土木学會第1回年次学術講演會講演

(応用力学之部 No. 2)

梁に於ける荷重，剪断力，曲げモーメント，撓角及撓の表示法竝に其の簡易化に就て

(On Simplification of Expressions of Load, Shear, Bending Moment, Deflection Angle and Deflection of Beam.)

會員 石 川 時 信*

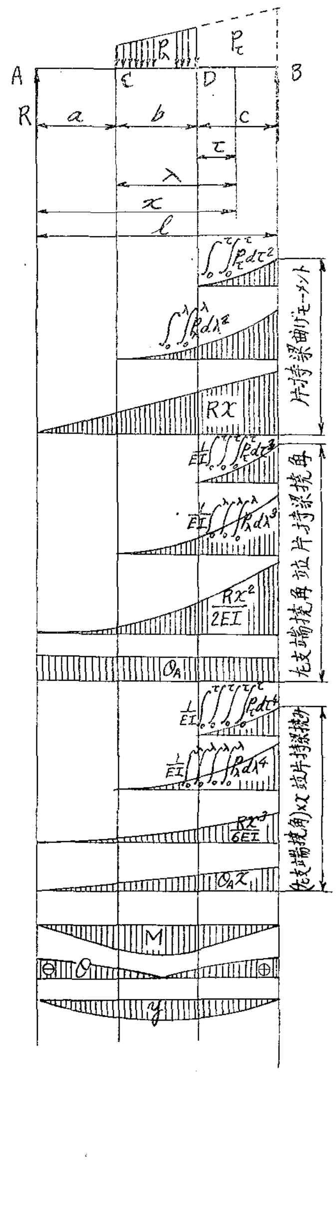


図-1. 單純梁に於ける荷重，剪断力，曲げモーメント，撓角竝に 撓表示図

1. 表示法第1 梁に於ける荷重度，剪断力，曲げモーメント，撓角竝に撓を **図-1** に依り次の樣に表示して置くと梁に關する理論を説明したり，又は問題を解く場合に極めて便利である。

$$荷重度=-p_\lambda+p_\tau=w,\ [=0] \quad\cdots\cdots(1)$$

$$剪断力=-\int_0^\lambda p_\lambda d\lambda+\int_0^\tau p_\tau d\tau=S \quad\cdots\cdots(2)$$

$$曲げモーメント=Rx-\int_0^\lambda\int_0^\lambda p_\lambda d\lambda^2-\int_0^\tau\int_0^\tau p_\tau d\tau^2=M \quad\cdots\cdots(3)$$

$$撓角=\theta_A+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Rx^2-\int_0^\lambda\int_0^\lambda\int_0^\lambda p_\lambda d\lambda^3+\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^\tau p_\tau d\tau^3\right)=\theta \text{ 又は } \frac{dy}{dx} \quad\cdots\cdots(4)$$

$$撓=\theta_A x+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rx^3-\int_0^\lambda\int_0^\lambda\int_0^\lambda\int_0^\lambda p_\lambda d\lambda^4+\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^\tau\int_0^\tau p_\tau d\tau^4\right)=d \text{ 又は } y \quad\cdots\cdots(5)$$

但し　$d\lambda^2=d\lambda d\lambda$, $d\tau^3=d\tau d\tau d\tau$ 等，以下之に準ず，

p_λ: C 點より右方 λ の距離に於ける荷重度にして此の際は CD 區間に於ける荷重度を DB の區間にまで延長したもの，

p_τ: D 點より右方 τ の距離に於ける荷重度にして τ の原點は D 點にありとし D 點より左方は考へず，

E: AB 部材の彈性係數，

I: 同　慣性モーメント。

2. 表示法第2 又 **図-2** の樣に $\lambda \gtrless b$ として，EB の區間に於て

$$S=R-wb-W \quad\cdots\cdots(6)$$

* 東京高速鉄道株式會社勤務（昭和 12 年 4 月 10 日講演）

$$M=Rx-\frac{1}{2}wb^2-wb\tau-Wt \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\theta=\theta_A+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Rx^2-\frac{1}{6}wb^3-\frac{1}{2}wb\tau^2-\frac{1}{2}Wt^2\right) \quad \cdots\cdots (8)$$

$$d=\theta_A x+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rx^3-\frac{1}{24}wb^4-\frac{1}{6}wb\tau^3-\frac{1}{6}Wt^3\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

但し，第1の場合と同様に λ, τ, t の原點は夫々 C, D, E にありとし，原點より左方は考へざるものとす。

以上第 1 及第 2 表示法は **図-1** 及 **図-2** に示す様に，

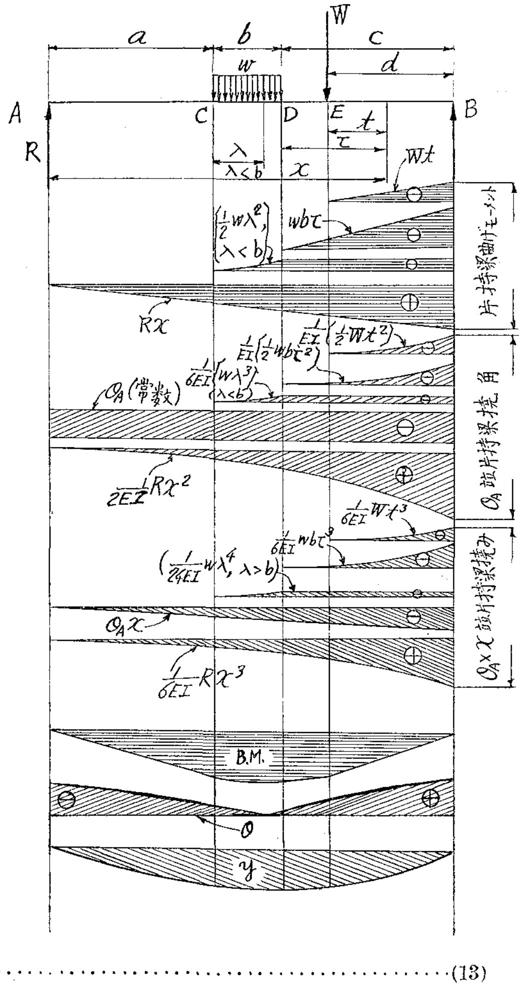
M:　片持梁曲げモーメント…………(10)

$\dfrac{dy}{dx}, \theta$:　（左支端に於ける撓角）＋（**片持梁撓角**）…………(11)

y, d:　（左支端に於ける撓角）×（左支端よりの距離）＋（**片持梁撓**）……(12)

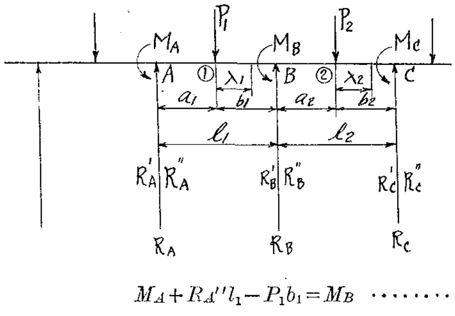
と書き又は考へ得る事となる，但し茲に用ひたる**片持梁撓角及片持梁撓**なる語は片持梁の撓角及片持梁の撓其の物を表示してゐるといふ意味に非ずして，他の便宜上より斯く命名したのである。其は次に 1，2 の応用を示す事に依りて判然するものと思はる。

図-2.　單純梁に於ける荷重，剪断力，曲げモーメント，撓角竝に撓表示図



3.　クラペイロンの３力率定理の説明　図-3 の様に反力 R_A, R_B, R_C は支點の兩側の反力に分離して考へて，本文に述ぶる表示法を用ふれば，

図-3.　連続梁の一部分



$$M_A+R_A''l_1-P_1b_1=M_B \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\theta_A+\frac{1}{EI}\left(M_Al_1+\frac{1}{2}R_A''l_1^2-\frac{1}{2}P_1b_1^2\right)=\theta_B \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\theta_Al_1+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_Al_1^2+\frac{1}{6}R_A''l_1^3-\frac{1}{6}P_1b_1^3\right)=0 \quad \cdots\cdots (15)$$

(13) 式より R_A'' を求め (14), (15) 兩式に代入して，R_A'' を消去した兩式を解きて，

$$\theta_A=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}l_1(2M_A+M_B)+\frac{P_1a_1l_1}{6l_1}(a_1+2b_1)\right\} \quad \cdots\cdots (14\,a)$$

$$\theta_B=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}l_1(M_A+2M_B)+\frac{P_1a_1b_1}{6l_1}(2a_1+b_1)\right\} \quad \cdots\cdots (15\,a)$$

θ_A は部材の左支端に於ける撓角なる故に BC 部材の左支端に於ては,

$$\theta_B=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}l_2(2M_B+M_C)+\frac{P_2a_2b_2}{6l_2}(a_2+2b_2)\right\} \quad \cdots\cdots (16)$$

(15 a)−(16) より,

$$l_1M_A+2(l_1+l_2)M_B+l_2M_C+\frac{P_1a_1b_1}{l_1}(2a_1+b_1)+\frac{P_2a_2b_2}{l_2}(a_2+2b_2)=0 \quad \cdots\cdots (17)$$

(17) 式に於ける第 4 項及第 5 項は單一集中荷重に對するものであるが等分布荷重の場合は積分法の考へに依りて容易に求めらるを以て玆には述べない。

4. 撓角撓度法の説明　前掲 **図-3** に對して, 本文に述ぶる表示法を用ふれば, AB 部材に對しては,

$$M_{AB}+R_A''l_1-P_1b_1+M_{BA}=0 \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\theta_{AB}+\frac{1}{EI}\left(M_{AB}l_1+\frac{1}{2}R_A''l_1^2-\frac{1}{2}P_1b_1^2\right)=\theta_{BA} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\theta_{AB}l_1+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{AB}l_1^2+\frac{1}{6}R_A''l_1^3-\frac{1}{6}P_1b_1^3\right)=d_B \quad \cdots\cdots (20)$$

(18) 式より R_A'' を求め, (19), (20) 兩式に代入して R_A'' を消去した兩式を解きて

$$M_{AB}=\frac{2EI}{l_1}\left(-2\theta_{AB}-\theta_B+3\frac{d_B}{l_1}\right)-\frac{P_1a_1b_1^2}{l_1^2} \quad \cdots\cdots (21)$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{l_1}\left(-2\theta_{BA}-\theta_A+3\frac{d_B}{l_1}\right)+\frac{P_1a_1^2b_1}{l_1^2} \quad \cdots\cdots (22)$$

本文に於ては θ 及 d は右廻りが負となれるを以て斯くの如き符號となつた。

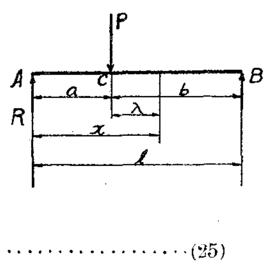
5. 單純梁の撓公式　**図-4** に於ては,

$$\theta_Al+\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}Rl^3-\frac{1}{6}Pb^3\right]=0 \quad \cdots\cdots (23)$$

$$\therefore\quad \theta_A=-\frac{1}{6EIl}(Rl^3-Pb^3) \quad \cdots\cdots (24)$$

但し, $R=\frac{b}{l}P$,

図-4. 單一集中荷重を受くる單純梁



從つて, AC 區間に於ては,

$$d=\theta_Ax+\frac{1}{6EI}Rx^3 \quad \cdots\cdots (25)$$

又 CB 區間に於ては,

$$d=\theta_Ax+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rx^3-\frac{1}{6}P\lambda^3\right) \quad \cdots\cdots (26)$$

尙 C 點に於ては, (24) 式を (25) 式に代入して, $x=a$ とすればよく,

$$d_C=-\frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

又 **図-5** に於ては

$$\theta_A l+\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}Rl^3-\frac{1}{6}P_1b_1{}^3-\frac{1}{6}P_2b_2{}^3\right]=0$$

$$\therefore\quad \theta_A=-\frac{1}{6EIl}(Rl^3-P_1b_1{}^3-P_2b_2{}^3)\quad\cdots\cdots(27)$$

但し，　$R=\frac{1}{l}(P_1b_1+P_2b_2)$

從つて，AC 區間に於ては，

$$d=\theta_A x+\frac{1}{6EI}Rx^3\cdots\cdots(28)$$

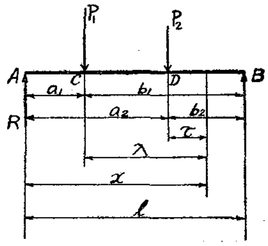
又 CD 區間に於ては，

$$d=\theta_A x+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rx^3-\frac{1}{6}P_1\lambda^3\right)\quad\cdots\cdots(29)$$

又 DB 區間に於ては，

$$d=\theta_A x+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rx^3-\frac{1}{6}P_1\lambda^3-\frac{1}{6}P_2\tau^3\right)\quad\cdots\cdots(30)$$

圖-5.　2個の集中荷重を受くる單純梁



6.　一端鉸，他端固定梁の撓公式　**圖-6** に於ては，

$$\theta_A+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Rl^2-\frac{1}{2}Pb^2\right)=0\cdots\cdots(31)$$

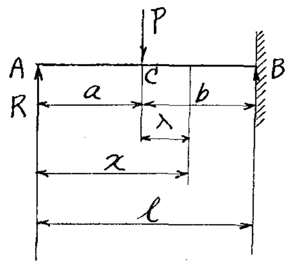
$$\theta_A l+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Rl^3-\frac{1}{6}Pb^3\right)=0\cdots\cdots(32)$$

此の兩式を解きて，

$$R=\frac{Pb^2(2l+a)}{2l^3}\cdots\cdots(33)$$

$$\theta_A=\frac{Pab^2}{4EIl}\quad\cdots\cdots(34)$$

圖-6.　一端鉸，他端固定梁



從つて，AC 區間に於ては，

$$d=\theta_A x+\frac{Rx^3}{6EI}\cdots\cdots(35)$$

又 CB 區間に於ては，

$$d=\theta_A x+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Rx^3-\frac{1}{6}P\lambda^3\right)\cdots\cdots(36)$$

以上に依りて明かなる如く，本文に述ぶる表示法に依れば，梁に關する理論を說明するにも，亦梁に關する問題を解くにも極めて便利であり，直截簡明に其の理論の根柢より直ちに結果に到達し得るのである。

而して本文に述べる所はモールの定理“$1/EI$倍された曲げモーメント圖を荷重と考へたる時の其の點の剪斷力は撓角に等しい„“$1/EI$倍された曲げモーメント圖を荷重と考へたる時の 其の點の曲げモーメントは撓に等しい„を定積分法に依りて其の儘數式に表示し，撓角及撓は之を梁の原位置線に對して測りたる結果となつてゐる。