r}=0$

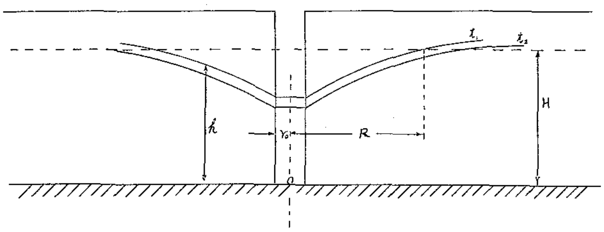
$r=r_0$ にて $\quad \left[\lambda\dfrac{\partial h}{\partial t}+h\dfrac{\partial v}{\partial r}+v\dfrac{\partial h}{\partial r}\right]_{r=r_0}=\dfrac{Q(t)}{2\pi r_0}$

不定流に對しては今一つの境界條件が必要であつて，之が各種の問題に應じて定まる。

一例として一定流量 Q を絶えず汲み出す時の水面の變化に就ては次の様に計算する。連續方程式は

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{h}{r}v+h\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial h}{\partial r}=0$$

図-4.



之に rdr を乘じて r_0 より ∞ まで積分すれば

$$\lambda\int_{r_0}^{\infty} r\frac{\partial h}{\partial t}dr+\int_{r_0}^{\infty}\frac{\partial(hrv)}{\partial r}dr=0$$

既に述べた樣に水平層上の井の問題に於ては地下水面の高さ h は $r\to\infty$ にて $h=\infty$ であるから，途中にて靜水面 $h=H$ と交る事となる。この交點を $r=R$ とすれば既に述べたる關係は $r<R$ に於てのみ成立するのであつて $r>R$ に對しては別に解かねばならない。故に連續方程式は

$$\lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}dr+\int_{r_0}^{R(t)}\frac{\partial(hrv)}{\partial r}dr=0 \cdots\cdots(19)$$

運動方程式は $\quad \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{v}{k}=-\dfrac{\partial h}{\partial r} \quad$ 但し $\quad r<R$

連續方程式 (19) を書き直ほせば $r=r_0$ にて $Q=-2\pi r_0 h_0 v_0$ であるから

$$\lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}dr+[hrv]_{r=R(t)}+\frac{Q}{2\pi}=0 \cdots\cdots(20)$$

この第 1 項は $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ がほゞ一様と假定すれば $\left[\lambda\dfrac{r^2}{2}\dfrac{dh_0}{dt}\right]_{r_0}^{R(t)}$ となるが，第 2 項は $r>R$ の部分の値より定めねばならない。$r>R$ に對する基本式は $\dfrac{\partial h}{\partial r}=0$ であるが，その代りに $v\dfrac{\partial v}{\partial r}$ を考慮に入れゝば

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{v}{k}=0 \quad \text{及び} \quad \frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}=0$$

この兩式を解けば

$$2-Ce^{\frac{g}{k}t}+r\frac{dC}{dr}e^{\frac{g}{k}t}=0$$

之が t の如何に拘らず成立せねばならないのであるが，それは不可能であるから $r>R$ にては運動方程式と連続方程式が兩立しない。故に R が擴がり地下水面に勾配を生じて始めて流れを生ずるのであつて，(20) 式中の $[hrv]_{r=R}$ は零と見做すべきである。

$$\therefore\quad \lambda\int_{r_0}^{R(t)} r\frac{\partial h}{\partial t}dr+\frac{Q}{2\pi}=0$$

この兩邊を t にて微分すれば

$$\left[r\frac{\partial h}{\partial t}\right]_{r=R}\frac{dR}{dt}+\int_0^R r\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}dr=0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

之は dR/dt を與へる式であるが實際には $\partial h/\partial t$ 及 $\partial^2 h/\partial t^2$ を求める事が困難であるから時間的變化が小さい時は水面形を近似的に

$$\frac{Q}{\pi k}\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)=H^2-h_0^2 \quad \therefore\quad R=r_0\exp\left\{\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}$$

を以て表はし之を次の近似式に代入する。

$$\lambda\left[\frac{r^2}{2}\frac{dh_0}{dt}\right]_{r_0}^{R(t)}+\frac{Q}{2\pi}=0 \quad \therefore\quad \lambda\left\{r_0^2-R^2(t)\right\}\frac{dh_0}{dt}=\frac{Q}{\pi}$$

$$\therefore\quad \frac{dh_0}{dt}=\frac{Q}{\lambda\pi}\cdot\frac{1}{r_0^2\left[1-\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}\right]} \qquad \cdots\cdots(22)$$

(22) 式は井の水面の低下する速度を表はす式であつて更に之を解けば

$$h_0+\frac{Q}{4\pi k h_0}\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t+C$$

最初の條件を $t=0$ にて $h_0=H$ とすれば

$$\frac{Q}{4\pi k}\left[\frac{1}{h_0}\exp\left\{2\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)-\frac{1}{H}\right]-(H-h_0)\right\}=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t \qquad \cdots\cdots(23)$$

之を更に $R(t)=r_0\exp\left\{\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}$ に代入すれば各瞬間に於ける R の値を求める事が出來る。