連続マルコフ過程論とその構造動力学への応用

高岡宣善*

1. はしがき

確率論的構造動力学の諸問題を解く手法としては，通常相関理論が用いられる。これは，不規則過程の座標 (ordinate) に関する一次および二次のモーメントを用いて理論を展開するものであって，工学上の多くの問題は，この理論の枠内で処理できる。

しかしながら，相関理論の手法を用いたのでは満足すべき解が得られない問題も数多くある。例えば，既知の確率特性を有する外乱の作用を受ける動力学系の応答の座標の確率分布を決定する問題はその一例である。超過確率の決定問題その他の信頼性問題を解くためには，不規則過程の確率分布法則を知っていなければならない。

任意の不規則過程について，上述のような問題を解くことは一般に非常に難しい。しかし，もし与えられた過程がマルコフ過程であるならば，これらの問題を解析的に解きうる。

マルコフ過程は，二次元分布法則によって過程を完全に特徴づけることができるという特別な性質をもった不規則過程であり，この過程の座標の分布法則は≪現在≫の時点における座標のみに依存し，≪過去≫においてこの過程がどのような状態にあったかということには無関係である。

マルコフ過程論は離散的および連続的な過程に関する理論に分かれるが，われわれにとって興味があるのは後者，すなわち連続マルコフ過程論である。そして，そのうちでも一次元理論よりも多次元理論の方が応用上重要である。以下においては，スペシュニコフの著書[1]を中心にして，この理論の応用方法を解説する。説明の都合上一次元の場合から話を始めるが，この場合の式のくわしい誘導については文献[1)~3)]を参照されたい。

2. 一次元マルコフ過程

この論文では連続的マルコフ過程を $U(t)$ で表わし，また，先行する時点（≪現在≫）を t, 後続する時点（≪未来≫）を τ で表わす。さらに，時点 t および τ における $U(t)$ の座標をそれぞれ X および Y と書く。すなわち

$$X=U(t),\ \ Y=U(\tau),\ \ t\leq\tau \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

もし $U(t)$ の座標が例えば x という値を有するならば，これを“$U(t)$ は x という状態にある”という。

順次に選んだいくつかの時点 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ における座標を考察する場合には，これを次のように表わす。

$$\left.\begin{array}{c}X_1=U(t_1),\ X_2=U(t_2),\ \cdots,\ X_k=U(t_k),\\ t_1\leq t_2\cdots\leq t_k.\end{array}\right\}\cdots (2)$$

マルコフ過程の基本的性質を数式で表わすために，不規則変数 X_k の確率密度 $f(x_k|x_1, \cdots, x_{k-1})$ を考えよう。これは先行する任意の時点 $t_1, \cdots, t_{k-1}$ における $U(t)$ の座標の値が与えられたときの X_k の条件付き確率密度を意味している。もし，任意の時点 $t_1<t_2<\cdots<t_k$ に対して

$$f(x_k|x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})=f(x_k|x_{k-1})\cdots\cdots (3)$$

という関係が成立するならば，$U(t)$ はマルコフ過程であるといわれる。式 (3) から帰結するように，マルコフ過程 $U(t)$ は初期確率密度 $f(x_1)$ と条件付き二次元確率密度 $f(x_k|x_{k-1})$ とを用いて表わすことができる。時点 $t=t_{k-1}$ における状態 x_{k-1} から時点 $t=t_k$ における状態 x_k へ推移する条件付き確率密度 $f(x_k|x_{k-1})$ は，推移確率密度と呼ばれる。

以下においては，条件付き確率密度 $f(y|x)$ は，これを4つの変数 $x, t; y, \tau$ の関数と考えて，$f(t, x; \tau, y)$ と書き表わすことにする。ただし，常に $t\leq\tau$ である（式（1）参照）[a]。

さて，$t<t'<\tau$ の関係を満たす任意の時点 t' における $U(t)$ の座標を Z とすると，推移確率密度 $f(t, x; \tau, y)$ は次の積分方程式を満たしている。

$$f(t, x; \tau, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x; t', z) f(t', z; \tau, y)dz. \cdots\cdots\cdots (4)$$

a) この論文では確率密度をすべて f で表わすことにする．したがって，例えば密度関数 $f(y)$ は関数 $f(x)$ の助変数 x を y で置きかえたものを意味するのではなくて，一般に両者はそれぞれ別の関数を表わすものとする．また，時刻 t あるいは τ における $f(t, x; \tau, y)$ の値をとくに問題にするという場合には，この条件付き確率密度を簡単に $f(t, x)$ あるいは $f(\tau, y)$ と記述する．

* 正会員　工博　鳥取大学教授　工学部土木工学科

ただし，上式中の 3 つの f は同一の式であり，ただその助変数のみを適当に変えたものである。式 (4) は Chapman-Kolmogoroff-Smoluchovski 方程式と呼ばれているが，グネジェンコはこれを一般化されたマルコフ方程式と名づけている[2]。この積分方程式の解は，以下に述べる特別な偏微分方程式（コルモゴロフの方程式）の解として与えられる。

マルコフ過程の一般的解析理論を組み立てたコルモゴロフ（A.H. Колмогоров）によれば，条件付き確率密度 $f(t, x;\ \tau, y)$ は，これを最初の状態のパラメーター (t, x) の関数と考えれば，偏微分方程式（コルモゴロフの第1方程式あるいは後退方程式）

$$\frac{\partial f}{\partial t}+a(t, x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}b(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \cdots\cdots(5)$$

を満たし，また，$f(t, x;\ \tau, y)$ を最終の状態を表わすパラメーター (τ, y) の関数と考える場合には，偏微分方程式（コルモゴロフの第2方程式あるいは前進方程式）

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)f]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)f]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

を満たしている。前進方程式 (6) はコルモゴロフによって厳密に証明される以前に，物理学においては Fokker-Planck 方程式の名のもとに用いられていた。

後退方程式 (5) に含まれている関数 $a(t, x)$ および $b(t, x)$ は，それぞれ次式によって決定される。

$$a(t, x)=\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\mathbf{E}[Y-X|X=x] \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$b(t, x)=\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\mathbf{E}[(Y-X)^2|X=x] \cdots\cdots(8)$$

式 (6) の係数 $a(\tau, y)$ および $b(\tau, y)$ は式 (7) および (8) の助変数 t, x をそれぞれ τ, y で置きかえたものに等しい。

コルモゴロフの方程式は放物線形の偏微分方程式に属する[4]。この方程式が一義的な解を有するためには，初期条件および境界条件が与えられていなければならない。

≪現在≫の時刻 t は τ の初期値と考えられる。したがって，もし $U(t)$ の初期値 x が与えられているものとすれば，初期条件は

$$\tau=t\ \text{のとき}\ f(t, x;\ \tau, y)=\delta(x-y) \cdots\cdots(9)$$

となる。上式は，$\tau=t$ のときには不規則変数 Y は不規則変数 X と一致するということから出てくる。

また，確率密度 f は不規則過程の変域の境界（端）において 0 にならなければならないという条件から，境界条件も簡単に決定される。

〔例題―1〕 統計的微分方程式

$$\frac{dU}{dt}+\alpha U=m\xi(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

において，α および m は正の定数であり，また $\xi(t)$ は期待値 $\bar{\xi}=\mathbf{E}[\xi(t)]=0$ および（自己）相関関数

$$K_\xi(t_2-t_1)=\delta(t_2-t_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

を有する白色雑音である。

ここで問題になるのは，外乱 $\xi(t)$ がいかなる条件を満たすときに解 $U(t)$ がマルコフ過程になるかということである。もし，式 (11) のほかに $\xi(t)$ の座標が独立な不規則変数であるという条件があれば，解 $U(t)$ はマルコフ過程となる。なぜならば $U(t)$ は1階の微分方程式の解であり，その初期値によって一義的に決定されるが，$\xi(t)$ の座標は互いに独立であるという前提により，この関数の過去の値は未来の値になんらの影響をも及ぼさないからである。

以下においては，われわれは式(11)のほかに，さらに"関数 $\xi(t)$ の各座標の間の確率的関係が十分急速に減少し，$\xi(t)$ を時間 t で積分したものは正規分布に従う"という条件を付加することによって解 $U(t)$ のマルコフ性を確保することにする。このような条件を満たす白色雑音を狭義の白色雑音という。

さて，式 (10) を時間インターバル $(t, t+\varDelta)$ において積分すると，次式が得られる。

$$Y-X=m\int_t^{t+\varDelta}\xi(t')dt'-\alpha\int_t^{t+\varDelta}U(t')dt' \cdots(12)$$

上式の両辺の期待値をとり，$\mathbf{E}[\xi(t')]=0$ であることに注意すれば

$$\mathbf{E}[Y-X|X=x]=-\alpha x\varDelta$$

となる。この結果を式 (7) に代入すれば

$$a(t, x)=-\alpha x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

さらに，式 (12) の両辺を2乗したものの期待値をとり，その際 $\varDelta$ の二次以上の高次微小量を省略すると

$$\mathbf{E}[(Y-X)^2|X=x]=m^2\varDelta$$

となるので，これを式 (8) に代入すれば

$$b(t, x)=m^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

コルモゴロフの第2方程式（Fokker-Planck 方程式）を用いるときの係数 a および b は，したがって

$$a(\tau, y)=-\alpha y,\quad b(\tau, y)=m^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

となるから，式 (6) は

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial y}(\alpha y f)+\frac{m^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

となる。

とくに，$\alpha=0$ のときには式 (16) は熱伝導（あるいは拡散）方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}=\frac{\beta_0}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

と同じになる（$\beta_0=m^2$）．初期条件 (9) に対する式 (17) の解は，偏微分方程式論で周知のように

$$f(\tau, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_0\tau}}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\beta_0\tau}\right] \cdots\cdots(18)$$

で与えられる[5)]。

3．多次元マルコフ過程

1階の統計的微分方程式の右辺に狭義の白色雑音が置かれている場合には，その解がマルコフ過程になるということは，すでに述べたとおりである。ところが，われわれの取り扱う微分方程式は2階の微分方程式であることが非常に多い。この場合には，たとえ方程式の右辺が白色雑音であっても，その解はマルコフ過程とはならない。なぜならば≪未来≫の過程の座標は，初期の座標のみならず≪現在≫の座標にも依存するからである。

このような高階の微分方程式に対しては，多次元マルコフ過程の理論を適用すればよい。

いま，n 個の不規則関数 $U_1(t), U_2(t), \cdots, U_n(t)$ を考え，時点 t におけるこれらの関数の座標を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表わし，また時点 $\tau(\tau>t)$ における座標を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ で表わすことにする。このとき，不規則変数 $X_1, \cdots, X_n$ の値 $x_1, \cdots, x_n$ が既知であるという条件のもとで不規則変数 $Y_1, \cdots, Y_n$ の分布法則が，時点 t に先行する任意の時点における関数 $U_1, \cdots, U_n$ の値には無関係であるならば，この n 次元不規則過程はマルコフ過程であるといわれる。そして，$U_j(t)$，$(j=1, \cdots, n)$ を n 次元マルコフ過程 $\boldsymbol{U}(t)$ の成分という。

一次元マルコフ過程の場合と同様に，多次元マルコフ過程を完全に特徴づけるものは，二次元の条件付き確率密度

$$f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n ; \tau, y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdots\cdots(19)$$

である[b)]。この関数 f は，次の一般化されたマルコフ方程式

$$f(t, \boldsymbol{x} ; \tau, \boldsymbol{y})=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(t, \boldsymbol{x} ; t', \boldsymbol{z})\cdot$$
$$\cdot f(t', \boldsymbol{z} ; \tau, \boldsymbol{y}) dz_1 dz_2 \cdots dz_n \cdots\cdots(20)$$

を満たしている。

さて，一次元過程の場合にコルモゴロフ方程を得たのと同様な議論を行うことにより，多次元マルコフ過程に対する一般化されたコルモゴロフ方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{r=1}^{n} a_r \frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{rj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_j}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_r}(a_r f)-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_j}(b_{rj} f)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

が得られる。ここに，第1方程式 (21) の中の係数 a_r および b_{rj} は $t, x_1, \cdots, x_n$ の関数であり，また第2方程式 (22) の中の係数 a_r および b_{rj} は，第1方程式の対応する係数の助変数を $t\to\tau$, $x_j\to y_j$ と置きかえたものである。

係数 a_r および b_{rj} は次式によって決定される。

$$a_r(t, x_2, \cdots, x_n)=\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\mathbf{E}[Y_r-X_r|x_1, \cdots, x_n] \cdots\cdots(23)$$

$$b_{rj}(t, x_1, \cdots, x_n)=\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\mathbf{E}[(Y_r-X_r)(Y_j-X_j)|x_1, \cdots, x_n] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

さて，$\xi_m(t)$，$(m=1, 2, \cdots, n)$ は互いに独立な狭義の白色雑音であり，これらは **2**．の場合と同様に期待値0およびデルタ相関を有するものとする。そうすると，ψ_r および φ_{rm} を既知の連続確定関数として，関数 $U_1(t), \cdots, U_n(t)$ が統計的連立微分方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU_r}{dt}&=\psi_r(t, U_1, \cdots, U_n)\\&\quad+\sum_{m=1}^{n}\varphi_{rm}(t, U_1, \cdots, U_n)\xi_m(t)\\&\qquad(r=1, 2, \cdots, n)\end{aligned}\right\}\cdots(25)$$

を満たしている場合には，コルモゴロフの第1方程式の係数 a_r および b_{rj} は次のようになる。

$$a_r(t, x_1, \cdots, x_n)=\psi_r(t, x_1, \cdots, x_n) \cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\left.\begin{aligned}&b_{rj}(t, x_1, \cdots, x_n)\\&\quad=\sum_{m=1}^{n}\varphi_{rm}(t, x_2, x_n)\varphi_{jm}(t, x_1, \cdots, x_n)\\&\qquad(r, j=1, 2, \cdots, n)\end{aligned}\right\}\cdots(27)$$

式 (27) からわかるように，b_{rj} は対称性 $(b_{rj}=b_{jr})$ を有する。

逆に，コルモゴロフ方程式の係数 a_r および b_{rj} が与えられたときには，マルコフ過程 $\boldsymbol{U}(t)$ の成分が満たすべき微分方程式 (25) の中の関数 ψ_r および φ_{rj} は以下のようにして定められる。

まず，式 (26) により，ψ_r は a_r から一義的に決定できる。ところが，b_{rj} は対称性を有するから，式 (27) から φ_{rm} を一義的に決定することはできない。しかし，φ_{rm} にも

$$\varphi_{rm}=\varphi_{mr} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

という対称性の条件を付加すれば，φ_{rm} は一義的に確定する。式 (24) の右辺の $\xi_m(t)$ が互いに独立な不規則関数であるという前提から，φ_{rm} の対称性という付加的条件を容認することができる。

コルモゴロフ方程式 (21) ないしは (22) の解を求めることは通常非常にむずかしいが，特別な場合として，係数 b_{rm} が定数であり，また係数 a_r が x_r（ないしは y_r）の1次関数である場合には，解を一般的な形で表示できる。以下，これについて説明しよう。

前提により，α_{rj} および α_r を定数として

b) 記述を簡略化するために，式 (19) を $f(t, \boldsymbol{x} ; \tau, \boldsymbol{y})$ と記述することもある。

$$a_r(\tau, y_1, \cdots, y_n)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{rj}y_j+\alpha_r \quad b_{rj}=\text{const.} \right\} \cdots\cdots\cdots(29)$$

と置く。

n 個の不規則関数 $U_j(t)$ の初期値 x_j, ($j=1, \cdots, n$) が与えられているものとすれば，式 (22) の初期条件は

$\tau=t$ のとき

$$f(t, x_2, \cdots, x_n; \tau, y_1, \cdots, y_n) =\delta(y_1-x_1)\delta(y_2-x_2)\cdots\delta(y_n-x_n)\cdots\cdots(30)$$

式 (22) の積分に際しては初期条件 (30) のほか，さらに境界条件をも考慮しなければならない。この条件は，いまの場合には“変数 y_j のうち少なくともいずれか1つの絶対値が∞になれば，条件付き確率密度 f は0になる”ということになる。

条件 (30) のもとに式 (22) を積分するには，f のかわりに

$$g(z_1, \cdots, z_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sum_{r=1}^{n}iz_ry_r\right)\cdot f(t, x_1, \cdots, x_n; \tau, y_1, \cdots, y_n)dy_1\cdots dy_n \cdots\cdots\cdots(31)$$

で定義される f の特性関数 $g(z_1, \cdots, z_n)$ を用いる方が便利である。この g が満たすべき方程式は

$$\frac{\partial g}{\partial\tau}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jr}z_j\frac{\partial g}{\partial z_r} =\left(i\sum_{j=1}^{n}z_j\alpha_j-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}z_rz_jb_{rj}\right)g\cdots\cdots(32)$$

となり[1]，また g の初期条件は次式で与えられる。

$$\tau=t \text{ のとき } g=\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}z_jx_j\right)\cdots\cdots\cdots(33)$$

式 (32) は

$$g(z_1, \cdots, z_n)=\exp\left(i\sum_{r=1}^{n}\bar{y}_rz_r-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{rj}z_rz_j\right) \cdots\cdots\cdots(34)$$

と置くことによって満足される。ただし，式 (34) において，$\bar{y}_r$ および k_{rj} は τ のみの関数であり，これらは次の連立常微分方程式から定められるものとする。

$$\frac{d\bar{y}_r}{d\tau}-\sum_{m=1}^{n}\alpha_{rm}\bar{y}_m=\alpha_r, \quad (r=1, \cdots, n)\cdots(35)$$

$$\frac{dk_{rm}}{d\tau}-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{rj}k_{jm}+\alpha_{mj}k_{jr}) =b_{rm}, \ (r, m=1, \cdots, n)\cdots\cdots\cdots(36)$$

上式からわかるように，$\bar{y}_r$ および k_{rm} はそれぞれ別々に決定される。これらに対する初期条件は，式 (33) に対応して次のようになる。

$$\tau=t \text{ のとき } \bar{y}_r=\bar{x}_r, \ (r=1, \cdots, n)\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\tau=t \text{ のとき } k_{rm}=0, \ (r, m=1, \cdots, n)\cdots\cdots(38)$$

式 (34) は多次元正規不規則変数の特性関数を表わしている。したがって，コルモゴロフ方程式の係数 b_{rm} が定数で，かつ係数 a_r が y_r の一次関数である場合には，この方程式によって定義される多次元マルコフ過程は同時に正規過程でもある。

さて，式 (26)，(29) の関係を考慮して式 (25) を書きかえれば

$$\left.\frac{dU_r}{dt}=\alpha_r+\sum_{m=1}^{n}\alpha_{rm}U_m+\sum_{m=1}^{n}\varphi_{rm}\xi_m(t) \quad (r=1, \cdots, n)\right\}\cdots(39)$$

となる。ここに，φ_{rm} は式 (27) により定数係数であり，また $\xi_m(t)$ は互いに独立な狭義の白色雑音である。

連立方程式 (39) から，例えば $U_1(t)$ 以外のすべての成分 $U_j(t)$ を消去すると，$U_1(t)$ に関する n 階の線形微分方程式

$$Q_n\left(\frac{d}{dt}\right)U_1(t)=\sum_{m=1}^{n}P_{r_m}\left(\frac{d}{dt}\right)\xi_m(t)\cdots\cdots(40)$$

が得られる。ここに，$Q_n(d/dt)$ および $P_{r_m}(d/dt)$ は微分演算子 d/dt に関する n 次および r_m 次 ($r_m<n$) の多項式である。

不規則関数の相関理論で周知のように，式 (40) の定常解 $U_1(t)$ は有理多項式で表わされるスペクトル密度

$$S_{u_1}(\omega)=\frac{|P_r(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}\cdots\cdots\cdots(41)$$

を有する。ここに，$|P_r(i\omega)|^2=\sum_{m=1}^{n}|P_{rm}(i\omega)|^2$ である。

したがって，上述のことより次の結論を得る。すなわち，係数 b_{rm} が定数であり，また a_r が y_r (ないしは x_r) の一次式であるならば，多次元マルコフ過程 $\boldsymbol{U}(t)$ は正規過程であり，その任意成分 $U_r(t)$ は過渡過程の終了以後は有理多項式で表わされるスペクトル密度を有する。この命題の逆も正しい。この結論は J.L. Doob の (第 2) 定理と呼ばれることがある。

〔例題—2〕 期待値 $\mathbf{E}[U(t)]=\bar{u}=0$ および自己相関関数

$$K_u(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)\cdots\cdots(42)$$

を有する正規定常不規則過程 $U(t)$ に対するコルモゴロフの方程式を誘導せよ。

式 (42) より，不規則過程 $U(t)$ はスペクトル密度

$$S_u(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)}{|-\omega^2+2i\alpha\omega+\alpha^2+\beta^2|^2}\cdots\cdots(43)$$

を有している。したがって，相関理論から $U(t)$ は統計的微分方程式

$$\frac{d^2U}{dt^2}+2\alpha\frac{dU}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)U=2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\,\xi(t) \cdots\cdots\cdots(44)$$

の定常解であることがわかる。上式中，$\xi(t)$ は相関関数 $\delta(\tau)$ およびスペクトル密度 $1/(2\pi)$ を有する狭義の白色雑音である。

いま，$U_1(t)=U(t)$ および $U_2(t)=\dot{U}(t)$ と置いて式 (44) を書き改めると，連立微分方程式

$$\frac{dU_1}{dt}-U_2=0$$

$$\frac{dU_2}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)U_1+2\alpha U_2=2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\ \xi(t)$$

を得る。この式と式 (25) とを比較し，また式 (28) を考慮すれば

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(t,\ U_1,\ U_2)&=U_2,\\ \psi_2(t,\ U_1,\ U_2)&=-(\alpha^2+\beta^2)U_1-2\alpha U_2\end{aligned}\right\}\cdots(45)$$

$$\varphi_{11}=\varphi_{12}=\varphi_{21}=0,\quad \varphi_{22}=2\sigma\sqrt{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\cdots\cdots(46)$$

であることがわかる。したがって，式 (26)，(45) より

$$\left.\begin{aligned}a_1(t,\ x_1,\ x_2)&=x_2,\\ a_2(t,\ x_1,\ x_2)&=-(\alpha^2+\beta^2)x_1-2\alpha x_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(47)$$

が得られ，また式 (27) と (46) より

$$b_{11}=b_{12}=b_{21}=0,\quad b_{22}=4\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\cdots\cdots(48)$$

となる。これよりコルモゴロフ方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}-[(\alpha^2+\beta^2)x_1+2\alpha x_2]\frac{\partial f}{\partial x_2}$$
$$+2\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial^2 f}{\alpha x_2{}^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial y_1}(y_2f)-\frac{\partial}{\partial y_2}[\{(\alpha^2+\beta^2)y_1+2\alpha y_2\}f]$$
$$-2\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\partial^2 f/\partial y_2{}^2=0\cdots(50)$$

〔**例題—3**〕 例題—2 において，$t=0$ のとき $U(t)=x_1$, $\dot U(t)=x_2$ として，不規則過程 $U(t)$ とその導関数 $\dot U(t)$ の座標の二次元確率密度 $f(0,\ x_1,\ x_2;\ \tau,\ y_1,\ y_2)$ を決定せよ。

条件付き確率密度 $f(0,\ x_1,\ x_2;\ \tau,\ y_1,\ y_2)$ を求めるためには，コルモゴロフの第2方程式 (50) を先に述べた初期条件のもとに解かなければならない。式 (47)，(48) から分るように，a_1, a_2 は y_1 および y_2 の一次関数となり，また b_{rm} はすべて定数となるから，Doob の第2定理により，不規則変数 Y_1, Y_2 は正規分布に従うことになる。したがって

$$f(0,\ x_1,\ x_2;\ \tau,\ y_1,\ y_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}{}^2}}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{k_{22}(y_1-\bar y_1)^2+k_{11}(y_2-\bar y_2)^2-2k_{12}(y_1-\bar y_1)(y_2-\bar y_2)}{2(k_{11}k_{22}-k_{12}{}^2)}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

となる。ここに，相関行列の要素 k_{jr} および期待値 $\bar y_1$, $\bar y_2$ は式 (35)，(36) から決定される。いまの場合には

$$\alpha_{11}=0,\quad \alpha_{12}=1,\quad \alpha_{21}=-(\alpha^2+\beta^2),$$
$$\alpha_{22}=-2\alpha,\quad \alpha_1=\alpha_2=0$$

であるから，式 (35)，(36) を初期条件

$\tau=0$ のとき $\bar y_1=x_1$, $\bar y_2=x_2$, $k_{11}=k_{12}=k_{22}=0$

のもとに解けば

$$\left.\begin{aligned}\bar y_1&=e^{-\alpha\tau}\left\{x_1\cos\beta\tau+\frac{1}{\beta}(x_2+\alpha x_1)\sin\beta\tau\right\}\\ \bar y_2&=e^{-\alpha\tau}\left\{x_2\cos\beta\tau-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}x_1+\frac{\alpha}{\beta}x_2\right)\sin\beta\tau\right\}\\ k_{11}&=\sigma^2\left\{1-\frac{e^{-2\alpha\tau}}{\beta^2}(\beta^2+2\alpha^2\sin^2\beta\tau+\alpha\beta\sin2\beta\tau)\right\}\\ k_{12}&=\frac{\alpha\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}e^{-2\alpha\tau}(1-\cos2\beta\tau)\\ k_{22}&=\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)\left\{1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}e^{-2\alpha\tau}\cdot\right.\\ &\left.\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\cos\beta\tau-\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\sin2\beta\tau\right)\right\}\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

固有円振動数 $\omega_n=\sqrt{k/m}$ および減衰定数 ζ を有する1自由度粘性減衰系に，一定スペクトル密度 S_0 の白色雑音が作用するときの応答 $U(t)$ は，過渡状態が終了したあとの定常状態ではスペクトル密度

$$S_u(\omega)=\frac{S_0}{m^2|-\omega^2+2i\zeta\omega_n\omega+\omega_n{}^2|^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

および分散

$$\sigma^2=\frac{\pi S_0}{2m^2\zeta\omega_n{}^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

を有する[6]。また，T.K. Caughey および H.J. Stumpf[7] が相関理論を用いて計算したところによれば，過渡状態における応答の分散は

$$\sigma^2(\tau)=\frac{\pi S_0}{2m^2\zeta\omega_n{}^3}\left\{1-\frac{\exp(-2\zeta\omega_n\tau)}{\omega_d{}^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(\omega_d{}^2+2\zeta^2\omega_n{}^2\sin^2\omega_d\tau+\zeta\omega_n\omega_d\sin2\omega_d\tau)\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

となる[c]。ここに $\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\ \omega_n$ である。

式 (53) は式 (43) において $\alpha=\zeta\omega_n$, $\beta=\omega_d$ とした場合にほかならない。この関係を用いて式 (52) の k_{11} を書き改めると式 (55) が得られる。また，式 (55) で $\tau\to\infty$ としたときの $\sigma^2(\tau)$ が式 (54) の σ^2 になる。

この例題は，マルコフ過程論を用いれば相関理論によるよりもずっと簡単な計算でより多くの結論を導くことができるということを如実に示している。

4. 信頼性解析への応用

前述のように，与えられた不規則過程がマルコフ過程であるならば，コルモゴロフ方程式の解として確率密度が決定されるから，それを用いて系の信頼性解析を行うことができる。

(1) 一次元マルコフ過程の場合

まずはじめに，時刻 t において x という値をもっている不規則関数 $U(t)$ が，それより後の時刻 τ におい

c) 式 (55) およびこれを図示したグラフは文献 8) にも引用されている。

て y という値をもち，時間インターバル (t, τ) の間に一度も≪禁領域≫へ入ることがないという事象の確率 $P(t, x; \tau)$ を求めよう。当然のことながら，初期値 x は≪禁領域≫には属さないものと仮定する。

このようなタイプの問題のうち最も簡単なものは，時間インターバル $(t, t+T)$ の間に不等式

$$u_1 < U(t) < u_2 \cdots\cdots(56)$$

が満たされる確率の決定問題である $(\tau=t+T)$。

この問題を解くために，確率密度 $p(t, x; \tau, y)$ を導入しよう。これは $U(t)$ の座標が時刻 τ においてインターバル $(y, y+dy)$ にある確率の分布密度である。ただし，時間インターバル (t, τ) において座標の値は1度も≪許容領域≫ (56) の外へは出ず，またその初期値は x であるという条件付き確率密度である。

明らかに，求めようとする確率 $P(t, x; \tau)$，すなわち時刻 $\tau=t+T$ において $U(t)$ が許容領域の境界に到達しない確率は次式で与えられる。

$$P(t, x; \tau)=\int_{u_1}^{u_2} p(t, x; \tau, y)dy \cdots\cdots(57)$$

一方，許容領域の境界に到達するまでは関数 $U(t)$ は，境界が何ら存在しない場合とまったく同じ性質をもっていなければならない。したがって，条件付き確率密度 $p(t, x; \tau, y)$ および推移確率密度 $f(t, x; \tau, y)$ は同一の微分方程式を，すなわちコルモゴロフの第2方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y)p]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y)p]=0 \cdots\cdots(58)$$

を満たしていなければならない。

p と f の間に差異が生ずるのは，$U(t)$ の座標が禁領域のいずれか一方の境界に触れる瞬間からである。このときには，$U(t)$ の座標が境界に到達することなくインターバル $(y, y+dy)$ に命中するということは不可能となるわけであるから，確率密度 $p(t, x; \tau, y)$ は任意の時点 τ に対して0となる。したがって，式 (58) を解くための境界条件は次のようになる。

$$\tau > t \text{ において } \quad p(t, x; \tau, u_1)=p(t, x; \tau, u_2)=0 \cdots\cdots(59)$$

p に対する初期条件は，f に対する初期条件と異なるところはない。すなわち，最初の時点において $U(t)$ の座標が x に等しいものとすれば，初期条件は

$$\tau=t \text{ において } \quad p(t, x; \tau, y)=\delta(x-y) \cdots(60)$$

となり，また最初の時点において $U(t)$ の分布法則が与えられているのであれば

$$\tau=t \text{ において } \quad p(t, x; \tau, y)=f_0(y) \cdots\cdots(61)$$

となる。ここに，$f_0(y)$ は不規則関数 $U(t)$ の最初の時点 t における座標 X の確率密度である。もちろん，$u_1 < x < u_2$ という条件は満たされるものとする。

上述のように，確率密度 $p(t, x; \tau, y)$ を求めるためには，式 (58) を境界条件 (69) および初期条件 (60) ないしは (61) のもとに解けばよい。式 (58) の解が容易に求まるかどうかは，コルモゴロフ方程式の係数 $a(\tau, y)$ および $b(\tau, y)$ の関数の形に依存する。

p が定まれば，これを式 (57) に代入することによって確率 $P(t, x; \tau)$ が求められる。この確率は信頼性理論では（条件付き）信頼度ないしは信頼性関数 (reliability function; функция надежности) と呼ばれている[9]。

初期条件が式 (61) で与えられるときの全信頼度 $P(t; \tau)$ は次式で与えられる。

$$P(t; \tau)=\int_{u_1}^{u_2} P(t, x; \tau)f_0(x)dx \cdots\cdots(62)$$

次に，不規則関数 $U(t)$ が与えられた領域の内部に滞在する時間の分布法則を決定する問題について考えよう。この問題は動力学系の寿命を評価する際に生ずる。

関数 $U(t)$ が許容領域 (56) に滞在する時間 Θ の確率密度を $f_\theta(\theta)$ で表わすことにしよう。明らかに，時点 τ においては $U(t)$ はまだ一度も禁領域には触れていないのであれば，これは許容領域内での滞在時間 Θ が $\tau-t$ よりも小さくはないということを意味する。この事象の確率は次式で与えられる。

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_\theta(\theta)d\theta.$$

一方，この確率はまた式 (57) によっても与えられるから，結局次式が成立する。

$$\int_{\tau-t}^{\infty} f_\theta(\theta)d\theta=\int_{u_1}^{u_2} p(t, x; \tau, y)dy \cdots\cdots(63)$$

上式の両辺を τ で微分すると，次式が得られる。

$$f_\theta(\theta)=-\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial p(t, x; \tau, y)}{\partial \tau}\right]_{\tau=\theta+t}dy$$

$$=-\left[\frac{\partial P(t, x; \tau)}{\partial \tau}\right]_{\tau=\theta+t} \cdots\cdots(64)$$

時間計測の原点としては，$U(t)$ が許容領域の境界に触れる ($x=u_1$ あるいは $x=u_2$ となる) 瞬間をとるならば，式 (64) は滞在時間 Θ の分布法則を与える。とくに $u_2=\infty$ とすれば，これは $U(t)$ がレベル u_1 を（下から上へ）超過する時間の分布法則を与える。

Θ の期待値 $\bar{\theta}$，すなわち寿命は次式で与えられる[d]。

$$\bar{\theta}=\mathbf{E}[\Theta]=\int_0^{\infty}\theta f_\theta(\theta)d\theta \cdots\cdots(65)$$

上式へ式 (64) を代入したあとで部分積分を行い，また

$$P(t, x; \infty)=0, \quad P(t, x; t)=1 \cdots\cdots(66)$$

であることに注意すれば

$$\bar{\theta}=\int_t^{\infty} P(t, x; \tau)d\tau \cdots\cdots(67)$$

d) われわれは処女通過破壊[6]の場合を考えることにする。

コルモゴロフ方程式の係数 $a(t, x)$ および $b(t, x)$ が時間に依存しない場合には，定常マルコフ過程に対する期待値 $\bar{\theta}$ は以下のようにしても容易に求められる。

定常マルコフ過程においては，（条件付き）確率密度 $p(t, x; \tau, y)$ は t および τ に個々に依存するのではなくして，時間差 $(\tau-t)$ に依存するので[8]，次式の関係が成立する。

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial \tau} \quad \cdots\cdots(68)$$

一方，関数 p は許容領域の境界に触れるまではコルモゴロフの第1方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t}+a(x)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(69)$$

を満たしていなければならない。

式 (68) を式 (69) へ代入し，y について u_1 から u_2 まで積分し，式 (57) を考慮すると

$$-\frac{\partial P(t, x; \tau)}{\partial \tau}+a(x)\frac{\partial P(t, x; \tau)}{\partial x}+\frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 P(t, x; \tau)}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(70)$$

が得られる。この式を τ について t から ∞ まで積分し，その際に式 (66)，(67) を考慮すると，次式が得られる。

$$a(x)\frac{d\bar{\theta}}{dx}+\frac{1}{2}b(x)\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2}=1 \quad \cdots\cdots(71)$$

上式は線形2階常微分方程式であるから，容易に積分できる。その際，積分定数は境界条件

$$\bar{\theta}(u_1)=\bar{\theta}(u_2)=0 \quad \cdots\cdots(72)$$

によって決定される。

（2） 多次元マルコフ過程の場合

多次元マルコフ過程においても，不規則関数 $\boldsymbol{U}(t)$ が与えられた境界に触れる確率その他を前と同様にして計算することができる。

まずはじめに，信頼性関数を求めよう。そのために多次元マルコフ過程 $\boldsymbol{U}(t)$ の成分のうちのいずれもが許容領域 D の外側へは出ない確率を考えてみよう。すなわち，変数の集合 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が時間 $T=\tau-t$ の間に一度も領域 D の外側へは出ない確率 $P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y}) \equiv P(t, x_1, \cdots, x_n; \tau, y_1, \cdots, y_n)$ を計算するわけである。

いま，時刻 τ において Y_r の座標がインターバル (y_r, y_r+dy_r)，$(r=1, 2, \cdots, n)$ の中にあり，時間インターバル (t, τ) の間に一度も領域 D の境界を越えないという事象の確率密度を $p(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y}) \equiv p(t, x_1, \cdots, x_n; \tau, y_1, \cdots, y_n)$ で表わそう。

一次元マルコフ過程の場合と同様な議論により，関数 p は多次元のコルモゴロフ方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_r}(a_r p)-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_m}(b_{rm}p)=0 \quad \cdots\cdots(73)$$

を満たしていることがわかる。上式を解くための初期条件は

$$\tau=t \text{ のとき } \quad p=\delta(y_1-x_1)\delta(y_2-x_2)\cdots\delta(y_n-x_n) \quad \cdots\cdots(74)$$

であり，また境界条件は

$$\tau>t \text{ のとき } \quad p=0 \quad \cdots\cdots(75)$$

となる。式 (75) は座標 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を有する点が領域 D の境界上にある場合の条件である。

求めようとする確率，すなわち信頼性関数 $P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})$ は次式によって与えられる。

$$\left.\begin{array}{c} P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})=\int_D\cdots\int p(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})dy_1\cdots dy_n \\ (\tau=t+T) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(76)$$

次に，$\boldsymbol{U}(t)$ の n 個の成分のうちいずれか1つ［例えば $U_1(t)$］を取り出し，この成分が時間 T の間に，他の成分がいかなる値をとるかということには無関係に，一度もインターバル (u_1, u_2) の外へは出ないという事象の確率 $P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})$ を考えてみよう。

この確率も $p(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})$ を積分することによって求められる。しかし，この場合には，式 (76) の代わらに次式を用いなければならない。

$$P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u_1}^{u_2}p(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})dy_1\cdots dy_n \quad \cdots\cdots(77)$$

信頼性関数 $P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})$ は，多次元マルコフ過程 $\boldsymbol{U}(t)$ が許容領域内に滞在する確率密度 $f_\theta(\theta)$ およびこの滞在時間 Θ の期待値 $\bar{\theta}$（すなわち寿命）と互いに結びつけられている。この三者を関係づける式は，一次元マルコフ過程の場合と同様である。すなわち

$$f_\theta(\theta)=-\left[\frac{\partial P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})}{\partial \tau}\right]_{\tau=\theta+t} \quad \cdots\cdots(78)$$

および

$$\bar{\theta}=\int_t^{\infty}P(t, \boldsymbol{x}; \tau, \boldsymbol{y})d\tau \quad \cdots\cdots(79)$$

である［式 (64) および式 (67) 参照］.

動力学系の信頼性解析にマルコフ過程の概念を適用した例としては J.N. Yang, M. Shinozuka[10]，J.W. Shipley, M.C. Bernard[11] などの論文およびチホノフの著書[12]がある。

5. おわりに

この論文はマルコフ過程論の概略とその構造動力学へ

の応用方法について述べたものである。非線形振動の解析[1),13)]へこの理論を適用することについては，紙数の都合で割愛することにした。

この論文をまとめるにあたり下記のような文献を参照した。とくに文献[1),9)]に負うところが大きい。各著者に対し厚く御礼申し上げる。

参考文献

1) А.А. Свешников : Прикладные методы случайных функций, издание 2-е, <Наука>, Москва, 1968.
2) Б.В. Гнеденко 著，鳥居一雄訳：確率論教程 II，森北出版，1972.
3) A. Papoulis : Probability, Random Variable, and Stochastic Processes, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1965.
4) 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論（増訂版），岩波書店，1969.
5) 同上，文献 4) の p. 359 の式 (5) 参照.
6) 小西一郎・高岡宣善：構造動力学，丸善，1973.
7) T.K. Caughey and H.J. Stumpf : Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, Jour. of Appl. Mech., 1961, pp. 563-566.
8) Y.K. Lin 著，森・富田・小林・佐藤・小林 共訳：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972. この著書の図 5.5 を参照せよ.
9) В.В. Болотин : Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений, издательство литературы по строительству, Москва, 1971.
10) J.N. Yang and M. Shinozuka : On the First Excursion Probability in Stationary Narrow-Band Random Vibration, Jour. of Appl. Mech., Dec., 1971, pp. 1017-1022.
11) J.W. Shipley and M.C. Bernard : The First Passage Time Problem for Simple Structural Systems, Jour. of Appl. Mech., Dec., 1972, pp. 911-917.
12) В.И. Тихонов : Выбосы случайных процессов, <Наука>, Москва, 1970.
13) 伯野元彦：不規則振動の取り扱い，<橋梁の動的応答> 研究会テキスト，日本鋼構造協会，1969.

(1974. 3. 12・受付)