

両端固定せる鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損

( Elastic Failure of a Steel Column, Both its Ends  
fixed under Eccentric Loads. )

會員 結 城 朝 恭\*

緒言 柱軸が當初から或る 2 山の曲りを持つ際に、其の曲り量が弾性破損並に諸現象に如何なる影響を與ふるかを考察する一手段として、本論文では假りに柱軸が當初に  $c \sin \frac{\pi x}{l}$  なる正弦曲線形並に其の  $x$  軸を任意量  $z$  だけ移動した際の曲線形  $\xi+z$  で示さる如き曲りを有する両端固定の均一直断面の鋼柱が偏心荷重を受ける場合の弾性破損並に諸現象に就て論及を試み、以つて會誌第 23 卷第 1 號で試みたものと共に一般現象の考察の一部に資せんとするものである。但し  $\xi$  は 図-1 で示してあるが、この場合次記の如くである。

$$\xi \equiv c \sin \{2\pi(\xi-\gamma)\}, \quad \text{尚 } \xi = x/l, \quad \gamma \equiv (1/2\pi) \sin^{-1}(z/c), \quad c = \text{任意量.}$$

A. 柱の曲り並に曲げモーメント 柱軸の曲り及荷重が直断面の重心に於ける慣性モーメントの 1 主軸及柱軸を含む平面内にある場合を論ずる。図-1 に於て曲線 ACB は加重前の柱軸にして、 $\xi+z$  は前述の如く直線 AB に對して柱軸のなす曲り量を示す。AC'B は加重後の柱軸、 $W$  は荷重、 $\theta$  は荷重力線の AB となす傾き、 $L$  は柱長、 $a, b$  は両端に於ける荷重の偏心量、 $l$  は AB の長さにして、 $x$  は任意直断面の A 端からの距離、 $y$  は 図-1 に示せる如く該断面の変位とする。今 図-1 の如く荷重  $W$  が作用する時には、1 山の場合に論究した如くに便宜上力線に直角の方向に作用する反力  $R_{A_0}$  と抵抗曲げモーメント  $M_{A_0}$  とを受けるものとする。扱て當初並に加重後の柱軸が僅少な曲りを有する場合には、換言せばそれらの曲りの曲率  $\kappa, \kappa'$  が充分小なる場合には一般に次式が成立する。

$$\kappa' - \kappa = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \dots\dots(1)$$

柱軸上の任意點  $C'$  に於ける曲げモーメント  $M_{C'}$  は、

$$M_{C'} = W\{(y+\xi+z) \cos \theta + a - x \sin \theta\} + R_{A_0}\{(y+\xi+z) \sin \theta + x \cos \theta\} - M_{A_0} = P_1(y+\xi+z) - Qx - M'_{A_0} \dots\dots(2)$$

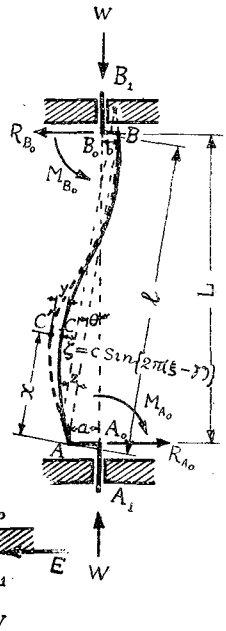
但し  $P_1 \equiv W \cos \theta + R_{A_0} \sin \theta, \quad Q \equiv W \sin \theta - R_{A_0} \cos \theta, \quad M'_{A_0} = M_{A_0} - W a.$

(1) 式に (2) 式を用ひて之を解けば、任意直断面が受ける変位  $y$  は (3) 式で示さる。

$$y = A \cos p\xi + B \sin p\xi + \xi p^2 / (4\pi^2 - p^2) - z + Ql\xi / P_1 + M'_{A_0} / P_1 \dots\dots(3)$$

但し  $p = l\sqrt{P_1/EI}, \quad A, B = \text{積分常数.}$

図-1. 柱の曲り



\* 仙臺高等工業学校教授 工学士 (昭和 12 年 4 月 10 日講演)

(3) 式に柱の両端条件,  $\xi=0$  及  $\xi=1$  に於て  $y=0$  及  $\frac{dy}{d\xi}=0$  を適用して,

$$\xi=0, y=0: A-uz+M_{A0}/P_1=0 \dots\dots(4a)$$

$$\xi=1, y=0: A \cos p+B \sin p-uz \\ +Ql/P_1+M_{A0}/P_1=0 \dots\dots(4b)$$

$$\xi=0, \frac{dy}{d\xi}=0: Ap \sin p-Bp \cos p \\ -Ql/P_1=uz_1 p^2/2\pi \dots\dots(4c)$$

$$\xi=1, \frac{dy}{d\xi}=0: Ap \sin p-Bp \cos p \\ -Ql/P_1=uz_2 p^2/2\pi \dots\dots(4d)$$

但し  $u \equiv 4\pi^2/(4\pi^2-p^2), z_1 \equiv c \cos 2\pi\gamma.$

上記4式より  $Q, A, B, M_{A0}$  (従つて  $M_{A0}$ ) が求まり, その中の  $M_{A0}$  は下記で示される。

$$\frac{M_{A0}}{P_1} = \frac{\alpha \cos(\theta-\varphi)}{\cos \varphi} + uz - \left(uz_1 \frac{p}{\pi}\right) \left(\cot \frac{1}{2}p\right) \\ \times \left\{-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sin p} - \frac{1}{p}\right) / \left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right)\right\} \dots\dots(4)$$

従つて (3) 式は下記式の如く書換へられる。

$$y = \alpha \left[ \left(1/\sin \frac{1}{2}p\right) \left\{ \cos p \left(\xi - \frac{1}{2}\right) - \cos \frac{1}{2}p \right\} \left\{ -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sin p} - \frac{1}{p}\right) / \left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right) \right\} \right. \\ \left. + \left(\xi - \frac{\sin p\xi}{\sin p}\right) / \left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right) \right] + p^2(z+\xi)/(4\pi^2-p^2) \dots\dots(5)$$

但し  $\varphi \equiv \tan^{-1} \left\{ ukp/\pi \left(\cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p}\right) \right\}, \alpha \equiv 4\pi cp(\cos 2\pi\gamma)/(4\pi^2-p^2)$

(5) 式より  $y \sim \xi$  の關係を求めれば 図-2 の通りである。

B. 弾性限界内に於ける最大曲げモーメント (2), (3) 式と (4) 式とより, 一般に曲げモーメントは (6) 式で示される。

$$M = cP_1\psi \dots\dots(6)$$

但し  $\psi \equiv \{4\pi^2/(4\pi^2-p^2)\} \left[ \sin \{2\pi(\xi-\gamma)\} + \left\{ p \cos 2\pi\gamma / \left(\pi \cdot \cot \frac{1}{2}p - 2\frac{1}{p} \sin \frac{1}{2}p\right) \right\} \right. \\ \times \left\{ \left(\frac{1}{\sin p} - \frac{1}{p}\right) \cos p \left(\xi - \frac{1}{2}\right) - \sin p\xi / 2 \cos \frac{1}{2}p \right\} \\ \left. - p \cos 2\pi\gamma \cos \left\{ p \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \right\} / 2\pi \sin \frac{1}{2}p \right]$

従つて最大曲げモーメントの生ずる断面の位置  $\xi_0$  並にその値  $M_0$  は夫々下記 (7), (8) 式より求まる。

$$\frac{2\pi u\xi_1}{\cos p\xi_0} + m \tan p\xi_0 \cos \frac{1}{2}p = m \sin \frac{1}{2}p + \frac{pl \tan \varphi}{\sin p} \dots\dots(7)$$

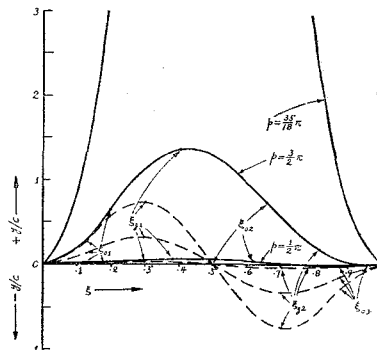
但し  $\xi_1 = c \cos \{2\pi(\xi_0-\gamma)\}, m = l \tan \varphi \left(1 - \frac{p}{\sin p}\right) / \sin \frac{1}{2}p + uz_1 p^2 / 2\pi \sin \frac{1}{2}p, z_1 = c \cos 2\pi\gamma.$

$$M_0 = P_1 c \psi_0 \dots\dots(8)$$

但し  $\psi_0 = \psi$  の  $\xi$  に  $\xi_{01}, \xi_{02}$  を用いた値。

図-2.  $y/c \sim \xi$  の關係

實線:  $z/c=1/2$  の場合  
 點線:  $z/c=0$  の場合



C. 弾性限点に於ける荷重 柱の弾性限点では、即ち柱中に起る最大圧縮応力値が材料の単純圧縮弾性限応力 $\sigma_l$ に達する時には、周知の如く下記 (9) 式が得られる。

$$P_1/A + M_{g0}/I = \sigma_l \dots\dots\dots (9)$$

但し  $A$  : 柱直断面の面積,  $P_1$  : 柱軸に沿ふて働く圧縮力 =  $\frac{Wc \cdot s \varphi}{\cos(\theta - \varphi)}$ ,  
 $2h$  : 柱直断面の曲げ平面内の厚さ,  
 $I$  : 柱直断面の重心に於て曲げ平面に直角な主軸に就ての慣性モーメント

(9) 式に (8) 式の  $M_g$  を用ひて、

$$P_1/A + P_1 ch \Psi_g / Ai^2 = \sigma_l$$

之を書換へて、

$$\sigma_m \{1 + (ch/i^2) \Psi_g\} = \sigma_l \dots\dots\dots (10)$$

即ち  $ch/i^2 = (\sigma_l / \sigma_m - 1) / \Psi_g \dots\dots\dots (11)$

但し  $\sigma_m = P_1/A$  : 平均圧縮応力,  $i = \sqrt{I/A}$  : 直断面回転半径,  
 $\sigma_m / E = e_m$  : 平均圧縮歪,  $p = (l/i) \sqrt{e_m}$

(11) 式より任意の  $\theta$  に對して  $\sigma_m \sim ch/i^2 \sim l/i$  關係を計算するを得、即ち  $\sigma_m$  (或は  $p$  なる量) が (10) 式、從つて (11) 式の値をもつ時、柱は弾性限点に達する。 $\sigma_m$  のこの値と  $ch/i^2$  との關係は 図-3 (a), (b) が示す通りである。

図-3 (a). 弾性限荷重 $\sim ch/i^2$  の關係 ( $z/c=0$ )

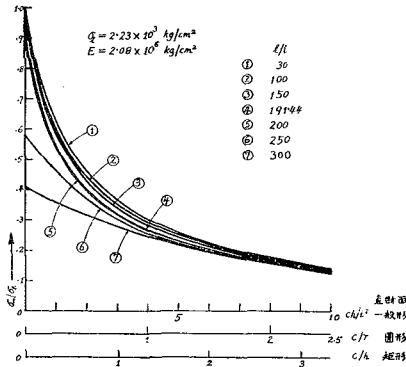
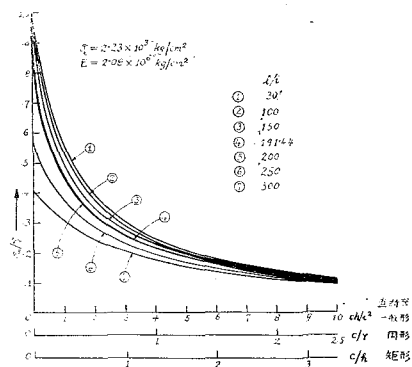


図-3 (b). 弾性限荷重 $\sim ch/i^2$  の關係 ( $z/c=1/2$ )



C.1. 微小偏心に於ける弾性破損

$$\tan \theta = (a+b)/l \text{ が微小の時には, } P_1 = W \cos \varphi / \cos(\theta - \varphi) \cong W \dots\dots\dots (10i)$$

従つて  $\sigma_m = P_1/A \cong W/A$  と見做すことを得。

C.2. 柱軸の曲り量が微小なる場合に於ける弾性破損

(i)  $p \neq \pi$  なる場合: (10) 式より  $\sigma_m \cong \sigma_l \dots\dots\dots (10ii)$

(ii)  $p \cong \pi$  なる場合:  $\sigma_m \left[ 1 + \frac{ch}{i^2} \frac{4}{3} \sin \{2\pi(\xi_g - \gamma)\} \right] = \sigma_l \dots\dots\dots (10iii)$

にして  $e \neq 0$  の時には、 $\sigma_m \cong \sigma_l$  となる。

(iii)  $\frac{1}{2} p \cong \pi$  なる場合:  $e_m \cong (2\pi i/l)^2 \left[ 1 - (ch/i^2) \left\{ \sin(2\pi \cdot \overline{\xi_g - \gamma}) - (\cos 2\pi \gamma) \left( \frac{\cos p \xi_g}{\pi} + \sin p \xi_g \right) / (\xi' - 1) \right\} \right] \cong (2\pi i/l)^2 \dots\dots\dots (10iv)$

但し  $\xi' = \sigma_i / \sigma_m = (pl/p)^2 \neq 1$  にして、こゝに除外した  $\xi' \cong 1$  なる場合は  $\sigma_m \cong \sigma_i$  となる。

**C<sub>3</sub>. 柱軸の曲り量が零の場合に於ける弾性破損** 先づこの場合、曲り量零は之を [a] 絶対零, [b] 近似零なる 2 つの場合に分けて考えると、實際的には [b] だけ考へられ、従つて長柱 ( $pl > 2\pi$ ) は常にオイラー現象が起り得ることになる。

**C<sub>4</sub>.  $ch/i^2 \sim \sigma_m$  線図に就ての考察** 図-3 (a), (b) を見ると  $\sigma_m$  の値は  $ch/i^2 = 0$  なる場合、 $pl < 2\pi$  では  $\sigma_i$  にして、 $pl > 2\pi$  では  $\sigma_i$  よりも小さく、 $li$  の大きくなる程小さくなる。而して  $ch/i^2$  が増すに従ひ、 $\sigma_m$  の値は漸次降下する。

**D. 弾性限點に於ける最大曲り**  $\frac{dy}{d\xi} = 0$  を満足する  $\xi_i$  の値を (5) 式に用ひ、之と (10) 式とより弾性限點に際しての最大曲りを  $li/i^2$  倍したる  $\eta$  を計算するを得。図-4 の如し。

**E. 結び** 本論文で論究される主なることは、

(1) 先に柱軸の當初の曲りが 1 山の正弦曲線形を有する場合 (第 23 卷第 1 號) に就て論究された事項の 1), 2), 3) が本論文の場合にも適用される他に、更に下記の事項が論究される。

(2) 柱軸が當初に 2 山の曲りを有する際には、これを [a] 全く相等しき 2 つの山形, [b] 相異りたる 2 つの山形を有する 2 つの場合に分けて考へると、[a] では  $p$  (従つて荷重) に依つて 2 つの山形が反對方向に相等しき変位を常に生じ、柱の中央では変位及曲げモーメントが常に零である。[b] では  $p$  の或る値以内において、 $p$  の増すに従つて何れの山形も増大するが、

$p$  がそれ以上大なる際は  $p$  が増大するに従つて、大きな山形の部分は漸次大きくなるが、小なる山形の部分は反對に次第に小さくなつて、結局柱軸は全体として大きな山形に従つて漸次曲るに至ることが考察される。而して [a] は實在性零にして、現實的には [b] だけが實在可能である。

(3)  $\sigma_m \sim ch/i^2$  線図に示せる如くに  $ch/i^2$  が増すに従つて  $\sigma_m$  の漸次降下する割合は、 $z/c = 1/2$  即ち場合 [b] は、 $z/c = 0$  即ち場合 [a] よりその割合大である。且つ [b] は  $p$  の値の如何に拘らずその降下する割合は 1 山の場合の割合よりも常に大である。[a] は  $pl < 2\pi$  にありては、1 山の場合のそれよりも大であるが、 $pl > 2\pi$  にありては反對にその降下率小である。

(4) 2 山の正弦曲線形  $c \sin \{2\pi(\xi - \gamma)\}$  で  $z/c = 1/2$  なる場合、即ち場合 [b] の弾性限點に於ける最大曲り  $\eta$  は 1 山の正弦曲線形  $c \sin \pi \xi$  の場合より著しく大なることは注目すべきことである。

(本論文は砂谷教授の御指導を受けたもので茲に衷心から感謝の意を表す)

図-4. 弾性限最大曲り

