構造力学史の一断面 トラスとはりの理論の展開*

高　岡　宣　善**

まえがき

土木工学のカリキュラムの中で，構造力学は専門科目の基礎として重要な位置を占めているにもかかわらず，初学者にとっては無味乾燥で嫌いな科目の一つになっている．それは，従来この科目の講義においては，主として計算法のみが講述され，今日の構造力学体系が成立するまでの歴史的背景についてはあまり言及されなかったところに，一つの原因があるのかもしれない．著者はかねがねこの点をなんとか改めたいと思っていた．

すでに『土木学会誌』上においても最上教授が指摘されたように[1]，講義の中で専門分野の歴史的側面をも講述することに期待をかけている人びとも多いであろう．歴史を繙くことにより，われわれは学問体系の成立過程を知ることができると同時に，そこから多くの教訓を得ることができる．幸い，構造力学史の分野では優れた文献[3)~8)]が発表されている．以下の拙文は，構造力学史に対する一般の関心と興味を喚起するために，二，三のテーマを取り上げて若干の考察を試みたものである．

1. トラスの理論

われわれはまずトラス構造について考察しよう．建築構造用の簡単な木造トラスはおそらく太古から使われていたであろうが，橋構造としての木造トラスもすでにローマ時代から使われていた．山国であるスイスは，今日でも各地に木造トラスが多数架設されているが，橋梁工学史上有名なのは 1757 年に大工の J.U. Grubenmann がシャッフハウゼンのライン河上にかけたスパン 52 m および 59 m の木造トラスである．

1804 年に Richard Trevithick が蒸気機関車を発明して軌道上を初めて走行させ，続いて 1825 年に George Stephenson (1781～1848) がストックトンとダーリントンの間を走る Locomotion 号をつくり，かくして鉄道時代の幕があけられた．鉄道建設の進展とともに，橋の設計と架設は，工学上の重要問題となった．そして，Sir Henry Bessemer (1813～1898) が転炉法[a)]を完成したおかげで，簡単な操作で多量の鉄鋼が生産されるようになり，木造トラスに代わって金属トラスが脚光をあびるようになった．

金属トラスを最初に建設したのはアメリカ人の Squire Whipple で，1840 年のことといわれている．彼はまた静定トラスの解析理論をまとめた最初の著書 (*A Work on Bridge-Building*. New York, 1847) を出版したことでも知られている．イギリスで Warren 型トラスが架設されたのは 1846 年である．著名な技術者 William

* 本文は昭和 51 年 6 月 25～26 日に松江市で開催された，西日本高校土木教育研究会での講演をとりまとめたものである．

** 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

a) Bessemer はクリミヤ戦争 (1853～1856) に際してナポレオン三世の出した懸賞にひかれて，大砲に使う良質鋼の製法を研究し，ついに転炉法の技術を考案した由である．

Fairbairn (1789～1874) の著書によれば，1850 年ころに W.B. Blood が Warren トラスの解析法を提示しているそうである．

ロシアでは延長距離の非常に長い鉄道を敷設しなければならないという地理的条件から，木橋が広く使用された．Д.И. Журавский (ジュラブスキー，1821～1891) が Howe 型トラスの設計理論を，ロシア科学アカデミーへ提出したのは 1854 年である．

トラスを解くための解析的手法の発展に大きく貢献したのは，ドイツの技術者 J.W. Schwedler と August Ritter (1847～1906) であり，また図式解法を発展させたのは Karl Culmann (1821～1881) である．Culmann は 1849 年から 1852 年にかけてイギリスとアメリカ合衆国に旅行し，各種の橋梁構造を見学し，技術者たちと討議することによって，橋梁工学に関する知識を深めた．彼の著書 (*Die Graphische Statik*. Band I, 1865) は E. Winkler (1835～1888) や Otto Mohr (1835～1818) に大きな影響を与え，またクレモナ応力図で有名なミラノ工科大学の Luigi Cremona 教授 (1830～1903) によっても利用されている．

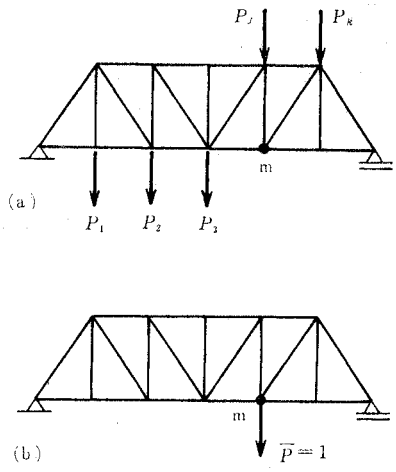
平面トラスのみならず，立体トラスをも含めたトラスの基礎理論を初めて詳しく論じたのはライプチッヒ大学の天文学教授 A.F. Möbius (1790～1868) である．彼の研究は約 40 年近くも技術者たちに知られないままであったが，その重要性は O. Mohr の指摘により人びとに認識された．August Föppl (1854～1924) は Möbius の理論を知らずに，彼独自のトラス理論をつくりあげた (1892)．

今日，橋梁用トラス型式としては，Howe 型[b]，Pratt 型[c]，Warren 型，K 型などがよく用いられるが，トラスの骨組がこのような明快な形になるまでには，多くの型式が試みられている．

さて，不静定トラスを解くためには，トラスの弾性変形を計算する必要がある．われわれは，ここで James Clerk Maxwell (1831～1879) の研究をふり返ってみよう．

Maxwell はまず図—1 (a) に示すような荷重 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ を受ける静定トラスの任意の節点 m のたわみ δ_m の計算から始める．そのために，彼は図—1 (b) に示すような，節点 m のみに単位荷重 $\bar{P}=1$ を受けるトラスを考え，また同図 (a)，(b) の各載荷状態における任意の部材 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ の部材力をそれぞれ S_i および $\bar{S}_i$ とおく．そして，Benoit Paul Emile Clapevron (1799～1869) によって導かれていた Clapeyron の定理を援用して

b) William Howe が 1840 年に特許をとったトラス型式である．
c) Thomas W. Pratt と Cabb が 1844 年に考案したトラス型式である．



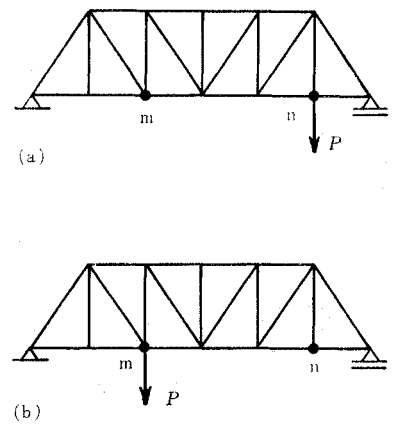
図—1 節点 m のたわみの計算

$$\delta_m=\sum_i \frac{S_i\bar{S}_i l_i}{EA_i} \quad \cdots\cdots(1)$$

となることを見い出した．上式中，E は部材材料の弾性係数，A_i および l_i は部材 i の断面積および部材長である．

図—1 (a) の節点 m のたわみを求めるのに，同図 (b) のような載荷状態を導入したというところに Maxwell の発見の偉大なところがある．このような，今から見ればそれ自身は非常に小さなことであるにもかかわらず，応用範囲の広い考え方の発見こそ，独創的な発見というべきであろう．

トラスのたわみに関する研究の過程で，Maxwell は図—2 (a) に示すような載荷状態のトラスの節点 m のたわみ δ_{mn} と同図 (b) に示す載荷状態のトラスの節点 n のたわみ δ_{nm} との間には，$\delta_{mn}=\delta_{nm}$ という関係があることを発見した．Maxwell の相反作用の定理と呼ばれるこの関係式は，その後イタリアの数学者 Enrico Betti (1823～1892) によって 1872 年に一般化され，構造力学



図—2 Maxwell の相反作用の定理

の中で重要な位置を占めるようになった[d].

上述のように，トラスの弾性変形の計算公式を誘導した Maxwell にとって，不静定トラスを解くことは，もはや容易なことであった．しかしながら，実用上非常に重要な彼の研究は，その後約 30 年間技術者たちに全く注目されなかったが，その原因はどこにあるのであろうか？ それは，彼が自分の理論の説明に適切な表現方法を採用せず，また実際問題への応用例をも併せて提示しなかったからである．トラスの図解法についても Maxwell は優れた方法を考案したにもかかわらず，その説明がわかりにくかったために，彼の手法は Cremona 応力図と呼ばれることになったのである．1874 年から 1875 年にかけて O. Mohr は Maxwell とは独立に相反作用の定理を発見し，それを用いて構造力学上の問題を解く例題を示したために，この方法は Maxwell-Mohr 法と呼ばれている．

Castigliano の定理を発見した Carlo Alberto Castigliano (1847～1884) は，彼の第 2 定理[e] を用いて不静定トラスを解く方法を示した．夭逝したこの偉大な技術者の定理が，広く一般に理解されるようになったのは，1879 年に彼の著書が出版されて以来のことである．この著書の中では，Menabrea の定理の完全な証明とその数値計算例が示されている[g].

2. はりの理論

トラスとともに橋梁構造として重要なはりの問題へ話題を移そう．

はりの強さを最初に論じたのは Galileo Galilei (1564～1642) であった．しかしながら，彼の理論は正しい結果を与えるものではなかった．それは，材料の弾性法則がその当時は未知であり，またはり断面の応力分布に関する彼の仮定が間違っていたことによる．17 世紀に入って，フランスの E. Mariotte 神父 (1620～1684) によって，材料の弾性[f] を考慮した，曲げ理論が展開された．Galileo の理論によるはりの破壊荷重は正解値の 3 倍であったのに対し，彼の理論によるそれは正解値の 2 倍であった．

微積分学を援用してはりの弾性曲線を初めて研究したのは Jacob Bernouilli (1654～1705) であり，それは 1691 年から 1705 年にかけてのことである．今日，横断面の平面保持の仮定として知られている仮定を初めて用いて，彼ははりの弾性曲線 $y=y(x)$ の微分方程式

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''(x)}{\{1+y'^2(x)\}^{3/2}}=C\cdot M(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

を誘導した．上式中，C ははりの断面定数であり，また $M(x)$ は断面 x における曲げモーメントである．

はりの理論を発展させたのは Johann Bernoulli (1667～1748; Jacob の弟) の弟子である Leonhard Euler (1707～1783) である．彼が初めて取り扱った柱の座屈理論 (1757) は，200 年後の今日においてもなお盛んに研究されているテーマである．新しい研究をはじめるには，まず適切な形で問題を設定する必要がある．Euler の座屈問題のごときは，問題設定そのものがすでに独創的な研究であると考えられる好例である．スイス生まれの Euler は，1727 年にペテルブルグにあるロシア学士院に招かれて以来，死ぬまでペテルブルグとベルリンで研究生活を送った．彼は当時の≪頭脳流出≫の一例というべきであろうか．

18 世紀に，材料力学と弾性学の発展に貢献したのは Charles Augustin Coulomb (1736～1806) である．曲げを受けるはりの横断面は中立軸[g] によって 2 分され，一方の側には圧縮が，他の側には引張りがそれぞれ発生していると彼は仮定した．彼はさらにはりの横断面にはせん断力によってせん断応力が惹起されるということを初めて指摘した．

19 世紀の初頭に弾性学は Louis-Marie-Henri Navier (1785～1836) によって飛躍的発展をとげた．Ecole des Ponts et Chaussées における彼の講義をまとめた著書の第 1 版は 1826 年に出版された．本書の第 3 章において，彼は一般的なはりの曲げ理論を展開した．曲げモーメント M を受ける一様断面ばりの中立軸は横断面の図心をとおり，弾性曲線の微分方程式は，たわみが微小であれば

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

と表わされることが示された．この式は式 (2) と同じものであるが，Jacob Bernoulli は片持ばりの自由端に，1 個の集中荷重が載荷された場合について考えたのに反し，Navier は任意の横荷重を受ける単純ばりについて式 (3) が成立することを示した．

Navier のような偉大な研究者といえども，その研究成果がすべて正しいとは限らなかった．例えば中立軸の位置を決定するための，彼の最初の方法は間違っていた[h]．はりの最大曲げモーメントは荷重群の重心の下で生じる

d) 相反作用の定理は，その後も主としてイタリアにおいて研究され，R. Land (1887), Vito Volterra (1905), G. Colonnetti (1912) の各相反作用の定理が示され，1938 年には V. Volterra によって最も一般的な形にまとめられた[5].

e) これはまた最小仕事の定理，あるいは，この定理を最初に発見した人の名前をとって F. Menabrea (1809～1896) の定理とも呼ばれる．

f) 彼は Robert Hooke (1635～1703; 1678 年に Hooke の法則を発見) とは独立に，1680 年に応力とひずみとの間の比例関係を発見した．ちなみに，彼は気体に関する Boyle-Mariotte の法則の発見者でもある．

g) 中立軸という言葉はイギリスの技術者 Thomas Tredgold (1788～1829) が初めて使用した．「建物の不安定性は，それをつくる技術者の学識の程度に反比例する」と警句を吐いたのは彼である．

h) 彼は E. Mariotte や Jacob Bernoulli と同様に，最初は，中立軸の位置の重要性を認識していなかったのである．

という誤った仮定も使用している．また，セーヌ河に架設するための吊橋の設計についても，Navier は設計ミスを犯している．さらに彼は，はりの曲げに関しては先駆者である Parent (1666～1716) や C.A. Coulomb の研究があることも知らなかったらしい．これは独創的な頭脳と時間の浪費である．Navier の場合に限らず，このようなケースは他にもいろいろある．И.М. Рабинович (ラビノビッチ) が指摘するように，「各研究者はこのような不経済をなくするために，入念な文献調査を行う必要がある．そして，これはたとえ彼の研究テーマは今のところ彼以外に研究する者がいない，という確信がある場合にもいえることである[8]」．

式 (3) の右辺に出ている弾性係数 E の概念を初めて導入したのは Thomas Young (1773～1829) であるが，材料力学に使用しやすい形で，弾性係数を定義したのは Navier である．なお，今日われわれが使用している応力度の概念を初めて導入したのは Augustin-Louis Cauchy (1789～1857) であるのに反し，Navier は分子間に働く分子力という概念を用いていた．

長方形断面のはりのせん断応力を求める一般的方法は，Д.И. Журавский (ジュラブスキー) によって 1844 年から 1850 年の間に研究されている．

連続ばりの不静定問題を最初に取り扱ったのは Navier (1825) であるが，その解析理論を発展させたのは B.P.E. Clapeyron である．その研究成果が，今日三連モーメント式の名で知られている定理であるが，この結論に達する過程において，Clapeyron は連続ばりを単純ばりの連なり (系) とみなす，という独創的な考えを思いついたのである (1849)．連続ばりの研究の先駆者としては J.A. Eytelwein (1808) や Navier がいるが，彼らの方法に比べて Clapeyron の方法ははるかに計算を簡単にした．彼の功績は単に便利な計算方法を発見したということにとどまらず，構造系を見る新しい観点を提示したという点にもある．すなわち，彼は静定基本系の適切な選び方という新しい問題を設定したのである．

3. 影 響 線

1820 年に鉄道の建設が始まって以来，重い列車荷重を受ける鉄道橋の設計[i] という重要な問題がもちあがってきた．これに関連して，最も不利な載荷位置の研究が始められた．しかしながら，影響線の概念が提示されたのは 1867 年のことであった．われわれはその間の研究の推移を眺めてみよう．

Д.И. Журавский は，鉄道橋の建設に従事していた 1840 年代に，Howe 型トラスに順次荷重群を載せて最悪の荷重状態を探究した．また，J.A.C. Bresse (1822～1833) は 1860 年代の中ごろに，連続ばりの研究において (定点法でいうところの) 定点の概念に到達し，この定点を利用して単一集中荷重による任意点のモーメント図を描くことにより，最も不利な載荷位置を知ろうとした．

このように，上述の二人の研究者は影響線の概念に非常に接近しているにもかかわらず，ついに陽な形で影響線を定義することはできなかった．その理由はどこにあるのであろうか？ それは，その当時まで，移動荷重という概念が研究者の脳裏に全然なかったからである．人びとは，暗黙のうちに荷重といえば列車荷重といえども死荷重と同様に静止しているものとして取り扱い，最悪の載荷状態とは，スパン全長にわたって荷重が満載されるときである，という先入観にとらわれていた．単一集中荷重がはりのたわみに及ぼす影響については，すでに 1808 年に J.A. Eytelwein (1764～1848) によって研究されていた．彼は載荷位置を変数 x で表示するというところまで進みながら，ついに影響線の概念をとりにがした．載荷位置を x で表わせば，はりの任意点のたわみ $y=y(x)$ は x の連続関数で表示されるということに彼は気づかなかった．かくして，≪荷重は静止しているもの≫という先入観は，1867 年まで構造力学の発展を阻害していたのである．

影響線を陽な形で表示する，という新しいアイディア——"新しい" というのは，移動荷重を文字どおり移動するものとして取り扱うという (現在ならば) ごく当然のことが初めて行われたからである．このアイディアは技術者の意識に一つの変革をもたらしたのである——，これは Emil Winkler (1835～1888) によって 1867 年に提唱され，翌 1868 年には O. Mohr が影響線の応用例を示した論文を発表した．さらに，1883 年から 1884 年にかけて В.Л. Киртичев (キルチチェフ，1845～1913) は，一般力および相反作用の定理を援用して，単純ばり，連続ばりおよびアーチの各種の影響線を求める方法を示した．

おわりに

構造物を建造する際には，技術者は構造力学の知識と材料学，施工法などの知識を総動員して，最適解を見い出すように努力しなければならない．一つのプロジェクトがいくつかのパートの総合活動の結果として生み出されるとき，個々のパートがそれぞれ最適解を与えていても，それが全体としての最適解を与えるとは限らない．この問題は構造総合，最適設計の問題として盛んに研究されるようになったものであり今後は構造設計の必須知識として教科課程の中で講述されるべきものであるが，紙幅の関係上本文では取り上げなかった．

i) 最初の鉄道橋は 1824 年に G. Stephenson によって建設された．

構造力学史に触れることにより，今まで平面的にしか理解していなかった構造力学を，立体的に眺めることが可能になるであろう．この点からも，教育研究活動の一環として構造力学史の研究・講述が盛んになることを希望する次第である．

本文をまとめるにあたり，下記の文献を参照した．各著者に深く謝意を表する．

参 考 文 献

1) 最上武雄：歴史から考える．土木学会誌，第57巻1号，pp. 3-6, 1972-1.
2) Stephen P. Timoshenko : History of Strength of Materials. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953.
3) Степан Прокофьевич Тимошенко : История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругосты и теории сооружений. Гостехиздат, Москва, 1957. これは上記2)のロシア語訳であるが，脚注は原著よりもくわしくなっている箇所がいくつかある．
4) 川口昌広訳：材料力学史．鹿島出版会，1974．これは上記2)の和訳である．
5) Enrico Volterra and J.H. Gaines : Advanced Strength of Materials. Prentice-Hall, Inc., 1971. 本書の各所には，材料力学史上著名な研究者の伝記が要領よくまとめられている．
6) István Szabó : Einführung in die Technische Mechanik. Sechste Auflage, Springer-Verlag, 1963.
7) István Szabó : Höhere Techniche Mechanik. Dritte Auflage, Springer-Verlag, 1965. 上記6)およびその続篇である7)の中には，応用力学の発展のあとを歴史的に概観した記述が各所にちりばめられている．
8) И.М. Рабинович : Некоторые уроки из истории строительной механики. ≪Строительная механика и расчет сооружений≫, 1970, No. 2, pp. 17-23.
9) И.М. Рабинович : К столетею теоремы Кастилиано. ≪Строительная механика и расчит сооружений≫, 1974, No. 6, pp. 70-73.

（1976.7.9 受付）

抄録作成協力者募集のお知らせ

特殊法人　日本科学技術情報センター情報部土建部門では，土木工学分野の国内雑誌と外国雑誌の抄録作成協力者を広く募集しています．この仕事は一論文を 150～300 字程度の日本語に要約するもので自宅でできます．抄録料金等詳細については下記あてお問合せ下さい．

文　献：Baumaschine und Bautecknik (西独), Brucke Strasse Tunnel (西独), Dock and Harbour Authority (英国), Ground Water (英国), Public Works (米国), Traffic Quaterly (米国), Strassenverkerstechnik (西独), Транспортное Строительство (ソ連) 等，その他，特に水理学，水文学，土木工学一般の外国雑誌，および土木工学分野の国内雑誌．

問合先：〒100 東京都千代田区永田町 2-5-2　電話 (03) 581-6411 (代)　内線 572, 570

破壊力学と材料強度講座

木原　博監修　全17巻

15フラクトグラフィ

北川英夫・小寺沢良一共編 A5・272頁／近刊

近年，破壊原因，破壊機構の研究の有力な一手段として広く活用されつつあるエレクトロン・マイクロフラクトグラフィについて，初めて書かれた本格的な入門書。写真を主として，初学者にもわかるよう，平易に解説されている。

1線形破壊力学入門

岡村弘之著　A5・240頁　¥2800

2き裂の弾性解析と応力拡大係数

石田　誠著　A5・240頁　¥3500

5マイクロメカニックス

＝転位と介在物

村外志夫・森　勉共著　A5・208頁　¥3300

転位に伴うひずみの考察から始めて，転位の作る応力場の計算法，楕円体介在物による応力場の計算法，応用に配慮したエネルギー論等を述べ，最後に，本書の基本的計算法が，実際面で有用なことを具体例について示す。

14多結晶体の強度と破壊

大南正瑛・塩沢和章共著　A5・240頁　¥3500

多結晶金属材料の塑性変形や疲労破壊における力学的挙動を研究する上での基本概念を平易に解説したもので，ミクロな構造や性質とどう関連づけられているかを，結晶塑性学および連続体力学の理論と実験的検証の立場から述べた。

〒102
東京都千代田区
九段南4-3-12
Tel(03)262-5256
振替東京4-44725

培風館

土木工学のためのプログラミング

＝FORTRAN　成岡昌夫編　A5・256頁／近刊

これからの大学土木工学におけるコンピュータ教育の重要性に答えるべき，新しい視点に立って書かれた書。テキストとしての講義時間数による制約を考慮し，FORTRAN の入門から，実際に活用されるプログラムまでを，平易に解説。