土木学會第1回年次学術講演會講演
(応用力学之部 No. 7)

等角寫像適用上から見た彈性学と水理学との比較

會員　工学博士　久　野　重　一　郎*

複素函數論特にその等角寫像性は，二次元彈性学の諸問題，並に二次元ポテンシャル流動の究明に對し，有力な武器の一つであります。いつたい彈性学にせよ，水理学にせよ，私どもが，一つの問題を解かうとするに當つてはいろいろな方法が，そこにあり得ることであります。例へば，座標にいたしましても，

直角座標 (Cartesian coordinates) x, y

極　座　標 (Polar coordinates) r, θ

直交曲線座標 (Orthogonal curvilinear coordinates) α, β

などがあります。問題に直面したら，まづ，どの座標が，一番有效適切かの見極めをすることが，大切であります。そして，直交曲線座標の採用は，それは，いひかへれば，等角寫像の利用といふことに，外ならないのであります。カーテシアン座標やポーラー座標では解けない問題が，等角寫像の適用により，手ぎはよく解けることがあるのであります。しかし，彈性学では，等角寫像ができてゐながら，理論上解けない問題もあるのであります。解けたり解けなかつたりするのを，どうして見分けるかにつき，私の扱つた問題を例にあげて，申述べてみたいと思ひます。但し，二次元の彈性学のうち，捩りモーメントをうける問題は豫め除外いたします。

1. 等角寫像と彈性学

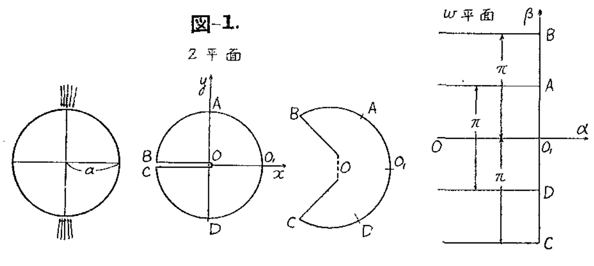
A. 円板（直徑方向に圧縮される円板の応力）

寫像函數　$w=\log(z/a)$ ············(1)

こゝで　$w=\alpha+i\beta,\quad z=x+iy.$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x-\sigma_y-2i\tau&=2iyF_1'(z)+F_2(z)\\ \sigma_x+\sigma_y&=2R[F_1(z)]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

図-1.

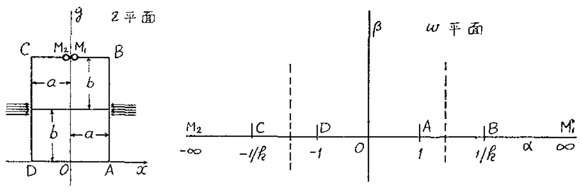


$$\widehat{\alpha\alpha}-\widehat{\beta\beta}-2i\widehat{\alpha\beta}=-(1-e^{2i\beta})f_1'(w)-e^{-\alpha+i\beta}f_2(w),\quad \widehat{\alpha\alpha}+\widehat{\beta\beta}=2R[f_1(w)]\quad\cdots\cdots(3)$$

B. 矩形板（相對する 2 邊の中央で圧縮される矩形板）

寫像函數　$w=\mathrm{sn}\,(Kz/a)$ ··········(4)

図-2.



2. 等角寫像と水理学

$w=\phi+i\psi,\qquad z=x+iy,$

x 分速度, $u=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$;　　y 分速度, $v=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ ························(5)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\quad\cdots\cdots(6)$$

* 九州帝國大学助教授（昭和 12 年 4 月 10 日講演）

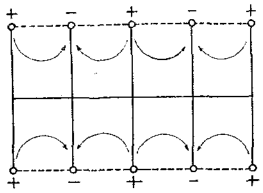


図-3.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{合速度の大きさ,} & V=(dw/dz\ \text{の絕對值}) \\ \text{合速度の方向,} & \alpha=(dw/dz\ \text{の偏角})\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

A.　函數 $w=\log(z/a)$ の流れ

B.　函數 $w=\mathrm{sn}\,(Kz/a)$ の流れ

3.　彈性学と水理学の比較

(1)　二次元ポテンシャル流動の特質

(1)　図形境界線を w 平面の直線に寫像できれば，その寫像函數に對する流れが，理論上必ず存在する。

(2)　境界條件を考へるとき，複素函數を使へば，その解式は，必然的に，流れる微分方程式を滿たすことになつてゐる。

(2)　二次元彈性学の特質

(1)　図形境界線を w 平面の直線に寫像できても，その寫像函數に對する応力狀態が存在することにはならぬ。

(2)　境界條件を考へるとき，複素函數を使つても，応力方程式は別にこれを考慮する必要がある。

(3)　等角寫像に応じて，応力式の変數変換が必要である。この変換ができなければ，その寫像形式が理論上使へないのである。

(3)　解けるか解けないかの判別條件(彈性学)

等角寫像が $w=f(z)$ で示されるとき，その逆函數 $z=F(w)$ について，右邊の虛實が分離できれば，問題は理論上解ける筈である。分離できなければ，その寫像形式を放棄せねばならぬ。

(1)　の逆函數　$z=ae^{w}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

分離可能　$x=ae^{\alpha}\cos\beta,\qquad y=ae^{\alpha}\sin\beta$

(4)　の逆函數　$z=\dfrac{a}{K}\displaystyle\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

分離不能，問題が，理論上，解けない(他の座標を使へば，解けるかも知れぬ)。

2 極座標　$w=\log\{(z+ia)/(z-ia)\}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

逆函數　$z=ia(e^{w}+1)/(e^{w}-1)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$

分離可能　$x=a\sin\beta/(\cosh\alpha-\cos\beta),\qquad y=a\sinh\alpha/(\cosh\alpha-\cos\beta)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$

(註：本文の詳細に就ては第 23 卷第 9 號を參照されたい)。