

土木学会第1回年次学術講演會講演

(応用力学之部 No. 6)

水平頂面を有つ重力体中に水平円形孔を
穿つた時の応力分布(On the Stresses in Gravitating Elastic Body having a Horizontal
Circular Hole near its Horizontal Surface.)

會員 工学博士 安藏善之輔*

概要 表面水平なる重い弾性体の中に水平円孔を穿つた場合、弾性体内部圧力が如何に変化するかを研究せるもので實際には隧道周囲の圧力を求める場合に応用せらるべく、問題を二次元的に取扱ひ双極座標を用ひて解いたものである。

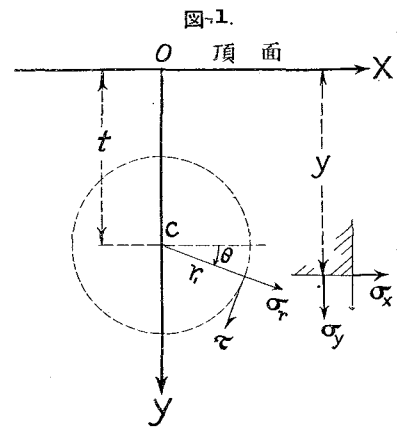
1. 緒言 本問題は已に東大教授山口昇博士⁽¹⁾、Schmid 博士⁽²⁾等の人々に依つて研究せられ、又之と類似の問題に就ても杉原武徳氏⁽³⁾、西村及高山兩氏⁽⁴⁾等の研究が發表されて居る。然し是等の研究では孰れも円孔周囲の境界条件のみが満足され、水平頂面に於ける境界条件は完全には満足されて居ない。従つて上記解法は嚴密に云へば孔が頂面より遙か下方に存在する場合には近似的に正しいものとして適用されるが、若し円孔が比較的大きく且つ表面に極めて接近して穿たれる場合には其の近似性を失ふものではないかと考へられる。

著者は本問題を二次元的に取扱ひ Jeffery 博士⁽⁵⁾の案出した双極座標に依る応力函数を用ひ、上記二つの境界条件を満足させる様に函数中の係数を定め、本問題の解決を試みたのである。

2. 孔を穿たざる時の重力体中の圧力 今図-1 の如く頂面上に原點を有する x, y の直交座標を用ひ、 γ を重力体の單位重量、 σ_x, σ_y を重力体中の応力とし其の大きさは頂面よりの距離に正比例するものとすれば

$$\sigma_y = -\gamma y, \quad \sigma_x = -\lambda \gamma y$$

である。更に重力体の組織が均一で水平方向の変形率 ϵ_x は零なりと



* 九州帝國大学教授 (昭和 12 年 4 月 10 日講演)

(1) 山口昇: “水平頂面を有つ重力体中に水平円形孔を穿つた場合の応力分布”(鉄道省業務研究資料第16卷第11號)

(2) H. Schmid: Statische Probleme des Tunnel-und Druckstollenbaues, 1926.

(3) 杉原武徳: “円形堅坑及斜坑の周圍に於ける応力分布”(日本鑛業會誌第 47 卷第 560 號)

同: “楕円形水平坑道の周圍に於ける地圧”(同上第 49 卷第 575 號)

同: “正方形水平坑道の周圍に於ける地圧”(同上第 49 卷第 581 號)

(4) 西村源六郎, 高山威雄: “重力の働ける楔形弾性体を貫通する水平円形孔附近の応力”(地震研究所彙報第 10 號第 3 冊)

(5) G. B. Jeffery: “Plane Stresses and Plane Strain in Bipolar Co-ordinates”

(Phil. Trans. of Royal Soc. of London, Series A, Vol. 221, 1921)

の假定を用ふれば

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right\} = 0$$

或は $\sigma_x = \frac{1}{m-1} \sigma_y$ (但し m はポアソン数)

$$\therefore \lambda = \frac{1}{m-1} \dots \dots \dots (1)$$

依つて穿つべき円孔周囲の応力を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta = -\frac{\gamma}{4} \left\{ 2t(1+\lambda) + r_1(3+\lambda) \sin \theta - 2t(1-\lambda) \cos 2\theta - r_1(1-\lambda) \sin 3\theta \right\} \\ \tau &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta = -\frac{\gamma(1-\lambda)}{4} (r_1 \cos \theta + 2t \sin 2\theta - r_1 \cos 3\theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

是等の応力は円孔が穿たれると同時に消去さるべきものである。

3. 双極座標に依る応力函数と応力の一般式

今 $\alpha + i\beta = \log \{ x + i(y+a) \} / \{ x + i(y-a) \}$

なる関係を持つ曲線座標 α, β を考へれば

$$x = a \sin \beta / (\cosh \alpha - \cos \beta), \quad y = a \sinh \alpha / (\cosh \alpha - \cos \beta) \dots \dots \dots (3)$$

なる事明かである。斯の如き座標は 図-2 に示す如く夫々 x 及 y 軸上に中心を有し互に直交する二つの円群である。今 X を x, y で表はした Airy の応力函数とすれば

$$\nabla^4 \chi = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y}$$

なる事は周知であらう。之を上記曲線座標 α, β で表はせば

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right\} (h\chi) &= 0 \dots \dots (4) \\ a\alpha\alpha &= \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right\} (h\chi) \\ a\beta\beta &= \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right\} (h\chi) \\ a\alpha\beta &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2 (h\chi)}{\partial \alpha \partial \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

但し $h = 1 / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} = (\cosh \alpha - \cos \beta) / a$

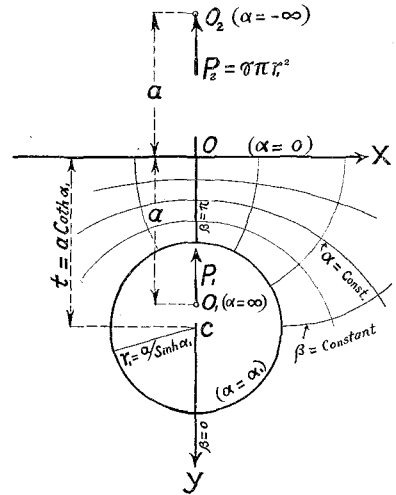
Jeffery 博士は微分方程式 (4) の一般解を與へて居るが本問題の場合では

$$h\chi = B_0 \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh(n+1)\alpha + B_n \cosh(n-1)\alpha + C_n \sinh(n+1)\alpha + D_n \sinh(n-1)\alpha \right\} \cos n\beta \dots \dots \dots (6)$$

を用ふれば十分である。

4. 補助応力函数 χ' 上記応力函数 χ を用ひて、円孔周囲及頂面に於ける応力は零なりと云ふ2境界条件を満

図 2.



足させる様に係数 B_0, A_n, B_n, C_n, D_n を決定すれば問題は解決される筈であるが、数値計算をして見ると級数が収斂しないので不結果に了るものである。之は Jeffery 博士も其の論文中に断つて居る通り消去さるべき円孔周囲の応力 σ_r, τ が夫自身釣合を保つて居ないからである。即ち是等応力の合力は明かに剝り抜かれる円形体の重さ $\gamma\pi r_1^2$ に等しく決して零とはならぬ。此の難點は次に示す如き応力函数を χ に補加すれば解消される。

$$\chi' = \frac{-\gamma r_1^2 a}{2} \left[\sin \beta \left\{ \beta + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\cos \beta - e^{-\alpha}}{\sin \beta} \right) \right\} + \frac{(1-\lambda)}{2} \left\{ \alpha (\cosh \alpha - \cos \beta) - \sinh \alpha \log (\cosh \alpha - \cos \beta) \right\} \right] / (\cosh \alpha - \cos \beta) \dots \dots \dots (7)$$

何んとなれば上式を x, y で表はせば

$$\chi' = -\frac{\gamma r_1^2}{2} \left[x \left\{ \tan^{-1} \frac{(y-a)}{x} + \tan^{-1} \frac{(y+a)}{x} \right\} + \frac{(1-\lambda)}{4} \left\{ (y-a) \log \{x^2 + (y-a)^2\} + (y+a) \log \{x^2 + (y+a)^2\} \right\} \right]$$

となつて 図-2 に示す如く兩極 O_1, O_2 に夫々 $\gamma\pi r_1^2$ に等しい力 P_1, P_2 を上向きに加へた事に相當し、 P_1 の爲に円孔周囲の応力の合力は零となつて釣合の状態となるからである。 P_2 は P_1 の影響を受けて頂面に現はれて来る垂直応力を打消す役目を持つもので之がため頂面には切面応力のみ残り而して其の応力は左右正負對稱的であるから夫自身釣合を保つて居る。円孔周囲には更に P_2 の影響を受けた応力が出現するが力の働點が円孔外にあるを以て上記円孔周囲に於ける釣合を亂す懼れはない。斯くの如く補助応力函数 χ' を用ふれば、消去すべき頂面及円孔周囲の応力は總て夫自身釣合を保つ事になり、本問題の解を可能ならしめるのである。

5. 応力函数 χ の決定 上記補助応力函数 χ' を (5) 式中に加ふれば

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha'} &= \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cosh \alpha \right\} \left\{ h(\chi + \chi') \right\} \\ \widehat{\alpha\beta'} &= -(\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2 \{h(\chi + \chi')\}}{\partial \alpha \partial \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

となり、之等に依つて消去せらるべき円孔周囲の応力は (2), (3) より

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha_1} &= -\gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left\{ 1 - (1-\lambda) \sinh^2 \alpha_1 \sin^2 \beta / (\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^2 \right\} / (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \\ &= -\gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left[(1+\lambda)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\lambda) + (1-\lambda)(n^2 - n \coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right\} e^{-n\alpha_1} \cos n\beta \right] \\ \widehat{\alpha\beta_1} &= \gamma r_1^2 (1-\lambda) \sin^2 \alpha_1 \sin \beta \left\{ 1 - \cosh \alpha_1 / (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) + \sin^2 \beta / (\cosh \alpha_1 - \cos \beta)^2 \right\} / (\cosh \alpha_1 - \cos \beta) \\ &= -\gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda)(n^2 - n \coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 e^{-n\alpha_1} \sin n\beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

(8) と (9) を合せて

$$\begin{aligned} \alpha=0 \text{ (頂面)} \quad & \widehat{\alpha\alpha'_0}=0, \quad \widehat{\alpha\beta'_0}=0 \\ \alpha=\alpha_1 \text{ (円孔周囲)} \quad & \widehat{\alpha\alpha_1} + \widehat{\alpha\alpha'_1}=0, \quad \widehat{\alpha\beta_1} + \widehat{\alpha\beta'_1}=0 \end{aligned}$$

なる 4 條件から χ 中の係数 B_0, A_n, B_n, C_n, D_n を決定すればよろしい。途中の算式を省けば

$$-B_0 + 2C_1 = -2(c_1 + c_2) \dots \dots \dots (i)$$

$$2A_1 \sinh 2\alpha_1 + 2C_1 \cosh 2\alpha_1 = B_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} \dots \dots \dots (ii)$$

$$2A_1 \cosh 2\alpha_1 + 2B_1 + 2C_1 \sinh 2\alpha_1 = -2a_0 + B_0 \sinh 2\alpha_1 \dots\dots\dots (iii)$$

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = \dots\dots\dots = A_n + B_n = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

$$\begin{aligned} n \geq 2, \quad & A_n \{ (n+1) \sinh(n-1)\alpha_1 - (n-1) \sinh(n-1)\alpha_1 \} + C_n \{ (n+1) \cosh(n+1)\alpha_1 \\ & - (n-1) \cosh(n-1)\alpha_1 \} \\ & = \frac{2(c_1 + 2c_2)}{n} \cosh(n-1)\alpha_1 - \frac{2 \sinh n\alpha_1}{n \sinh \alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} + \frac{2}{n \sinh \alpha_1} \sum_{p=1}^{n-1} b_p \sinh(n-p)\alpha_1 \\ & \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_n(n-1) \{ \cosh(n+1)\alpha_1 - \cosh(n-1)\alpha_1 \} + C_n \{ (n-1) \sinh(n+1)\alpha_1 - (n+1) \sinh(n-1)\alpha_1 \} \\ & = \frac{2(c_1 + 2c_2)}{n} \sinh(n-1)\alpha_1 - 2 \left\{ \frac{\cosh n\alpha_1}{(n+1) \sinh \alpha_1} - \frac{\sinh n\alpha_1 \cosh \alpha_1}{n(n+1) \sinh^2 \alpha_1} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} \\ & - \frac{2}{n(n+1) \sinh \alpha_1} \sum_{p=1}^{n-1} \{ p a_p + b_p \coth \alpha_1 \sinh(n-p)\alpha_1 - (n-p) b_p \cosh(n-p)\alpha_1 \} \dots (vi) \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left(\frac{1-3\lambda}{4} - \frac{3-\lambda}{4} \coth \alpha_1 \right), \\ a_2 &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{\lambda}{2 \sinh \alpha_1} + \left\{ \frac{1-3\lambda}{2} - (1-\lambda)(1-\coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right\} e^{-\alpha_1} \right], \\ a_n &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left\{ \frac{1-3\lambda}{2} - (1-\lambda)(n^2 - n \coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right\} e^{-n\alpha_1}, \\ b_1 &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{-\cosh \alpha_1}{2 \sinh^2 \alpha_1} + \left\{ \frac{3-\lambda}{2} - (1-\lambda)(1-\coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right\} e^{-\alpha_1} \right], \\ b_2 &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{1+\lambda}{8 \sinh^2 \alpha_1} + \left\{ \frac{3-\lambda}{2} - (1-\lambda)(4-2 \coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right\} e^{-2\alpha_1} \right], \\ b_3 &= \gamma r_1^2 \sinh^2 \alpha_1 \left[\frac{3-\lambda}{2} - (1-\lambda)(n^2 - n \coth \alpha_1) \sinh^2 \alpha_1 \right] e^{-n\alpha_1}, \\ c_1 &= -\frac{\gamma r_1^2}{2}, \quad c_2 = \gamma r_1^2 \frac{(1+\lambda)}{8} \end{aligned}$$

依つて先づ (i), (ii), (iii), (iv) より

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{\sinh^2 \alpha_1} \left\{ a_0 \coth \alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} - c_1 - c_2 \right\} \\ A_1 = -B_1 &= \frac{1}{2 \sinh^2 \alpha_1} \left\{ (c_1 + c_2) \sinh 2\alpha_1 - a_0 \right\} \\ C_1 &= \frac{1}{2 \sinh^2 \alpha_1} \left\{ a_0 \coth \alpha_1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} - (c_1 + c_2) \cosh 2\alpha_1 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$n \geq 2$ に対しては (iv), (v), (vi) より

$$\left. \begin{aligned} A_n = -B_n &= \left[\frac{K \sinh \alpha_1 (\sinh 2n\alpha_1 - n \sinh 2\alpha_1) - M_n \{ (n-1) \sinh(n+1)\alpha_1 \right.}{4 n \sinh \alpha_1 (\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \right. \\ & \left. - \frac{(n+1) \sinh(n-1)\alpha_1 \} + N_n(n+1) \{ \cosh(n+1)\alpha_1 - \cosh(n-1)\alpha_1 \}}{4 n \sinh \alpha_1 (\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \right] \\ C_n &= \left[\frac{K \sinh \alpha_1 \{ n \cosh 2\alpha_1 - \cosh 2n\alpha_1 - (n-1) \} + M_n(n-1) \{ \cosh(n+1)\alpha_1 \right.}{4 n \sinh \alpha_1 (\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \\ & \left. - \frac{\cosh(n-1)\alpha_1 \} - N_n \{ (n+1) \sinh(n+1)\alpha_1 - (n-1) \sinh(n-1)\alpha_1 \}}{4 n \sinh \alpha_1 (\sinh^2 n\alpha_1 - n^2 \sinh^2 \alpha_1)} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

$$D_n = -\frac{n+1}{n-1} C_n - \frac{K}{n(n-1)}$$

但し

$$K = 2(c_1 + 2c_2),$$

$$M_n = -2 \sinh n\alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} b_p \sinh(n-p)\alpha_1,$$

$$N_n = -\frac{2}{n+1} \{n \cosh n\alpha_1 - \sinh n\alpha_1 \coth \alpha_1\} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\alpha_1} \\ - \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \{(p a_p + b_p \coth \alpha_1) \sinh(n-p)\alpha_1 - (n-p) b_p \cosh(n-p)\alpha_1\}$$

6. 計算例 $t/r_1 = 2, \lambda = 1/4$ なる時、円孔周囲及頂面に於ける応力を求めよ。

(5) 式を用ひて $\widehat{\beta\beta}'$ を求めれば

$$a\widehat{\beta\beta}' = \left\{ (\cosh \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right\} \{h(\chi + \chi')\}$$

依つて (10), (11) より得たる B_n, A_n, B_n, C_n, D_n の値を上式に代入すれば

$$\alpha = \alpha_1 \text{ (円孔周囲)}, \quad \widehat{\beta\beta}'_1 = \gamma r_1 \left(E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n\beta \right)$$

$$\alpha = 0 \text{ (水平頂面)}, \quad \widehat{\beta\beta}'_0 = \gamma r_1 \left(F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos n\beta \right)$$

是等は $\sum n^2 e^{-n\alpha_1} \cos n\beta$ と同じ程度の収斂性を有つもので E_n, F_n は次の如き値となる。

$$\begin{aligned} E_0 &= -1.04645, & E_6 &= +0.13146, & E_{12} &= +0.00023, & F_0 &= +0.03608, & F_6 &= +0.00390, \\ E_1 &= -1.34025, & E_7 &= +0.04929, & E_{13} &= +0.00007, & F_1 &= +0.53627, & F_7 &= +0.00088, \\ E_2 &= +1.70009, & E_8 &= +0.01773, & E_{14} &= +0.00002, & F_2 &= -0.82738, & F_8 &= +0.00002, \\ E_3 &= +1.20387, & E_9 &= +0.00695, & E_{15} &= +0.00001, & F_3 &= +0.15032, \\ E_4 &= +0.69935, & E_{10} &= +0.00208, & & & F_4 &= +0.07848, \\ E_5 &= +0.32658, & E_{11} &= +0.00065, & & & F_5 &= +0.02133, \end{aligned}$$

上記 $\widehat{\beta\beta}'$ は孔を穿つた爲に生ずる応力の変化であつて円孔周囲の応力の大きさを求めんとするには、之に孔を穿たざる時の応力 $\widehat{\beta\beta}$ を加へればよろしい。

上の結果を図示すれば図-3 の如くなり、図中の破線は単極座標を用ひた在來の解法の結果を示すものである。

図-3.

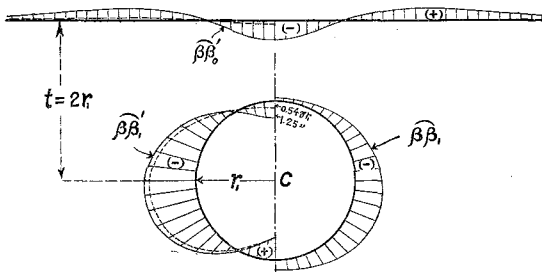


図-4.

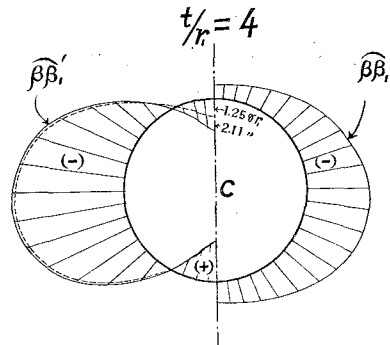


図-4 は $l/r_1=4$ の場合であつて、円孔頂部の応力を除いては在來の解法の結果とよく一致する事が判る。

7. 結言 上述の解法は在來のものに比すれば計算は甚だ面倒である。然し厳正解法に近きものであるから、之に依つて在來の解法の精度を大凡知る事が出来るのである。

本解法の応用としては地覆の特に浅い無巻隧道周囲の応力を計算し、或は隧道掘鑿の爲生ずる地表の沈下等を求むる場合の基礎的研究として役立つものであらうかと考へられる。又若し Schmid 博士の採つた円孔周囲の條件を用ふれば、巻立隧道の場合にも其の応用範圍を擴める事が出来ると思ふ。