

MEM・最大エントロピー法による新しいスペクトルの計算法

日 野 幹 雄*

MEM とよばれる新しいスペクトルの計算法が 1967 年 John Parker Burg により地震波解析に関して提案され、その後種々の分野への浸透が急速に広がりつつある。スペクトル概念は今日では洪水予測・水資源計画・地震波解析・耐震設計・耐風設計・海洋波浪設計等、土木工学の各分野にも広く採り入れられ、その重要性はいうまでもない。さて、この MEM 法は、情報理論におけるエントロピーの概念に基づいた資料解析法で、従来の方法 (Blackman-Tukey, FFT (Cooley-Tukey)) に比べて、④ 短かいデータからもスペクトルの計算が可能である。⑤ スペクトルの分解能がきわめて高い、という圧倒的優秀性をもっている。この方法はまた、予測理論として最近注目を集めている自己回帰予測と表裏をなすものであることも明らかにされるにいたった。

理解のしやすさの点からは後に述べる自己回帰式から入るほうがずっとわかりやすいかもしれないが、順序としてエントロピーから説明することにする。

1. 最大エントロピーによるスペクトル—MEM

(1) 情報とエントロピー

エントロピーとは、本来熱力学や統計物理学の分野で定義された概念 (ある系に許される位相の量あるいは状態の数の対数) で、無秩序あるいは不規則さの順位や程

度を表わす。転じて、情報理論では未知 (無知) の度合いを表わす概念として導入された。

ある事象が A・B 2つの状態を採りうるとする。もし、前もって状態 A が生ずることがわかっていれば、すなわち A の起こる確率は 1, B の起こる確率は 0 であるならば、未来についての不確定さはなく、新しい情報のもつ意味はない。これに反し、AB の起こる確率がそれぞれ p および $q=1-p$ であるとき、確率 p をもつ事象 A が生じたとすれば、これの与える情報量を $I_A = \log_2(1/p)$ と定義しう。実際、事象 A の起こる確率が高く $p \approx 1$ であれば、情報量は 0 に近い。これに反しても、A の起こる確率が低く $p \approx 0$ ならば A が起こったという情報はとてつもなく大きく $I_A \rightarrow \infty$ ということになる。

ある事象のとりうる状態が m 個あり、それぞれ状態の起こる確率を $p_j (j=1, 2, \dots; m)$ とすれば、このうちの 1つの事象 j が生じたとき与えられる情報量は、

$$I_j = \log 1/p_j$$

である。情報エントロピーは“1回の試行によって得られるであろう情報量の期待値”として次のように定義される (Shannon, 1948)。

$$\begin{aligned} H &= E[I_j] \\ &= \sum_j p_j \log_2 \frac{1}{p_j} \\ &= - \sum_{j=1}^m p_j \log_2 p_j \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部 土木工学科

事象の採りうる状態が連続的であるとする、 $j \rightarrow x$, $p_j \rightarrow p(x)$ として、情報エントロピーは、

$$H = - \int p(x) \log p(x) dx \dots\dots\dots (2)$$

と書き直される。

(2) 時系列の情報エントロピーと相関行列 (Toeplitz 行列)

離散時系列、

$$x(0), x(4t), x(2 \cdot 4t), \dots, x(N \cdot 4t)$$

がある。各時刻のとりうる x の値 $x(k \cdot 4t) = x_k$ ($k=0, 1, \dots, N$) は連続量であるとする、式 (2) を $N+1$ 次元の場合に拡張して、エントロピーを定義しよう。いま、 $x_1, x_2, \dots, x_N$ の同時確率分布を $p(x_0, x_1, \dots, x_N)$ とすれば、エントロピーは、

$$H = - \int p(x_0, x_1, \dots, x_N) \log p(x_0, x_1, \dots, x_N) dV \dots\dots\dots (3)$$

と表わせる。もし、 p がガウス分布であれば、式 (3) は、

$$H = \frac{1}{2} \log [\text{Det } C_N] \dots\dots\dots (4)$$

となることが示される。ここに、 C_N は x_k の相関よりなる **Toeplitz** 行列である。

$$C_N = \begin{bmatrix} C(0) & C(-1) & \dots & C(-N) \\ C(1) & C(0) & & C(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N) & C(N-1) & \dots & C(0) \end{bmatrix} \dots\dots (5)$$

ここに、 $C(k)$: 自己相関、

$$C(k) = \overline{x(i)x(i-k)} \dots\dots\dots (6)$$

(3) 相関行列とスペクトル

スペクトルと相関は Wiener-Khintchine (ウィナー・ヒンチン) の公式により互いに Fourier 変換の関係にあることはよく知られている。同様に、Toeplitz 行列とスペクトルの間に次の関係が導かれている。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Det } C_N)^{1/(N+1)} = 2 f_N \exp \left\{ \frac{1}{2 f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log S(f) df \right\} \dots\dots (7)$$

ここに、 $f_N = 1/(2 \cdot 4t)$ は Nyquist 周波数とよばれる。

ここで、 $N \rightarrow \infty$ の場合に H が発散すること为了避免のためにエントロピー密度あるいはエントロピー率 h を定義する。これは、式 (4)、(7) により式 (8)、(9) のように書ける。

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log [\text{Det } C_N]^{1/(N+1)} \dots\dots\dots (8)$$

$$h = \frac{1}{4 f_N} \log \int_{-f_N}^{f_N} \log S(f) df + \frac{1}{2} \log_2 f_N \dots\dots\dots (9)$$

したがって、“時系列のエントロピー密度 h は、その時系列のスペクトルの対数を周波数について (Nyquist 周波数 f_N の範囲で) 積分した量である”ことが導かれた。

(4) MEM—最大エントロピー・スペクトル

スペクトルを計算するのには、スペクトルと自己相関の関係 (Wiener-Khintchine の公式)、

$$S(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{-i 2 \pi f k \Delta t} \dots\dots\dots (10)$$

を用いる。ここに、 $C(k)$ は前と同様自己相関である。しかし、われわれの測定データは有限であり、したがって式 (10) における十分大きなラグ k の自己相関関数は未知である。この部分からもたらされる不確定さを除くために、標準的なスペクトルの計算法である Blackman-Tukey 法では、通信理論により window 操作を行っている。

Burg (1967) はこの問題に対して、“スペクトルの Fourier 変換が相関関数であるという Wiener-Khintchine の関係の制約のもとで、エントロピーを増加させないように未知部分の自己相関関数を推定することがもっとも合理的である”と提案した。つまり、最大エントロピー法である。

$$\frac{\partial h}{\partial C(k)} = 0, \quad (k \geq N+1) \dots\dots\dots (11.1)$$

あるいは、

$$\frac{\partial H}{\partial C(k)} = 0 \dots\dots\dots (11.2)$$

したがって、 $C(0), C(1), \dots, C(N)$ がわかっている場合、新たな $C(N+1)$ は式 (4)、(6) より $\text{Det } C_{N+1}$ を最大にするように選ばばよい。これにより、 $C(N+1)$ は次の条件から導かれる。

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} C(1) & C(0) & \dots & C(N-1) \\ C(2) & C(1) & \dots & C(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N+1) & C(N) & \dots & C(1) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots (12)$$

あるいは、スペクトル $S(f)$ についての関係式 (11.1) を表わすと式 (9) より、

$$\int_{-f_N}^{f_N} \frac{e^{-i 2 \pi f k \Delta t}}{S(f)} df = 0 \quad (k \geq N+1) \dots\dots\dots (13)$$

でなければならない。これは、 $1/S$ が $2N+1$ 個の有限な級数で展開表示されることを示している。

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2 f_N} \sum_{k=-N}^N b_k e^{i 2 \pi f k \Delta t} \dots\dots\dots (14)$$

これは、 N 個の係数 ($r_1, r_2, \dots, r_N$, ただし $r_1=1$) により、

$$\frac{1}{S} = P_{N+1} \left(\sum_{k=0}^N r_k e^{i 2 \pi f k \Delta t} \right) \left(\sum_{k=0}^N r_k^* e^{-i 2 \pi f k \Delta t} \right) \dots\dots (15)$$

式 (10)、(15) より、

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k)Z^{-k} \right] \left[\sum_{k=0}^N \tau_k Z^k \right] = P_{N+1} / \left[\sum_{k=0}^N \tau_k^* Z^{-k} \right]$$

ここで、上式の左右の $Z=e^{i2\pi f \Delta t}$ 等ベキの項を比較することから次の $N+1$ 個の方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Z^0: & C(0) + \tau_1 C(1) + \tau_2 C(2) + \cdots + \tau_N C(N) = P_{N+1} \\ Z: & C(1) + \tau_1 C(0) + \tau_2 C(1) + \cdots + \tau_N C(N-1) = 0 \\ Z^2: & C(2) + \tau_1 C(1) + \tau_2 C(0) + \cdots + \tau_N C(N-2) = 0 \\ & \vdots \\ Z^N: & C(N) + \tau_1 C(N-1) + \tau_2 C(N-2) + \cdots + \tau_N C(0) = 0 \\ Z^{N+1}: & C(N+1) + \tau_1 C(N) + \tau_2 C(N-1) + \cdots + \tau_N C(1) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

[Yule-Walker 法]

ここに、 $(N+1)$ 個の $C(0), C(1), \dots, C(N)$ は既知とすれば、係数 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ は式 (16) の上から N 個の方程式を用いて求められ、 $C(N+1)$ は式 (12) により決定しうる (Yule-Walker 法)。

[Burg 法]

しかし、Burg の formulation は $C(N)$ をあらかじめ推定せずに、

$$\left[\begin{array}{cccc} C(0) & C(1) & \cdots & C(N) \\ C(1) & C(0) & \cdots & C(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N) & C(N-1) & \cdots & C(0) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_N \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_{N+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \dots\dots\dots(17)$$

とする。ここに、未知数は $N+2$ 個 ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N; C(N), P_N$) で方程式は $N+1$ 個である。したがって、Burg 方法では、未知数を決定するためのもう一つの判断基準をもうける必要がある (Burg, 1968; Andersen, 1974)。Burg は係数 τ_i をフィルターとみなし、これに信号を正および逆方向に通したときの出力の平均を最小に τ_i を決定した。

こうして、係数 τ_k が求まれば、式 (15) から MEM スペクトルは、

$$S(f) = \frac{dt P_{N+1}}{\left| \sum_{k=0}^N \tau_k e^{i2\pi f k \Delta t} \right|^2} \dots\dots\dots(18)$$

となる。係数 τ_k は次節ですぐ明らかにされる理由から予測誤差フィルター (Prediction-error filter) とよばれる。また、 P_{N+1} は予測誤差の分散である。

2. 自己回帰式 (AR—auto-regression) との関係

van den Bos (1971) は MEM と自己回帰式 の関係 を明らかにした。不規則変動 $x(t)$ ($x_i(t=i\Delta t)$ と書く)

が常微分方程式、

$$k_m \frac{d^m x}{dt^m} + k_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt} + \cdots + k_0 x = a(t) \dots\dots(19)$$

あるいは離散表示により、

$$x_i = \alpha_1 x_{i-1} + \alpha_2 x_{i-2} + \cdots + \alpha_m x_{i-m} + a_i \dots\dots(20)$$

($a(t)$: ランダム外力) で表わされるとする。この式は回帰予測式で、係数 $(1, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots)$ は予測誤差 $\varepsilon_i = x_i - \hat{x}_i$ を白色雑音 $\{a_i\}$ にするためのフィルターとみなせる。

上に、順次 x_{i-k} を掛けて期待値をとれば、 $E(x_{i-k} a_i) = 0$ であることを考慮して、

$$C(k) = \alpha_1 C(k-1) + \alpha_2 C(k-2) + \cdots + \alpha_m C(k-m) \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \dots\dots\dots(21)$$

の関係 (Yule-Walker 方程式) が得られる。 $C(j) = C(-j)$ であるから、これは式 (16) と同じである (ただし、 $\alpha_i = -\tau_i$)。もし、 $C(0), C(1), \dots, C(N)$ が与えられればこれらの関係から自己回帰式の係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ および未知の自己相関 $C(N+1)$ は次の関係から決定される。

$$\text{Det} \left[\begin{array}{cccc} C(1) & C(0) & \cdots & C(N-1) \\ C(2) & C(1) & \cdots & C(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(N+1) & C(N) & \cdots & C(1) \end{array} \right] = 0 \dots\dots(22)$$

上の関係式 (21), (22) はとりもなおさず最大エントロピーの関係式である。したがって、“MEM スペクトル解析は、不規則過程に自己回帰式をあてはめることに相等的しい”。事実、式 (20) の Z -変換から、

$$|X(Z)|^2 = |A(Z)|^2 / |1 - \alpha_1 Z - \alpha_2 Z^2 - \cdots - \alpha_N Z^N|^2$$

ここで、 $Z = \exp(-i2\pi f \Delta t)$ とおき、Laplace 変換に直せば、 $|X(f)|^2 = S(f)/2$ より、

$$S(f) = 2\sigma_a^2 \left/ \left| 1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(-i2\pi f j) \right|^2 \right. \dots\dots(23)$$

となる。これは MEM スペクトル式 (18) にほかならない。

3. MEM のアルゴリズム

MEM の計算アルゴリズムには、Burg 自身によるもののほか、Levinson 漸近関係を用いた Yule-Walker の方法などがある。しかし、分解能において Burg 法が優れている [Radoski 他, 1975; Ulrych & Bishop, 1975]。Burg の MEM スペクトルが優れているのは、一つにはスペクトルを時系列の情報エントロピーという概念でとらえ、Wiener-Khinchine 公式の制約条件のもとでこれを最大ならしめるようにスペクトル・相関関数を推定するという着想であり、もう一つは実際に MEM スペクトルを求めるための予測誤差フィルターの係数 τ_k および相関 $C(N)$ を逐次計算する漸化的アルゴリズムを提案したことにある。Yule-Walker 法では

自己相関関数（の推定値）をあらかじめ計算することが必要である。

また、予測誤差フィルター r_k の項数 N は多ければ多いほどよいというものではなく、予測誤差を最小とする最適数があり、これについては赤池の理論を併用すればよい。なお、注意しなければならないのは、相関 $C(k)$

はデータから単純に計算するのではなく、 $N=0$ から始めて式 (16) により、順次に推定した値である。

4. MEM とブラックマン・トーキー法との比較

MEM が他のスペクトル推定法に比べて圧倒的に優れているのは、序論にも述べたように ⑧ 短いデータからもスペクトルの計算が可能なことと、⑨ スペクトルの分解能が高いことである。これまでもっとも広く用いられてきた、Blackman-Turkey 法では分解能を高めようとするれば相関のラグを大きくとる必要があるが、実際上有限長さのデータから大きなラグの相関を計算するのに制約があるばかりでなく、推定精度すなわち安定度が悪くなるという相反関係がある（したがって Blackman-Turkey 法では、普通ラグは全データ長の 10% ぐらいを目安に選んでいる）。

さて、4, 64, 65, 124.5 Hz の 4 つの正弦波と 1/2 振幅のノイズを合成した不規則データ（図-1）を与えた場合

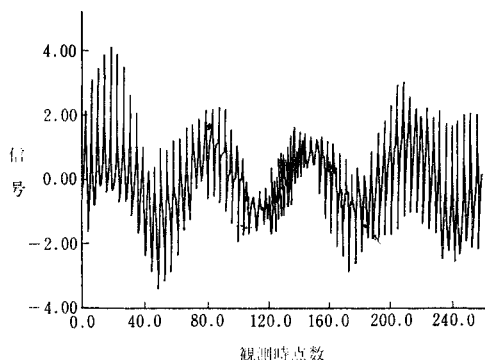


図-1 合成して作った不規則データ

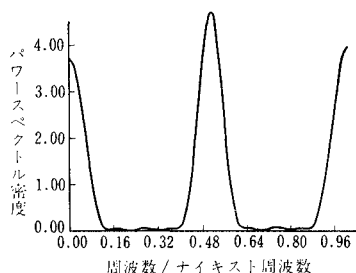


図-2 (a) Blackman-Turkey によるスペクトル (ラグ=20(8%))

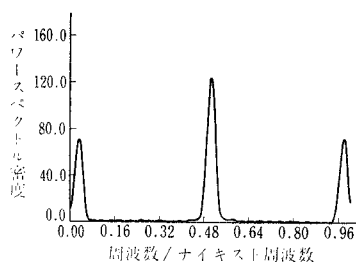


図-2 (c) Blackman-Turkey 法 (ラグ=60(23%))

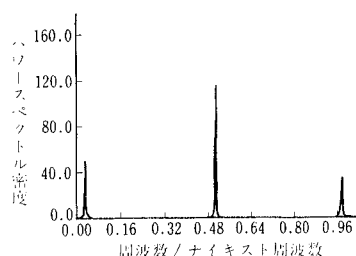


図-2 (b) Burg の MEM スペクトル (係数項数 20)

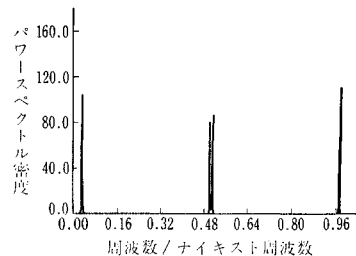


図-2 (d) Burg の MEM スペクトル (係数項数 60)

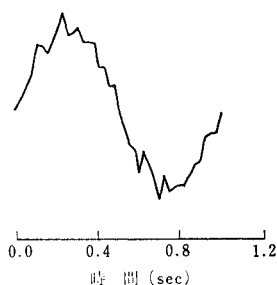


図-3 (a)

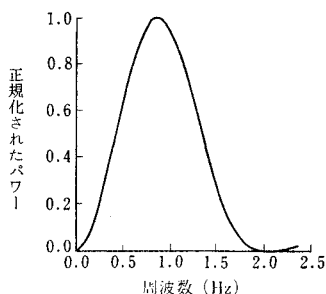


図-3 (b) Fourier 成分によるスペクトル

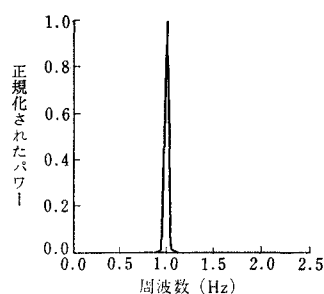


図-3 (c) Burg による MEM スペクトル

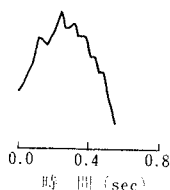


図-4 (a)

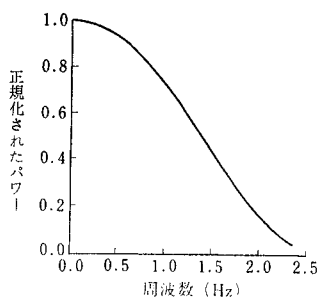


図-4 (b)

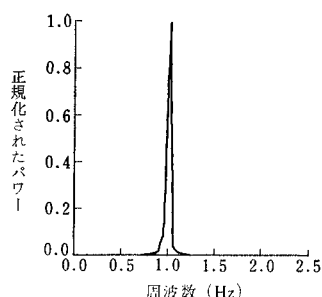


図-4 (c)

のスペクトルを MEM と Blackman-Turkey 法により推定した比較の例を示す(Radoski, Fougere, Zowolick, 1975). サンプル点数は 257 である. ラグ 20 (8%) の BT 法と係数 20 個の場合 MEM 法のスペクトルの比較を 図-2 (a), (b) に示す. MEM のほうがスペクトルは鋭く分解されている. さらに, ラグ 100 (23%) の場合の BT と係数 100 の場合の MEM を比較したのが 図-2 (c) (d) である. MEM 法では周波数のきわめて近い 2 つの波も分解されて 4 つの峰に分かれているが, BT 法では分解はできず 3 つの峰となっている.

次に正弦波に 10% 振幅の乱数列を重ねたものの一部分 (一周期の 100% および 57%) を与え, この短かいデータから従来の方法および Burg 法によりスペクトルを推定したものが 図-3 (a), (b), (c) と 図-4 (a), (b), (c) である. 従来の方法では正確なスペクトル推定は不可能であるが, Burg 法では, はっきりと線スペクトルが抽出されている.

参 考 文 献

- 1) Akaike, H.: Fitting autoregressive models for prediction, Ann. Inst. Statist. Math., **21**, 243-247 (1969 a).
- 2) Akaike, H.: Power spectrum estimation through autoregressive model fitting, Ann. Inst. Statist. Math., **21**, 407-419 (1969 b).
- 3) Andersen, M.: On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis, Geophysics, **39**, 69-72 (1974).
- 4) Box, G.E., & Jenkins G.H.: Time Series Analysis; Forecasting and Control. pp. 46-84, Holden-Day, San Francisco, (1970).
- 5) Burg, J.P.: Maximum entropy spectral analysis, paper presented at the 37th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Oklahoma City, Okla., Oct. 31, (1967).
- 6) Burg, J.P.: A new analysis technique for time series data, paper presented at Advanced Study Institute on Signal Processing, NATO, Enschede, Netherlands, (1968).

- 7) Burg, J.P.: The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra, Geophysics, **37**, 375-376, (1972).
- 8) Chen, W.Y., & Stegen, G.R.: Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, J. Geophys. Res., **79**, 3019-3022 (1974).
- 9) Edward, J.A., & Fitelson, M.M.: Notes on maximum-entropy processing, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-**19**, 232 (1973).
- 10) Jaynes, E.T.: Prior probabilities, IEEE Trans. Systems Sci. Cybern., SEC-**4**, 227-241 (1968).
- 11) Jenkins, G.M., & Watts, D.G.: Spectral Analysis and Its Applications, pp. 171-208, Holden-Day, San Francisco, (1969).
- 12) Lacoss, R.T.: Data adaptive spectral analysis methods, Geophysics, **36**, 661-675 (1971).
- 13) Levinson, H.: The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction, J. Math. Phys., **25**, 261-278 (1947).
- 14) Radoski, H.R., Fougere, P.F. & Zawalick, E.J.: A comparison of power spectral estimates and applications of the maximum entropy method, J. Geophys. Res., **80**, No. 4, 619-625 (1975).
- 15) Shannon, C.E.: A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J., **27**, 379-423 (1948).
- 16) Smylie, D.E., Clarke, G.K.C. & Ulrych, T.J.: Analysis of irregularities in the earth's rotation, in Methods in Computational Physics, **13**, 391-430, Academic, New York (1973).
- 17) Ulrych, T.J.: Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, J. Geophys. Res., **77**, 1396-1400 (1972 a).
- 18) Ulrych, T.J. & Bishop, T.N.: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Review of Geophy. and Space Phy. **73**, No. 1, 183-200 (1975).
- 19) Walker, G.: On periodicity in series of related terms, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **131**, 518-532 (1931).
- 20) Yule, G.U.: On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **226**, 267-298 (1927).

(1976.2.10・受付)

水 理 公 式 集	B5・630 頁	5 000 円	会員特価	4 500 円 (〒330 円)
水理公式集例題集	B5・120 頁	1 800 円	会員特価	1 600 円 (〒200 円)
水理実験指導書	B5・80 頁	330 円	会員特価	300 円 (〒160 円)