

対 談 ・ 現 代 数 学 を 語 る

野 口 広 ・ 佐 武 正 雄

数学と土木工学

佐 武 『土木学会誌』の創刊以来、純粋な数学者の方にご登場いただくのはおそらく初めてで、野口先生もびっくりされたことと思います。数学が理学の中でも最も純粋な分野であるのに対して、土木は応用的な工学の中の最たるもので実社会に即した総合的な工学です。そういう意味で、数学と土木工学は現在は両極端にあるわけですが、昔は数学者で物理学者でかつ土木技術者という方もおられたと聞いております。そこで、分化・分業化されて、一見かけ離れてしまった二つの分野で話し合ってみたら、というのが今日の企画の趣旨だと思いますが、今日の話がございましたときに、どんなふうにお感じになりましたか、まずうかがわせて下さい。

野 口 びっくりはしました。学会誌などを拝見しますとお互いに非常にかけ離れている分野であることは事実ですが、いまの先生のお話のとおり昔は数学者でも多方面に興味をもっていた人がいたわけで、現在の数学にも若干そんな傾向があります。それに、土木が多方面の工学に囲まれ接触しているのと同様、数学も自然科学、人文科学、その他あらゆるものに接触していて非常に緊密な位置にある。そういう点からすると、実際には割合似たような立場にあるのではないとも思えます。

佐 武 たしかに似た側面があると思うのです。数学

は純粋に物を観ることが必要だと思うのですが、土木工学も既成概念にとらわれたり画一的な見方をするのではなくて、原始的な物の見方といったものがが必要です。例えばトンネルの工事にしましても、地質や立地条件、施工条件によって、すべて工法が違ってきます。工場で大量生産するのとは異なり、その場所場所で非常に原始的なところまで掘り下げて考えてみるが必要なわけだ。そういう点で数学のもつ純粋な物の考え方に学ぶところがあるように思うのです。それから、土木というのは数学にのらないものであると従来見られていて、高校の進学指導などでも「数学が得意じゃない？ では、お前は土木へ行け」というようなことがあったと聞いています。しかし、現在では、土木の学問もある程度数学にのるようになっていきます。例えば、土の力学や各種の災害の解析といったものも、以前は経験に頼っていましたが、かなり数学にのるようになった。そういう意味では、他の工学の分野に比べてむしろ難しい数学が必要なようにも思えます。

野 口 原始的な新しい見方が必要である、というのは数学でも全く同じですね。本質的な数学の仕事は、いつでも新しい見方を与えることに尽きると思います。目に見える見えないの違いはあっても、内容は同じじゃないでしょうか？

それから、学会誌などを拝見してもここに使われている数学は大変新しい。特に数値解析とか OR とか確率

過程論など、一つにはコンピューターの使用という時代的な進歩があつてのことだと思いますが、土木工学が数学に近づいてきているということはいえますね。

現代数学の動向

佐 武 私ども現代の数学の最先端のことは非常に難しくわかりませんが、その動向といったことを少しお聞かせいただきたいのですが……。

野 口 現代数学の全体的な趨勢となるとわからないのですが、私のやっているごく一部の範囲を通して眺めたところをお話してみます。

現代数学は、1900年のパリの国際数学会でヒルベルト(D. Hilbert, 1862~1943年)¹⁾が提起した幾つかの問題に始まります。そのヒルベルトの問題の幾つかは現在までに解決され、幾つかは未解決です。われわれに身近な例では高木貞治先生の『類体論』なども、ヒルベルトの問題に刺激された結果です。それから、後藤先生や山辺先生や岩沢先生等々のリー(Lie)群の研究などもそうです。ほかにいろいろありますが、ヒルベルトの問題の解決は、物理学の数学的再構成という問題にまで入っていったのです。

ところが、おもしろいことに、この刺激によって、数学は非常に抽象的な方向に向かって動き出しました。例えば、ドイツにエミール・ネーター(A. Emmy Noether)という女性の学者がいましたが、それはもう現実を完全に抽象したところで、ものすごく深い理論を展開したわけです。例えば、群の概念は結晶の理論などの現実の現象にも利用されますが、研究の突き進んだ方向は概念そ

のもののあくなき究明だったわけです。

そうした態度は第二次大戦後特に激しくなり、具体的にはフランスの四、五人の若い数学者が、そうした方向づけのもとに集まって現代数学の再構築の試みを始めたことです。彼らの数学は〈ブルバキ(Bourbaki)流の数学〉と呼ばれています。これは、ちょうど古代ギリシャのアレキサンドリアでユークリッドがなし

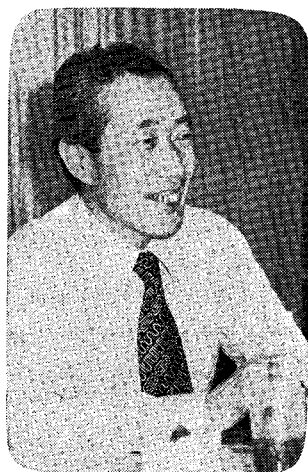
とげた「幾何学原論」の現代版ともいえるもので、完全に徹底した論理の積み重ねで概念を展開し、物理的な感覚的な比喻による論理の展開、概念の設定をいっさい排除しているのが特徴で、ものすごい純粹主義です。ヒルベルトがそのプログラムで数学の無矛盾を証明するため数学基礎論というのを提唱したのですが、彼らは一つにはこれを実行に移すには数学が非常に透明な形を要求されるので、こうした再構成を行ったのだと思います。こうしたスタイルの数学には、いい面と悪い面がありまして、いい面は興味の有無は別として、読んでいけばとにかく論理的には100%完璧に理解できることです。悪い点としては、理解したところで現実への対応が完全に切断されているため、そういった意味では結局何一つわからないということです。とにかくこれが、ごく最近までの現代数学の大きな流れでした。しかし、でき上がったブルバキの数学から受ける印象は確かに極端な抽象なんです。ブルバキ自身の仕事の進め方が完全に論理だけかという、これがもう絶対にそうではありません。algebraとか数論ですと、やはり整数が基本で、その具体的な問題をあくまでモデルとして自分の心の中にしっかりと据えておき、それを透明にするように理論が進められるわけです。幾何にしても同様で、単なる概念の積み重ねでトポロジーができたわけではなく、球面とかドーナツの表面とかを各人がこっそりと心の中に保ちながら、そしらぬ顔をして抽象的な論理を展開する、そういう妙な状態にあったわけです。プリンストンの教授で代表的なブルバキの一人であるアンドレ・ヴェイユ(André Weil)が、「われわれは人間精神の名誉のためにこの数学を創るのである」といっていますが、この言葉は、ごく最近までの現代数学の性格をよく象徴しているように思われます。

このように、現実からのアイソレーション(分離)という非常に高価な代償を払って、20世紀の数学は、いまだかつて、どの世紀にもなかったほどの画期的な進歩をとげた。そういうふうにいえると思います。

日本の数学界

佐 武 日本の数学界の国際的な位置とか今後の発展の方向はどうでしょう……。

野 口 日本数学会も、もう二、三年で創立100年を迎えますので、その時点で評価なども正式になされるかも知れませんが、現在フィールズ賞をとられた方がすでに2人もおられますし、また、例えば世界中で最もよく引用されている論文の統計を見ても——正確な数は忘れましたが、50ぐらいの中に日本の学者が2人入っています。全分野でそうだとはいえませんが、国際的にみ



佐 武 正 雄 氏

正会員 工博 東北大学教授
工学部土木工学科

でも一流だろうと思います。特に代数、整数論系統のレベルが高いというのが定評です。現在、20代、30代前半の若い数学者が従来になく大勢いますので、いままであまり優れなかった分野にも、独創的な研究が期待できると思います。

コンピュータの役割

佐 武 最近の数学の発展の中で、コンピュータの発達は重要な要素の一つだと思いますが、この点についてもお話をうかがいたいと思います。

私、最近、小学校で小さい電卓を使った教育をしているということを聞いて、計算力の養成という面からずいぶんまずいことだと思いました。しかし、実際に子供の使っているのを見ると、おもちゃをいじっている感じで喜んでやっている。要するに楽しみながら学ぶという点では、プラスになっているのではないかと思います。計算の過程がブラックボックスになっていることも、ある意味では興味をそそののに役立っているように思えますが……。

野 口 コンピューターの導入により、数学はいろいろな影響を受けました。その影響の中で、まず低次元のお話から先にいきますと、それによって数学専攻の学生の就職口が増大しました（笑）。就職口がふえたということは、健康で優秀な青年が集まってくることにつながります。従来、数学者というと先生にしかねないといふので、変わり者がくる傾向が強かったのですが、その傾向が全くなくなりました。

それから、ご指摘の電卓・ミニコンの普及で計算が簡略化された点です。導入する前には、子供の計算力の低下が大変心配されていたのですが——現実には低下しましたけれど——それは思ったほどでもなくて、かえって数学がいやだった子供たちが、若干数学的興味をもつようになった、そういう役割もしているようです。

それから、まあ高次元な話題としては、数学自身に深刻な影響を与えている点をあげることができます。例えば、絵かきさんが写真の発明で肖像画をきちんと描くという仕事から解放されたようなもので、 π を一生涯かかって計算するといった仕事を完全にご勘弁願えるようになりました。頭をからっぽにして、ばかみたくに計算しなくてよかったので、いつでも目的とする事柄を考えることに集中できる立場を得た、これがもう一つのメリットでして、冒頭にお話のあった〈新しい物の見方〉を見い出すことだけが数学の研究対象になったわけです。そこで、後でお話するカタストロフィー理論をつくったトム(R.Thom)は、『構造安定と形態形成』という膨大な著書の最後のところで、ちょっと皮肉めかし

て「私はなぜこんな夢みたいな話を書いたか。それは、世界中の数学者が計算にばかり血道を上げている、そういう人たちは大勢いるのだから、せめて一人ぐらいいは計算せずにばかみたいな夢を見てもよいのではないかと思って、私はここで夢を書いた」といっています。

佐 武 従来は、工学で実験といえば現場実験か模型実験だったのですが、最

近は電算機を使った数値的なシミュレーションが——限界はあると思いますが——非常に多くなっていますね。これも、電算機の一つの大きな効用だと思います。ここでちょっとうかがいたいのですが、幾何学的な性質というのは計算機にのりにくい、グラフ理論などはマトリックスで表わしてある程度のせることができるかと思いますが、一般的にはのりにくい、これはどうしてなのでしょう？

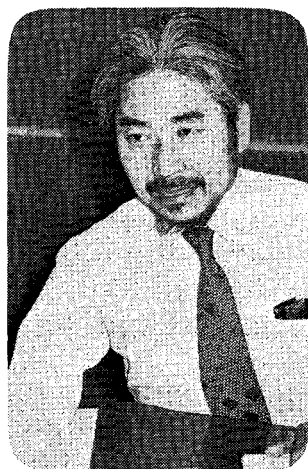
野 口 たしかに幾何が計算機でうまくいった例はあまり聞きません。グラフ理論なんかは、組合せ数学的な部分がコンピューターにのるので、全部がのるわけでもない。計算機の対象は終極的にディスクリート(discrete)なものです。幾何の対象は基本的に連続なものだという意味で、ぼくは初めから幾何学は計算と関係ないと思っています。ですから、連続なものを切り離して疎なものにすれば、その範囲でしつらなにか……。

佐 武 パターン認識の問題なんかは、幾何学を計算機にのせている一つの例だと思います。しかし、それも非常な手間をかけて簡単なことしかできない。やはり計算機には幾何学的な性格がないというか、逆にいうと幾何学には、それだけ数学の根源的な魅力があるということになるのかも知れませんが……。

野 口 ある意味では、その性質を抜き出したのがトポロジーだといわれています。

数学教育、数学の応用や勉強法は

佐 武 さきほどのお話のブルバキの数学は、フランスあたりでは数学教育にも大きな影響を与えていて、恐



野 口 広 氏

理博 早稲田大学教授
理工学部数学科

らくそれが日本にも及んで、最近、集合論を教えるのが云々という議論がなされているのではないかと思います……。

野 口 学校で集合論などは教え過ぎだというような批判は、前の教育課程の改革のときに数学の抽象的な面が強調され、それが初等中学教育に影響して少し行き過ぎになったということだと思いますが、フランスなどでやっているのは、ずっとラジカルですね。日本の場合はそんなに極端には取り入れていないと思います。それにしても計算力が落ちてきたといった批判はあるようですね。

佐 武 数学の応用とか数学の勉強の仕方などについて少しお話をうかがわせていただきたいと思います。考えてみると応用数学というのはちょっと変な言葉で、応用されない数学というのはないわけですから、極端に言えば小学校から大学まで習っている数学はすべて応用数学になってしまいます。その時点では応用されなくともいつかの日、何かの役に使われるということになると思います。数学の応用について、高木貞治先生がある随筆の中で「役に立つ立たないは物の側に価値が備わっているのではなく、役に立てる人間の側の問題である」というようなことを書いておられますが、要するに、よく理解しなければ応用できないということだと思います。そのために、われわれはとにかく数学を勉強しなくてはならないわけですが、学校で習わなかったような新しい分野の数学の勉強法——そんなにうまい方法はないのかもしれませんが、何かご意見をお聞かせ下さい。

野 口 純粋数学、応用数学の区別ですが、これは、結局そうした区別は、少なくとも数学の立場からはないと思います。それよりは例えばリーマン (Riemann) 幾何学がアインシュタインの相対性理論に応用されたように、後日、純粋数学に対応するりっぱな応用面が必ず現われるというのが数学の特徴のように思えます。そういうふうに見るとブルバキの数学は、確かに純粋数学であるといえますが、それは数学の仕事としてであって、全然応用につながらないという意味ではないと思います。先生のおっしゃったとおりで、哲学では予定調和というのでしょうか、とにかく人間が一生懸命考えたことは、そのときではないにしても、いつか必ず役に立つ。例えば、群が結晶の構造解明に役立ったり、写像の特異点の研究がいつの間にかカストロフィー (catastrophe) 理論につながっていくというふうに……。考えるときにはそういった、予感のような信念が何かあるように思います。そこで、よく考え理解すると、ある場合に使えるようになるというようなことになるのでしょうか。

新しい分野の数学の勉強法とか研究方法ですが、ジーマン (E.C. Zeeman) という数学者がいます。彼は最近カ

ストロフィー理論を人文科学とか医学などのいろいろの分野に応用して論文を書いています。彼のやり方は、例えば心臓の研究を始めると、すぐお医者さんと顔を突き合わせて議論するんです。いま刑務所の暴動の研究に没頭しているらしいのですが、すると今後は刑務所長さんやまわりの犯罪心理学者たちと毎週、定期的な会合をもつわけです。そんなふうに学際的に研究するのが一番早いのではないかと思います。本や論文は、そういう話し合いのうで探さないとくたびれもうけに終わる危険が大きいいし、本職の方が忙しくて、いやになるということもある。そう意味で、数学会とか何々学会といったところで、気楽に意見を交換する——まあこの対談なんかはその一環になればいいのですが——そういうムードは少なかったと思うので、今後とも助長されてゆくといいですね。

佐 武 学際的な研究のチャンスをつくることは、今後の学会活動として大きい課題でしょうが、個人的にはなかなか難しい点が多いのではないのでしょうか……。学会あたりでもう少し積極的に取り上げてやっていただけると有難いと思うのですが……。

野 口 何かうまい共通のテーマを設定して始めればいいかもしれませんね。ただ、個人的には本当に難しいですね。

佐 武 私どもが学生のころを振り返ってみますと、本というのはとても少なくて、例えば高木貞治の『解析概論』とか藤原松三郎の『代数学』とか非常にりっぱな良い本が少しあり、迷わず勉強ができたわけです。ところが、いまは同じ分野についてたくさんの本がありすぎて、どれを読んでいいのかわからないのが実情だと思います。学生にアドバイスするにも迷うぐらいですが、これはあまりいい傾向ではありませんね。

野 口 多々ますます弁ずというのは経済法則かもしれませんが、本の場合にはあまりあてはまらないみたいですね。

トポロジーの話

佐 武 では、この辺で先生のご専門のトポロジー³⁾、特にカストロフィー⁴⁾のお話をうかがわせて下さい。

野 口 トポロジーは、さっきのヒルベルトの問題と同じころ、20世紀初頭にフランスのポアンカレ (H. Poincaré, 1854~1912年) が始めたもので非常に素朴な図形の性質を考える幾何学のことです。素朴といいますが、物の長さ、角度、面積、体積といったものは、かなり教育を、受けないと計算できないわけですが、ここに紙が2枚あるということでしたら赤ん坊でもわかります。ここに2つの物のかたまりがあって、3つあるのと

は違う。かたまっているということは、1つの成分からできているということで、成分というのはトポロジー的な考え方です。トポロジーは、そういう非常に原始的な図形の性質を調べる数学のことです。

一番簡単な例だと、紙の上に円をかくと、円の内外とが2つに分かれます(図-1)。この円を変形させてもこの性質は変わりません。平面がぐるっとひとまわりする線で必ず2つの部分に分けられることはだれもが知っていることで、原始人もこれがわかっていたから囲みの中に動物を追い込めたわけでした。これは球面についても同様です。球面の場合は内と外がありませんが、2つの部分に分けられます(図-2)。ところが、図-3のドーナツの表面、トーラスといますが、トーラスを切断するような円を描いても2つの部分に分かれませんが、だからトーラスというのは、適当な1つの円周によって2

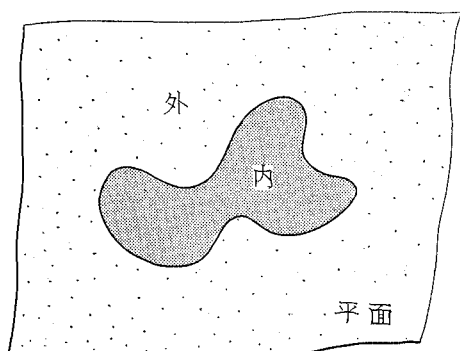


図-1 平面は円周によって内と外の2つの部分に分けられる

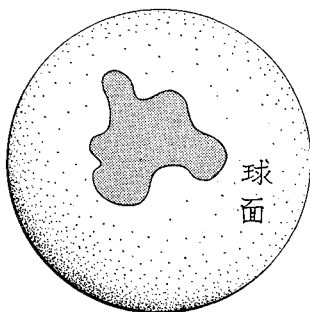


図-2 球面も円周によって2つの部分に分けられる

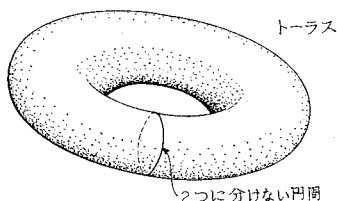
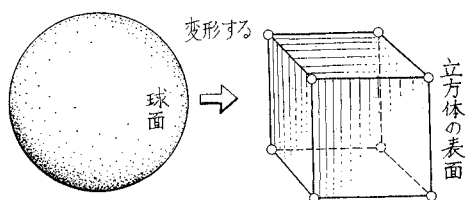
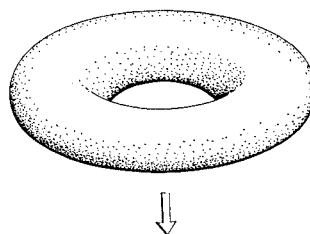


図-3 トーラスは円周によって2つの部分に分けられるとは限らない

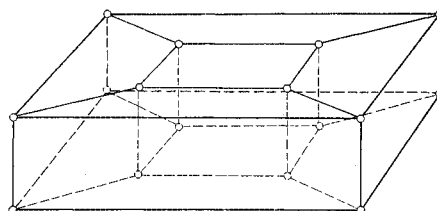


$$\text{オイラー指数} = \text{点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数} \\ 8 - 12 + 6 = 2$$

図-4 球面のオイラー指数は2である



↓
トーラスを角ばった図形に変形する



$$\text{オイラー指数} = \text{点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数} \\ 16 - 32 + 16 = 0$$

図-5 トーラスのオイラー指数は0であり、球面のオイラー指数とは異なる

つに分けられないような面であるともいえます。このような面の性質を、その面のトポロジー的な性質というわけなんです。こういう性質はある程度数で表わせます。例えば、図-4のように、球を立方体の表面に変形すると、面の数は6、辺の数は12、点の数は8あります。そこで点の数から辺の数を引いて面の数を足すと、 $8 - 12 + 6 = 2$ となります。同じように図-5のドーナツの場合を図に示すようにの図に変形して計算しますと、これはいつでも0になるのです。つまり面のトポロジー的な性質は、この数、オイラー指数で決まるわけで、こんな数を計算することが位相数学(トポロジー)なんです。

それでは、これが何に役立つかというと、こういうことがあります。たとえば、図-6のように空間に曲面を設定し、任意の点 x をとる。点 x の曲率半径はいろいろありますが、そのうちの最大値と最小値の積の逆数をガウスの平均曲率 κ といいます。これを曲面 M 全体で積分しますと

$$\int_M \kappa(x) d\omega = (\text{オイラー指数}) \times 2\pi$$

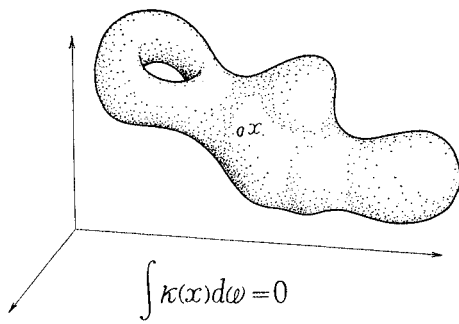


図-6 形を変化させても積分の値は

となります。したがって、この積分は、球面のときは 4π 、トーラスのとき必ず0になります。ナスやキュウリみたいな形の各点で曲率の違う、へんてこな球面でもやはり 2π になります。どんな形に変形しても、それは局所的な変形であって、全部まとめた平均はいつも同じ値になる。つまり、へこませたら、どこかで飛び出すということなんです。

これはガウスの曲率を用いた結果ですが、今度は曲率でなく、図-7のように、球面の各点での接線を考えまして、これを矢印で表わします。これをベクトル場といいます。球面の上でこういうものを考えるのは、実は微分方程式を考えているのと同じことなんです。微分方程式を考えるということは、幾何学的には各点で接線を考えることです。そして、微分方程式の解曲線はそれに接して動いていくような曲線を探すことなんです。ですからトポロジー的というと、微分方程式は連続的に動いていくベクトルの集合になる。ベクトル場では、場合によると、ある点でゼロベクトルの点がでできます。こうした点を特異点といいます。

佐 武 渦の中心のような点ですね。

野 口 そうです、渦の中心ですね。またはそこへ入り込んでくる（シンク）とか、そこから飛び出していく（ソース）とか、そういう点があるわけなんです。その個数は必ずオイラー指数に一致します。ですから、球

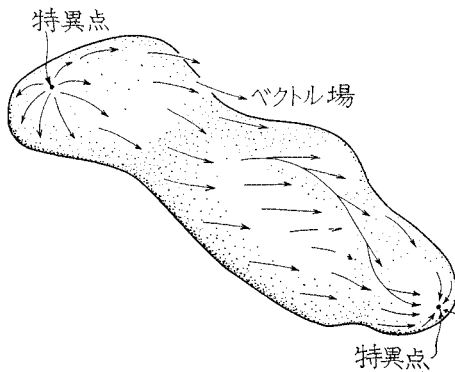


図-7 ベクトル場=微分方程式

面上のベクトル場をつくると、そういう渦の中心のような特異点が必ず2つ出てきます。トーラスの場合のベクトル場ならば特異点が0になる。そういうふうに、例は2つしかあげませんでしたが、トポロジーは、図形の定性的な性質を研究する数学です。

佐 武 幾何学は変換によって何が変わらないかによって分類される——要するに変換によって不変な性質を追求している、ということを知っていますが、トポロジーというのは、幾何学の中でも最も基本的な不変性を追求しているわけですね。

野 口 そのとおりです。

佐 武 話が少しそれますが、私どもが力学でやっていることのひとつは、力が作用したとき、例えば曲面がどう変形するかといったことの追求になるわけで、トポロジー的には変化しないが、曲率の変化が起こるというようなことになるのですが、こういうことは微分幾何学の研究対象というわけでしょうか？

野 口 幾何学では、例えば材料なら材料、面なら面の変形を全体的にとらえるときはトポロジー、もし局所的な話だけですませてよいのなら微分幾何学、というふうな区別をしています。ですから、トポロジーの結果というのは乱暴というか、おおづかみでそっけない。例えば、今お話したガウス・ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理では、どんな曲面をどう置いてもこういう値になるということだけで非常にそっけない……。

“カタストロフィー理論”とは

佐 武 私どもの力学では、連続的に変形していくものに亀裂が入ったり、極端な場合にはそれが壊れてしまったりすることが、ひとつの大きな研究テーマになっています。これはトポロジー的な変化が起きているということだと思います。そういうことがカタストロフィーの研究分野だと聞いておりますが……。

野 口 それがまさしくカタストロフィーだと思います。そもそもポアンカレがトポロジーの研究を始めたのは、天体の運動の問題がきっかけだったといわれています。多体問題といいまして、幾つかの天体が互いに影響を及ぼし合ったとき、軌跡はどうなるか、ということです。この解は普通の微分方程式からは求められない。そこで、近似計算をしなくてはならないわけですが、その場合、その形の大体の目安がないと、なかなかやりづらい。実際にエラーをどれくらいに見積って計算したらよいかをいうには、解の大体の姿がいる。つまり極端にいうと、閉軌道を描くとか、放物線で飛んでいってしまうとか、それがないと非常にむだも多いし、不安である。そういったおおざっぱな話が意味をもっていたので、ト

ポロジが発達してきたわけです。

そこで、いまの先生のご指摘どおり、ある条件下で閉軌道を描いていたところに、何かほかの影響が加わるとだんだん軌道が広がってゆき、ある点から先で閉軌道が壊れてしまう。原因は小さく連続的に変わっていくのだけれども、あるところで飛躍的に変わるカストロフィー現象が生ずるわけです。材料なんかはまさにそうして、力を加えていくと、あるところでバキッ／＼と折れてしまう。その研究がどうやらトポロジーでやれそうな目安がついてきた。それがカストロフィーの理論です。

大げさにいうと、いままでの数学はすべて連続を仮定しての理論でした。変数なりパラメーターなりが連続に変化するにもかかわらず、飛躍的に起こる不連続現象は電気回路の van der Pol の方程式など若干ありましたが、組織的な扱いはされなかった。そのトポロジーを微分トポロジーといいますが、この微積分を武器にしたトポロジーが最近すごく進歩しまして、トムのカストロフィーの定理という理論ができたわけです。物理学への応用例を名前だけちょっとあげてみますと、「相転位の現象」、「光の焦点 (caustics) の問題」、「座屈の問題」、「電気回路の非線形の振動の問題」、「気体力学における衝撃波の理論」……、そんなところに現在使われているようです。

佐 武 座屈の問題は、オイラー (L. Euler, 1707～1783 年) の研究以来ずいぶん歴史の古いものですが、複雑な構造物の座屈の問題は、いまもっていろいろ議論されており、一般的には力学の安定・不安定の問題がこの範疇に入ると思えます。最近、座屈についてのカストロフィー理論による新しい研究があるように聞いていますが、それを少しご紹介いただけないでしょうか。

野 口 ハリの座屈の研究には、イギリスのジーマンのカストロフィーの応用として研究した新しい論文があります。結果そのものは既知の事柄ですがただ方法論が非常に違っており、理解しやすい形になっています。

手短かに、図-8 のオイラーアーチの例で説明します。スプリングは2本のアームが平らになるように働くので、何もしないでおくともちゃんと水平にねるわけです。両端に β の力を徐々に加えてやると、しばらくはアームの水平のままですが、 β がある大きさに達すると、突然スプリングがぎゅっと縮まり、例えば、上に座屈が

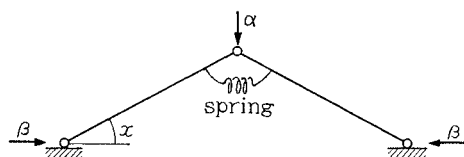


図-8 β を大きくすると上へ座屈し、次に α を増加させると下へ座屈する

起こる。さてそこで、今度は β をそのままに保っておいて、上から α という力を次第に加えてゆきます。初めのうちは影響が現われませんが、 α がある大きさに達すると、とたんに下側の座屈が起こるわけです。

これは、古典的な解析でも可能ですが、結果をカストロフィー理論調に書き直すと図-9 のような面を使って説明できます。これがカストロフィーモデルです。

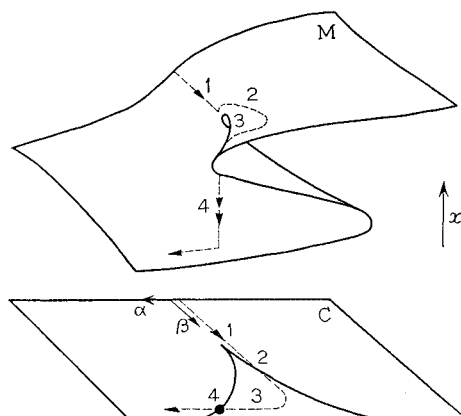


図-9 上方から下方への座屈のカストロフィーは曲面間の飛び移り<4>である

図-9 は、2つのコントロール要因、 α と β のつくるコントロール平面ですが、この面に垂直に高さの軸をとると、座屈の状態はその軸で表わされるわけです。図で<1>とある付近は高さ0で、実は原点なんです。そしてアームの両端をぐっと押していくと、つまり β がふえることですが、これは図の曲線に沿ってコントロールが動いてくる、と解釈されるわけです。さて、さらに β が大きくなって、コントロールが動いていくと、図-9 の曲面上では、動いてきた点が少し高く上ることになりそれが<2>の状態です。そして、 β はそのまま今度は α のコントロールを増してゆくと<2>から<3>の点へと動き、曲面の端に達しますと、点は面から離れてしまうはずですが、この面は座屈を表わすグラフなので、離れることはなく、ちょっとゆくと<4>のように下のほうへ一気に移ることになります。結局、カストロフィーは、この曲面のモデルでは、上の面から下の面に飛び降りるというように図形的に解釈できる……。

佐 武 いわゆる飛び移り現象ですね。

こういうふうに図形で説明を受けますと大変理解しやすいのですが、この曲面 M と平面 C の対応は、一般的にいうと、多様体の写像の問題になるのでしょうか。

多様体を自在に駆使する

野 口 そうですね。この理論は微分トポロジーの分野ですが、微分トポロジーで一番中心的な概念は、多様

体です。ここで、ちょっと多様体についてご説明しますと、例えば、円周なんかがそうで、これは線でできていますので一次元の多様体。球面やトーラスは——私たちは、球面を曲がってはいませんが平面と同じに見なします(球面から一点はずして広げてやると平面になります)。——これらは、面ですので二次元の多様体です。三次元の球面なんかも考えられます。私たちの住んでいる三次元空間に、どこか無限に遠いところに1点を加えてやればいいのです。ちょうど、平面に1点を加えると球面になるのと同じ理屈です。これは三次元の多様体になるわけです。このように、多様体は何次元のものでも考えられるのです。これは、平面とか空間というわれわれのごく親しい幾何学的対象を一般化しているわけで、カストロフイーの研究では、平面などといっしょに、多様体がひんばんに出てきて、研究対象の主役になってくるのです。つまり、多様体のうえで微分方程式を考えるわけです。

そこで、微分方程式を使うという意味で、カストロフイーは微分トポロジーの一部ですが、最近、この微分トポロジーの発展のひとつの方向として力学系(dynamical system)というのがございます。これは別に力学ばかりやっているのではなく、多様体の上でのベクトル場の理論を取り扱うもので、古典的なニュートンの微分方程式を現代的にとらえ直した理論だと思えばよいわけです。パークレーのスメール(S. Smale)という学者が特に力を入れて研究していますが、これは、早い話が、この世の中に考えられるすべての微分方程式を定性的に分類することをめざしているわけで、可能かどうかは別に、とにかくそういう方向で、恐ろしいほどの馬力でやっています。

カストロフイー理論とか、スメールの力学系という1970年代の数学の動きは、それ以前のブルバキ派のものとは性格が違います。それは、カストロフイーを見ると、座屈とか、さらに人文科学などへの応用があるように、明らかに応用をテーマにしている。創始者のトムの場合は、生物学という囊胚形成、つまり丸い卵がなぜへんてこな形のオタマジャクシに変化するのかを、カストロフイーを使って数学的に説明しようとしたわけでこれは、ブルバキのアイディアを全くひっくり返した立場です。また、スメールも、応用を強く意識して微分方程式の分類を行っており、電気回路理論、天体力学はもちろんのこと、経済学の問題まで、具体的に上げています。それで、1970年代の数学のニュートン時代との違いは、本質的には、ユークリッド空間が多様体になったことだけですが、この多様体を自在に駆使できるレベルに達したことにより、数学の視野は非常に広がりました。局所的にしかいえなかったことが、全体的にいえ

るようになったわけです。

今日お話ししたような数学の動向については、スメールが書いていますので、ここでご紹介しましょう。1970年の統計学のシンポジウムで行われた「数学と力学に対する個人的見解」という演説の原稿の最後に次のようにあります。

「ここ二、三十年来最も大切であった数学の傾向——むしろアメリカとヨーロッパにおいてではあるが——それは数学を応用からはっきり切り離すことであった。多くの指導的な数学者の間ですら応用をないがしろにする傾向が見られた。私はこの傾向が数学の健康的な側面であることは信じる。それにより純粋数学は非常に明析になった。それ自身の発展を深く追求できたからである。考えてみると、ニュートン、ライプニッツに始まって、いやそれ以前から見ても、現代ほど数学が他の科学の分野から分離されている時代はない。しかし、今からはこうした傾向を変えたほうがよい、と私は信じている。

私が行った応用数学への応用、多様体を中心としたこの考え方は、数学が他の分野との相互作用を深めていくうえにおいて主要な役割を果たし、また、そうした相互作用は非常に大きな希望をわれわれに与えるものになるだろう」と。

こういう数学がほしい

佐 武 土木の分野などでは、現象がある微分方程式とか変分原理などにのるようにモデル化できれば、これはもう数学の問題に置き換わったわけでして、結局こうした工学の研究は、いかにモデル化をうまくやるかということだと思うのです。そこで、お話をすると、微分方程式は非常によく整理されてゆく傾向にあり、それが微分トポロジーの分野であり、その中に特異点の問題があって、カストロフイーの研究になっている、と思うのですが、私どもの土木の分野には、微分方程式にのらないものもあります。また、特異点というのは、名前の示すとおり非常に特異なところで、あとは大体なめらかな連続的な点の集まりなのでしょうが、私どもの力学には、いわば特異点だらけというようなものもあるわけです。

例えば、砂の変形は連続体の普通の変形とは違う。位相的に同形な(homeomorphic)変形をするのではなく、右にあったのが、左に入れ替わったりするというような……。マクロ的には、1つのかたまりとしての変形ですが、内部の変形の機構は連続体としてのメカニズムでなくて、それこそいたるところでカストロフイーが起きているといったものです。こういうものはどうなんでしょうか？

野 口 全体的に見ると滑らかだというだけですね。

佐 武 ええ、それで、なんといいますか、特異点か特異点でなく、むしろあたりまえな点である、そういう数学ができてきたらなあ、と思うのです（笑）。

野 口 そうですね。やっとこ、特異点だけ不連続な場合が扱えるという希望を見出した状態ですが、やらなければならないことですね。ただ、今の段階ではまだ及ばないところが多いと思います。トムの定理は強力ですが、あるポテンシャルが支配している状況に対してだけしか適用できませんから、そうでないものに対しては、現状ではお手あげです。今の砂の変形なんかは典型的なものですね。これは、われわれの研究の進め方に対する具体的な、いい示唆だと思います。

佐 武 従来、連続体の力学を少し一般化した研究として、曲率やねじり率の発生といった微分幾何学的な取り扱いをいろいろ試みているわけですが、いわゆるトポロジー的な同形性まで失われていくような変形、しかもそれがごく特殊な点ではなく、広く分布しているというような内容のものを研究してゆく必要があると思います。

野 口 当然 stochastic な要素も入ってくるでしょうし……。

佐 武 たしかに stochastic な取り扱いをこうしたトポロジーの問題に取り入れてゆくことが今後の大きな研究課題だと思います。材料の中の不均一性は、小さな力を加えたり外したりしている範囲では平均化されているのですが、いよいよ壊れる段階に達すると、それが支配的になる。例えば、棒の引張試験などにしても、一様に粉々に壊れるのではなく、最も弱い点というかある不均一さの最も大きいところに集中して破壊現象が起こってくる。こういった不均一さというのは、ある意味ではカタストロフィーが分布している状態といえると思うのですが……。

野 口 コンクリートの壁なんかによく見る亀裂がありますね。あの形態については、一番よく起こりうる形であるということで説明できるそうですが、それ以上詳

しいことは……。

佐 武 ぼくらは素人ですので飛躍した推測になるかも知れませんが、幾何学は、不変な性質の追求から、不変なものが壊れる機構の追求へと変わってきているように思えますね。

野 口 数学的には、構造安定性というのはトムが導入した概念ですが、いまはもう数学のどの範囲でも最も重要な概念になってきています。これは裏がえしていえば、壊れやすさにもいろいろな段階がある、ということを示唆しておりますし……。そういう意味で、今日は砂の変形と破壊の問題について、いい研究材料になるお話をうかがいました。こういうお話をいろいろうかがえば数学も現実に近い、お役に立てる姿になっていくのではないかと思います。

佐 武 土木工学というのは建設的な分野ですが、ネガティブに見れば、壊れないようにということが基礎になっていると思います。これは力学に限らず、計画などの面でも破綻をきたさないものをつくっていくという点では同じことだと思います。ですから、今日のお話から考えますと、“カタストロフィーが起こらないように”というのが、簡単にいえば土木工学の主要なテーマといえるようですね。

野 口 ごろ合わせみたいですが、数学のほうでも、構造安定な概念をつかまえるのが主要なテーマであるというのと、非常によく似ていると思います。

佐 武 それでは、この辺で終わらせていただきます。どうもありがとうございました。

参考文献

- 1) C. リード・弥永健一訳：ヒルベルト、岩波書店、1972年。
- 2) D. ヒルベルト・一松信訳：解説：ヒルベルト数学の問題、共立出版、1969年。
- 3) 野口広：トポロジーの話題から、日本評論社、1973年。
- 4) 野口広：カタストロフィの理論、講談社、1973年。

（文責・編集部／昭和51年5月29日）
土木図書館5号室にて収録。

マーク
は語る



株式会社 技報堂
技報堂出版株式会社

技報堂の社名が、創設者大沼正吉社長

の科学技術報国の信念を率直に表わしているのと同じように、技の字を丸で囲んだ社章からも、技術への執念が感じとられる。

この社章は会社創立後1年あまり経過してから（昭和22年）会社との関係のあった図案家・木村氏（現日装図案社長）に制作を依頼、氏の試作品何点かの中から選定したものである。

丸の中に「技」の1字が置かれてある

ただだが、丸は地球を意味し、技はもちろん社名の頭文字であり、科学技術の技を意味する。

左上から円内を縦横に駆け巡って技の文字を形成するこの意匠には、地球上に科学技術を普及しようという願望がこめられている。

（千葉 登・記）