

土木学会第1回年次学術講演會講演  
(応用力学之部 No. 8)

鉛直線を軸とする渦の相似

會員 大坪喜久太郎\*

オイラー及ナビエーの運動方程式

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}, \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}, \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} \dots\dots\dots(1)$$

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v_z = \frac{dv_z}{dt} \dots\dots\dots(2)$$

中、流出渦の場合は外力として重力のみ働き、一定且つ一樣な角速度  $\omega$  を以て鉛直軸の廻りに流体が廻転して居ると看做しても、流出渦の水平自由面附近に於ては大体差支へない。此の假定の下に於て Z 軸を上向きに (+) に取れば、

$$v_x, v_y, v_z = -\omega y, \omega x, 0; \quad X, Y, Z = 0, 0, -g$$

であるから、運動の方程式は夫々

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \dots\dots\dots(3)$$

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta x, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta y, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta z - g \dots\dots\dots(4)$$

茲に  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\mu}{\rho}$ : 動粘性係數

又連続等式は非圧縮性の流体であれば、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

で表はされる。今 2 つの相似運動を考へて見る。

而して兩者の長さ、圧力、角速度、時間、流体の密度、其の動粘性係數の比を夫々  $\lambda, \alpha, a, \theta, m, \kappa$  であるとす。かくすれば  $M_1$  なる運動中のある點 1 に於ける流体の廻転運動並に連続方程式は (3) 及 (5) 式から、

$$-\omega_1^2 x_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad -\omega_1^2 y_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \quad 0 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - g; \quad \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial z_1} = 0$$

又  $M_2$  なる運動中の點 1 に相似の位置にある點 2 に於ける流体の廻転運動並に連続方程式は同様にして前の尾字 1 の代りに 2 を附したものとなる。而して兩者間には

$$\begin{aligned} \omega_2^2 x_2 &= a^2 \lambda \omega_1^2 x_1, & \dots\dots\dots; & \dots\dots\dots; \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{m} \frac{\alpha}{\lambda} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, & \dots\dots\dots; & \dots\dots\dots; \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2} &= \frac{1}{\theta} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1}, & \dots\dots\dots; & \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

\* 北海道帝國大学助教授 工学士 (昭和 12 年 4 月 10 日講演)

なる関係がある。故に  $M_2$  なる運動が  $M_1$  なる運動に相似にある爲には、(3) 式から明かなる様に、

$$a^2\lambda = \frac{\alpha}{m\lambda} = 1 \dots\dots\dots(6)$$

同様 (4) 式なる粘性流体の廻転運動が相似なる爲には、

$$a^2\lambda = \frac{\alpha}{m\lambda} = \kappa a\lambda^{-1} = 1 \dots\dots\dots(7)$$

なる関係を満足しなくてはならぬ。

(6) 式から  $a = 1/\sqrt{\lambda}$  であり、速度の比は、 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} = \sqrt{\lambda}$ 、流量の比は  $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2 A_2}{V_1 A_1} = \sqrt{\lambda} \lambda^2 = \lambda^{5/2}$  となる。

速度の相似率が幾何学上長さの相似率の平方根に等しい事は、水理学上有名なフルードの法則として知られて居る。

又 (7) 式から、

$$\kappa = \lambda/a = \sqrt{\lambda} \lambda = \lambda^{3/2} \dots\dots\dots(8)$$

なる関係を得られる。此の関係を檢すれば、レノーズの一般法則の特殊の場合を表して居る事が容易に解せられる。

而して 図-1 の様な実験装置に依つて、兩者の比を幾何学上 1/2 にし、出來た流出渦の流量の相似率の正しい事を先づ證明した。其の實驗結果は 図-2 に示された通りである。又自由面の相似を比較する爲に、図-1 の様な装置に依つて流出渦の蔭像を印畫紙に直接寫し得る様に設備し、図-3 及 図-4 を撮つた。之等の図中  $O_1$  及  $O_1'$  等夫々相応の長さを図面上測定比較する事に依り、上に誘導した相似率の正しい事が證明せられる。

図-1. 實驗に使用した水槽の平面図

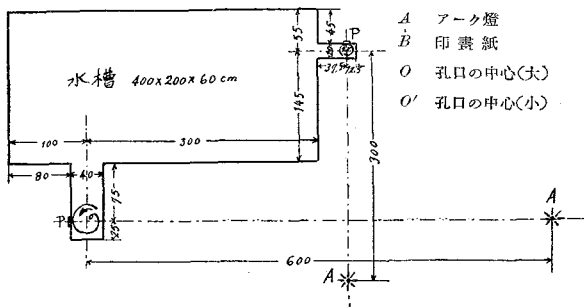
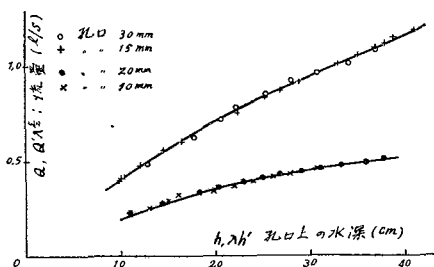


図-2. 流出渦の相似



更に此の實驗から得た結果に依つて、流出渦の自由面の方程式に就て少しく検討して見る。

ヴェンチュリ其の他の水理学者に依つて、既にかゝる液体の廻転運動には、

$$vr = c \dots\dots\dots(9)$$

なる関係が成立する事を述べて居る。今摩擦を無視し、ベルヌーイの定理を応用して、等圧面の方程式を求めれば、

$$\frac{p-p_0}{\gamma} = h - \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \dots\dots\dots(10)$$

自由面に於ては、 $p = p_0$  であるから、(10) 式に (9) 式の関係を代入すれば、

$$Z_0 - Z = h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2 r_0^2}{2g} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = \frac{c^2}{2g} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

$r_0$  なる流出渦の鉛直中心軸から水平自由面までの水平距離は一般に大であるから、 $1/r_0^2$  を無視すれば、

図-3.

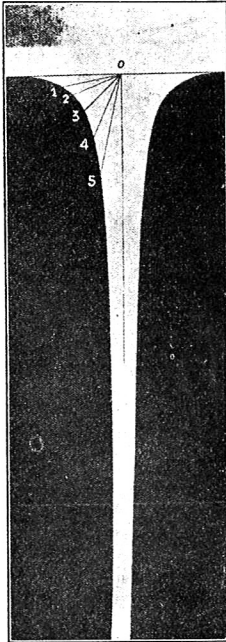


図-4.

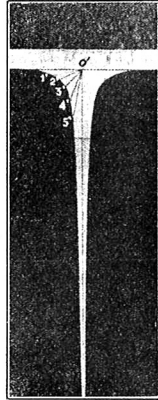
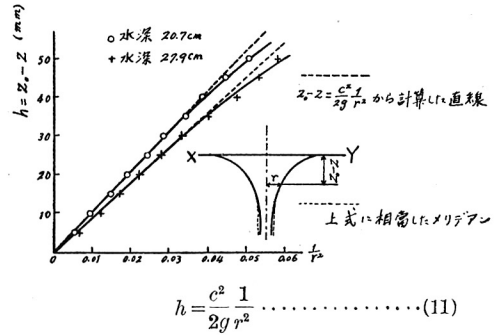


図-5. 自由面のメリディアン



となる。図-5 の曲線は此の自由面の方程式中の  $h$  を縦距に、 $1/r^2$  を横距に採つて畫いたものである。

之を検すれば、 $c$  なる定数は流出口の大きさに依る。而して流出口の径が大ならば其の径が大なるより更に  $c$  の値がより大となり、又一定の流出口に於ては水深が大なれば大なる程  $c$  の値は小となる。又  $vr = \text{const.}$  なる法則、又は自由面の方程式は、鉛直分速度を無視し誘導せられたものであるから、自由面の内でも水平部附近のみに適用せられ、流出口に近い自由面には通用しない。なぜならば任意の水平面に於て、流体は一定且つ一樣な角速度を以つて円運動をして居るの

ではなく、螺旋狀の運動をして居り、其の差異の度は流出口に近づくにつれて大となるからである。又水深が浅く底面の影響が此の運動に作用すれば、上記の假定に反する故に、之等の方程式は最早適用されない。

以上の原理は流体である空氣の場合に適用せられても差支へないものと思ふ。其の際の流出口は所謂風眼に相當して居るものである。

(註：本文の詳細に就ては本會誌第 23 卷第 7 號を参照されたい。)