

差分表示を用いる新しい構造解析法—Dynamic Relaxation 法の説明—

馬 場 俊 介\*・成 岡 昌 夫\*\*

1. 沿 革

J.R.H. Otter と A.S. Day とは、1960 年、テムズ川の潮流の調査研究を行なうにあたって、Hansen<sup>1)</sup>の差分法を利用して、速度と水位の変動を連続的に求めた。このとき、2人は、潮流を表わす方程式と減衰を含んだ振動方程式との類似性に注目し、Dynamic Relaxation (以後、DR と略記する)の考え方を初めて提案した。すなわち、流体の運動方程式を力学の運動方程式に置きかえ、連続の方程式のかわりに応力-ひずみ関係式を使うことによって構造物の振動の逐次積分を行ない、それによって、静的つり合い状態にある構造物の諸量を導き出そうとする手法が生まれ、これが DR と名づけられた。その後、1965 年、DR に関する最初の論文が、Day, Otter 両者によって別々に出された<sup>2),3)</sup>。

以来、力学問題へのいろいろな適用が研究されてきた。板<sup>4),5)</sup>、平行四辺形板<sup>6)</sup>、シェル<sup>7),8)</sup>、板の大たわみ<sup>9),10)</sup>、材料非線形問題<sup>11)</sup>などへの応用がそのおもなものである。この方面は、わが国ではあまり認識されていないと思われるので紹介しよう。

2. 反復計算 (イテレーション) の概念

(1) 計算の手順

DR の基本方程式は次の ①~③ である。それぞれの方程式からは、矢印の左側の量を使って右側の量が得られる。その3つの量、速度、変位、応力が変数であり、方程式 ①~③ を繰り返し計算することにより、次々と改良された変数値を求めていく。

- ① 運動方程式 速度・応力 → 速度
- ② 結合方程式 変位・速度 → 変位
- ③ 弾性方程式 変位 → 応力

(2) 構造物を要素 (セグメント) に分割する

計算しようとする構造物を、その形状に応じて分割す

る (これは、一般の差分法と同様である)。たとえば、はりならば軸方向の、板ならば格子状のセグメントに分割する。

基本式 ①~③ は、おのおののセグメントについて解かれる。その場合、基本式が差分表示されているため、注目しているセグメントの諸量を求める際、隣接したセグメントの影響も考慮される。

(3) 繰り返し計算

計算は時間に対して行なわれる。すなわち、ある時間  $t$  における速度、変位、応力を使って、微小時間  $\Delta t$  経過後の速度、変位、応力を、基本式 ①~③ を使って計算する。この計算は、 $t=0$  から始め、各セグメントでの応力の伝播速度が 0 に収束するまで続けられる。

(4) 初期条件

$t=0$  において、速度=0、 $t=\Delta t/2$  において、変位=0、応力=0 とする。イテレーションの開始時間が  $\Delta t/2$  ずれているのは、後述するように、基本式の差分表示を可能にするためである。

以上の設定を考慮したうえで、もう一度、基本式 ①~③ のイテレーションにおける 1 サイクルを考えてみよう。イテレーションの回数を  $r$  で示すとすると、 $r=1(t=0)$  における速度と  $r=1(t=\Delta t/2)$  における変位とから、基本式 ① により、 $r=2(t=\Delta t)$  における速度 ( $r=1$  で仮定された速度の改良値) が求められる。同様にして、基本式 ② により  $r=2$  における変位が、基本式 ③ により  $r=2$  における応力が求められる。この関係を 図-1 に示す。ここに、速度を  $\dot{u}$ 、変位を  $u$ 、応力を  $\sigma_x$  で表わ

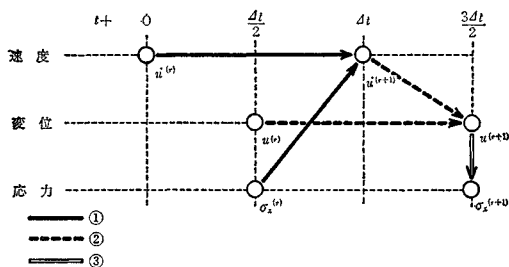


図-1 速度、変位、応力のイテレーション図

\* 学生会員 名古屋大学院土木工学専攻 修士課程  
 \*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

すものとする。

(5) 境界条件

境界部に位置するセグメントに対して、そのセグメントの変位もしくは応力が、イテレーションの各段階において、常に定められた条件を満たすよう操作する。たとえば、圧縮力を受ける片持ちばりの固定端では、固定端に位置するセグメントの固定端側の軸方向変位を0とおき、この関係は、反復の各段階で常に保たれるようにする。

3. 基本となる3つの方程式 ①~③ の誘導

基礎的な考え方を理解しやすくするため、一次元のセグメント分割を例にとり、方程式を誘導しよう。

(1) 運動方程式の誘導

図-2 より、次の4つの関係が出される。

①  $t \rightarrow t + \Delta t$  間で流量の変化する割合を求めよう。  
 $t = t$  における流量は  $\rho A \dot{u}$ 、 $t = t + \Delta t$  における流量は  $\rho A \dot{u} + \rho A (\partial \dot{u} / \partial t) \Delta t$  であるから、 $t \rightarrow t + \Delta t$  による流量の変化量は  $\rho A (\partial \dot{u} / \partial t) \Delta t$ 、したがって、 $\Delta t$  間に变化する割合は、 $\rho A (\partial \dot{u} / \partial t)$  となる。これを流量変化率とする。

② 粘性減衰係数を  $K$  とすると、粘性による影響は、 $K \rho A \dot{u} / \Delta t$  となる。

③ セグメント両端で圧力の変化する割合 ( $t = t + \Delta t$  /2 における値) を求めよう。 $k$  面にかかる圧力は  $p$  (kg)、

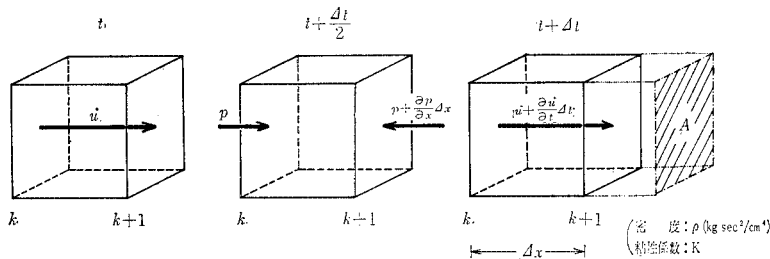


図-2 セグメント  $k$  における流量と圧力の時間による変化

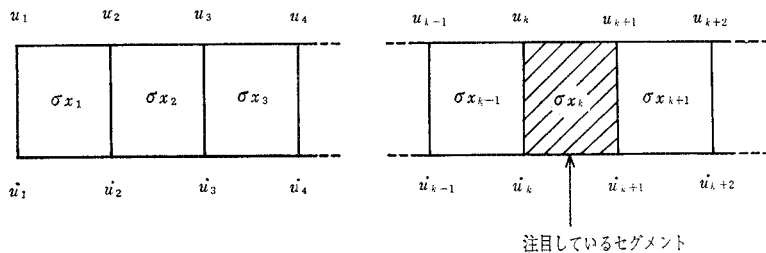


図-3 セグメント分割図

( $k+1$ ) 面にかかる圧力は  $p + (\partial p / \partial x) \Delta x$  であるから、両端の面にかかる圧力の差は、 $(\partial p / \partial x) \Delta x$ 、したがって、 $\Delta x$  間の圧力変化率は、 $\partial p / \partial x$  となる。

④ 外力  $X$  (kg) を考えると、その変化率は  $X / \Delta x$  である。

さて、①+②=③+④ である。したがって、次の式が得られる。ただし、 $\sigma_x = p/A$ 、 $F_x = X/A$  とする。

$$\rho \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{u} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{F_x}{\Delta x} \dots \dots \dots (1)$$

(2) 結合方程式の誘導

速度と変位の間には、既知の次の関係がある。

$$\partial u / \partial t = \dot{u} \dots \dots \dots (2)$$

(3) 弾性方程式の誘導

応力とひずみの間には、弾性係数  $E$  を媒介として、 $\sigma_x = E \epsilon_x$  なる関係がある。ここで、ひずみ  $\epsilon_x$  は、変位  $u$  によって表わされるから、結局、次の式が得られる。

$$\sigma_x = E (\partial u / \partial x) \dots \dots \dots (3)$$

(4) 基本方程式の差分表示

差分表示は、時間に関して、位置に関しての双方について行なう必要がある。ここで、イテレーションの段階は、変数の右肩に  $r$  と記し、一方、注目している位置は、変数の右下に  $k$  と記すことで示すことにする。たとえば、時間 (イテレーション段階)  $r$ 、場所  $k$  における変位は  $u_k^{(r)}$  で表わされる。イテレーションの1サイクルで使用される記号は、図-1 中に示されている。なお、変位と速度は、セグメントの境界部での値を、応力は、セグメントの中央での値をとっている。また、図-3 に示されるように、変位と速度の定義される位置が、応力の定義される位置と  $\Delta x / 2$  ずれているのは、基本式の差分表示を可能にするためである。

以上の記号法に基づいて、式 (1)~(3) の差分表示を行なう。

① 式 (1) は、応力から速度を求めるものである。そこで、まず場所  $x$  についてみると、速度を定義する場所  $x$  (セグメント境界) を中心として、応力の変化率は、 $\partial \sigma_x / \partial x = (\sigma_{x_k}^{(r)} - \sigma_{x_{k-1}}^{(r)}) / \Delta x$  と表示される。

一方、時間  $t$  についてみる

と、応力を定義する時間  $t$  (図-1 参照) を中心として、速度の変化率は、 $\partial \dot{u} / \partial t = (\dot{u}_k^{(r+1)} - \dot{u}_k^{(r)}) / \Delta t$  と表示される。

また、速度  $\dot{u}$  は、応力を定義する時間を基準にして考えるため、時間  $t$  をはさんだ  $t - \Delta t / 2$ ,  $t + \Delta t / 2$  における値の平均値をとらなければならない。したがって、 $\dot{u} = (\dot{u}_k^{(r+1)} + \dot{u}_k^{(r)}) / 2$  と表示される。

以上の差分表示により、式 (1) は、次のように表わされる。

$$\dot{u}_k^{(r+1)} = \frac{1-K/2}{1+K/2} \dot{u}_k^{(r)} + \frac{\Delta t / \rho \Delta x}{1+K/2} (\sigma_{x_k}^{(r)} - \sigma_{x_{k-1}}^{(r)} + F_{x_k}^{(r)}) \dots\dots\dots (1)'$$

② 式 (2) は、速度から変位を求めるものである。そこで、時間あたりの変位の変化率は  $\partial u / \partial t = (u_k^{(r+1)} - u_k^{(r)}) / \Delta t$  と表示される。一方、速度項は  $\dot{u}_k^{(r+1)}$  である。これは、変位・速度ともに、同じ場所で定義されているため、3.(1) の場合の  $\dot{u}$  のように、平均値を考える必要がないからである。以上の差分表示により、式 (2) は、次のようになる。

$$u_k^{(r+1)} = u_k^{(r)} + \Delta t \cdot \dot{u}_k^{(r+1)} \dots\dots\dots (2)'$$

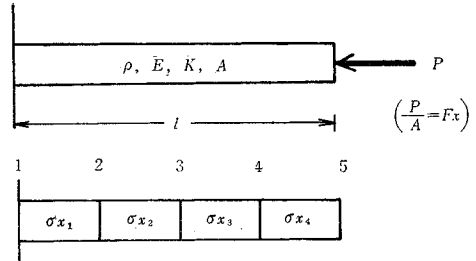
③ 式 (3) の場合、 $\partial u / \partial x = (u_{k+1}^{(r+1)} - u_k^{(r+1)}) / \Delta x$ ,  $\sigma_x$

$= \sigma_{x_k}^{(r+1)}$  のように表示される。したがって、式 (3) は、次のようになる。

$$\sigma_{x_k}^{(r+1)} = (E / \Delta x) (u_{k+1}^{(r+1)} - u_k^{(r+1)}) \dots\dots\dots (3)'$$

(5) 1次元問題への応用例

DR の概念を把握しやすくするため、単純圧縮を受ける片持ばりについて計算例を示そう。はりの図と諸元を図-4 に示す。はりは、4つのセグメントに分割する。



$F_x$  : -100 kg/cm<sup>2</sup> (圧縮)  
 $E$  :  $2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>  
 $l$  : 8 cm ( $\Delta x = 2$ cm)  
 $K$  : 0.4  
 $\rho$  :  $4 / 1.2 \times 10^{-3}$  kg·sec<sup>2</sup>/cm<sup>4</sup>  
 $\Delta t$  :  $8 \times 10^{-3}$  sec

図-4 圧縮を受ける片持ばり

表-1

$r \backslash k$		1		2		3		4		5	
		$\dot{u}$	$u$	$\dot{u}$	$u$	$\dot{u}$	$u$	$\dot{u}$	$u$	$\dot{u}$	$u$
1	$\dot{u}$	0		0		0		0		0	
	$u$	0		0		0		0		0	
	$\sigma_x$		0		0		0		0		---
2	$\dot{u}$	0		0		0		0		-1.00	
	$u$	0		0		0		0		-80	
	$\sigma_x$		0		0		0		-80		---
3	$\dot{u}$	0		0		0		-0.89		-0.87	
	$u$	0		0		0		-64		-150	
	$\sigma_x$		0		0		-64		-86		---
4	$\dot{u}$	0		0		-0.64		-0.75		-0.72	
	$u$	0		0		-51		-124		-208	
	$\sigma_x$		0		0		-73		-84		---
5	$\dot{u}$	0		-0.51		-0.65		-0.61		-0.64	
	$u$	0		-41		-103		-173		-259	
	$\sigma_x$		-41		-62		-70		-86		---
6	$\dot{u}$	0		-0.55		-0.51		-0.57		-0.57	
	$u$	0		-85		-144		-219		-305	
	$\sigma_x$		-85		-59		-75		-86		---
8	$\dot{u}$	0		-0.03		-0.17		-0.48		-0.46	
	$u$	0		-96		-198		-296		-384	
	$\sigma_x$		-96		-102		-98		-88		---
10	$\dot{u}$	0		-0.05		-0.13		-0.09		-0.21	
	$u$	0		-106		-214		-321		-435	
	$\sigma_x$		-106		-108		-107		-114		---
20	$\dot{u}$	0		-0.02		+0.04		+0.04		+0.02	
	$u$	0		-101		-198		-298		-397	
	$\sigma_x$		-101		-97		-100		-99		---
30	$\dot{u}$	0		0.0		0.0		0.0		0.0	
	$u$	0		-100		-200		-300		-400	
	$\sigma_x$		-100		-100		-100		-100		---

注: ただし,  $u$  の項には, すべて  $10^{-8}$  をかける。

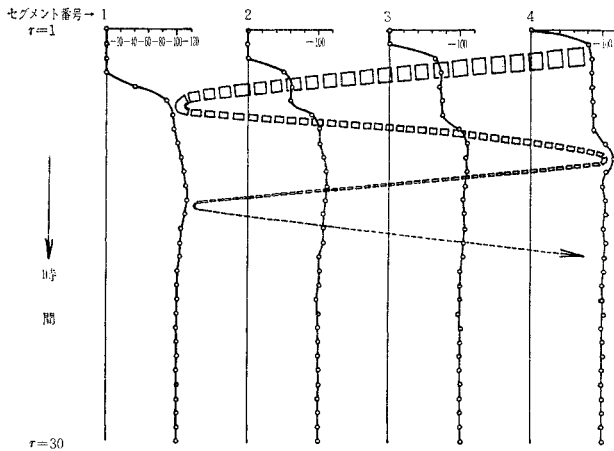


図-5 片持ばりにおける応力の伝播

図-4 から外力は、 $F_{x_1}^{(r)} = \dots = F_{x_1}^{(2)} = 0$ ,  $F_{x_1}^{(1)} = -100$  である。以上の数値を、式(1)~(3)に代入して計算式をたてる。

$$\begin{aligned} \dot{u}_k^{(r+1)} &= (2/3)\dot{u}_k^{(r)} + 10^{-2}(\sigma_{x_k}^{(r)} - \sigma_{x_{k-1}}^{(r)} - 100 \delta_{k,1}) \\ u_k^{(r+1)} &= u_k^{(r)} + 80 \dot{u}_k^{(r+1)} \\ \sigma_{x_k}^{(r+1)} &= u_{k+1}^{(r+1)} - u_k^{(r+1)} \end{aligned}$$

ただし、 $u$  のオーダーは  $10^{-6}$  である。この計算式によって、順次に  $\dot{u}$ ,  $u$ ,  $\sigma_x$  を求めたのが、表-1 である。

表-1 から、自由端での圧縮量が  $400 \times 10^{-6}$  cm であることが求められる。また、イテレーションがすすむにつれて、応力の計算値がどのように収束していくかを、各セグメントごとにプロットしていったものが図-5 である。図中の4つの減衰曲線は、各セグメントの応力値の推移を示し、縦方向に時間軸（イテレーションの回数）がとられている。

### (6) 基本概念と粘性による減衰の考え方

ここで、再度、DR の繰り返し計算が実際には何を意味しているかを考え、同時に、3.(5) の例で、粘性減衰係数  $K$  と時間間隔  $\Delta t$  とが、どのような基準から選ばれているのかを考えてみよう。

DR とは、構造物を構成するセグメントの応力と変位を、速度を媒介として、時間ごとに逐次計算するものである。一方、その内容からみると、あるセグメントに、ある瞬間外力が作用した場合に（その力は、永続的なものであっても、その瞬間だけのものであってもかまわない）、時間が経つにつれて、その力がどのような速度でどのようなひずみを伴いながら、分散していくかを追跡していく計算法、それが DR である。3.(5) の計算例は、自由端にある時刻 ( $r=1$ ) 以後、 $-100 \text{ kg/cm}^2$  の力が継続的に作用する場合である。この力は、 $r=2, 3, 4$  と時間の経過につれて、しだいに固定端のほう（左方）

に伝わっていく。 $r=5$  において、ついに、固定端のセグメントにも応力が伝播する。このセグメントの左端 ( $k=1$ ) では、速度  $=0$ , 変位  $=0$  であるから、応力の伝播は、この面ではねかえされる。その有様は、 $r=6 \sim 10$  によく示されている。この現象は、 $r=30$  に至るまで何度か繰り返されるが、粘性による減衰の影響で、伝播速度はしだいに遅くなり、 $k=1$  と  $k=5$  の面による応力の反復も、そのたびに穏やかになっていく。時間による応力値の変遷の様子は、図-5 によく示されている。応力の伝播波は、図中破線で示されている。

時間間隔  $\Delta t$  の選び方は、次のように考えるといふ。すなわち、DR のように、振動方程式を差分法で解く場合、計算を行なう速度 ( $\Delta x / \Delta t$ ) が、応力の伝播速度 ( $C$ ) を上まわっていなければ解が得られない（発散してしまう）。そこで、 $\Delta x / \Delta t > C$  を満足するように  $\Delta t$  を選ぶ。しかし、あまり小さくとりすぎると、計算速度が極端に遅くなるから注意しなくてはならない。なお、 $C = \sqrt{E(1-\nu)/\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$  である。また、粘性減衰係数  $K$  は、 $C, \Delta t, \Delta x$  から決定される値であるが、一般的には  $K=0.5 \pm 0.3$  程度としている<sup>3)</sup>。

### (7) 基本方程式の拡張

一般に、三次元物体内のセグメントには、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$  の9つの応力が考えられる。そこで、このような場合にも応用できるように、式(1)を拡張しよう。前述の9つの応力を、1つの記号  $\tau_{ij}$  で代表させ、また、速度  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$  は、 $\dot{u}_i$  で、密度は  $\rho_i$  で代表させるものとする。以上の記号に従って、式(1)は次のように一般化される。

$$\rho_i \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{u}_i \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{F_j}{\Delta x_j} \dots \dots \dots (4)$$

同様にして、式(2), (3)の一般式は、それぞれ、次のように書かれる。

$$\partial u_i / \partial t = \dot{u}_i \dots \dots \dots (5)$$

$$\tau_{ij} = (\lambda e + \mu e_{ij}) \delta_{ij} + \mu e_{ij} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $\lambda, \mu$  はラーメの定数、 $e_{ij}$  は  $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \tau_{xy}$  なるひずみ成分を表わし、 $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  とする。

式(4)~(6)を、式(1)~(3)のように使用すれば、二次元応力問題、三次元応力問題を解くことができる。

### 4. 曲げモーメントが働くときの基本方程式

3.で取り扱ってきた方程式は、それが一次元であれ、二次元、三次元であれ、直応力とせん断応力が面内に作

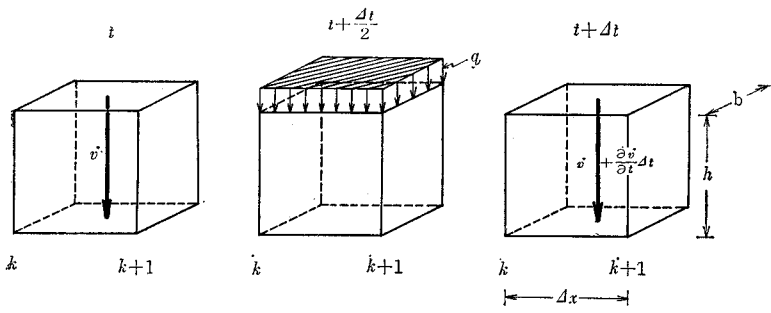


図-6 セグメント  $k$  における流量と圧力の時間による変化

用する場合についてのみ、使用できるものであり、曲げを受ける部材の解析には利用できない。そこで、ここでは、はりに曲げが生ずる場合の基本方程式を考えることにする。

(1) 運動方程式の誘導

図-6 より、運動方程式中の4つの項が、次のように求められる。

①  $t \rightarrow t + \Delta t$  間の流量変化率の項は、 $\rho b \cdot \Delta x (\partial \dot{w} / \partial t)$  である。

② 粘性の影響は、 $K \rho b \cdot \Delta x \cdot \dot{w} / \Delta t$  である。

③ セグメント上下面の圧力変化率は、上面にかかる圧力が  $q \cdot \Delta x$ 、下面にかかる圧力が0であることから、 $q \cdot \Delta x / h$  となる。ここで、 $q = \partial^2 M_x / \partial x^2$  であり、結局、変化率は、 $(\Delta x / h) (\partial^2 M_x / \partial x^2)$  となる ( $q$  は外力ではなく、外力  $Q$  により発生する曲げモーメント  $M_x$  から導かれる量である)。

④ 外力  $Q$  (kg/cm) の変化率は、 $Q \cdot \Delta x / h$  である。

①~④ から、次の式が求められる。

$$\rho b h \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{w} \right) = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + Q \quad \dots\dots (7)$$

(2) 結合方程式の誘導

式(2)の  $u$  を  $w$  にかえるだけでよい。

$$\partial w / \partial t = \dot{w} \quad \dots\dots (8)$$

(3) 弾性方程式の誘導

曲げモーメントと変位の間には、次の関係がある。

$$M_x = -EI (\partial^2 w / \partial x^2) \quad \dots\dots (9)$$

5. 板の曲げ問題、ならびに板のたわみ問題の解法

4. で扱った、曲げを受けるはりの問題と同じ考え方により、3つの基本方程式が得られる。

(1) 運動方程式の誘導

①  $t \rightarrow t + \Delta t$  間の流量変化率は、 $\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y (\partial \dot{w} / \partial t)$

である。

② 粘性の影響は、 $(K \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y / \Delta t) \dot{w}$  である。

③ セグメント上下面の圧力変化率は、 $q \cdot \Delta x \cdot \Delta y / h$  である。ここで、 $q$  は曲げモーメント  $M_x, M_y, M_{xy}$  によって、 $q = \partial^2 M_x / \partial x^2 + 2 (\partial^2 M_{xy} / \partial x \partial y) + \partial^2 M_y / \partial y^2$  と表わされる。

④ 外力  $p$  (kg/cm<sup>2</sup>) の変化率は、 $p \cdot \Delta x \cdot \Delta y / h$  である。

さて、①+②+③+④ であるから、次のようになる。

$$\rho h \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{w} \right) = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \quad \dots\dots (10)$$

(2) 結合方程式の誘導

式(8)をそのまま使用する。

(3) 弾性方程式の誘導

曲げモーメント  $M_x, M_y, M_{xy}$  と変位  $w$  の間には、それぞれ、次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \{ \partial^2 w / \partial x^2 + \nu (\partial^2 w / \partial y^2) \} \\ M_y &= -D \{ \partial^2 w / \partial y^2 + \nu (\partial^2 w / \partial x^2) \} \\ M_{xy} &= -D (1 - \nu) (\partial^2 w / \partial x \partial y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (11)$$

ここに、 $D$  は、板剛度である。

(4) 差分表示 (図-7 参照)

差分表示を用いた、最終的な式を、以下に示そう。

$$\begin{aligned} \dot{w}_{i,j}^{(r+1)} &= \frac{1-K/2}{1+K/2} \dot{w}_{i,j}^{(r)} \\ &+ \frac{\Delta t / \rho h}{1+K/2} \left( \frac{M_{x_{i,j}}^{(r)} - 2 M_{x_{i,j}}^{(r)} + M_{x_{i,j}}^{(r)}}{\Delta x^2} \right. \\ &+ \frac{M_{x_{i,j+1}}^{(r)} - M_{x_{i,j-1}}^{(r)} + M_{x_{i,j+1}}^{(r)} - M_{x_{i,j-1}}^{(r)}}{2 \Delta x \cdot \Delta y} \\ &\left. + \frac{M_{y_{i,j}}^{(r)} - 2 M_{y_{i,j}}^{(r)} + M_{y_{i,j}}^{(r)}}{\Delta y^2} + p_{i,j}^{(r)} \right) \\ \dot{w}_{i,j}^{(r+1)} &= \dot{w}_{i,j}^{(r)} + \Delta t \cdot \dot{w}_{i,j}^{(r+1)} \end{aligned}$$

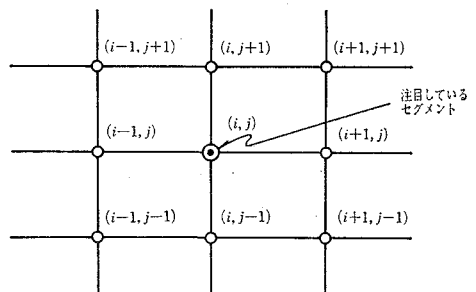


図-7 セグメントの番号

$$\begin{aligned}
M_{x_i, j}^{(r+1)} &= -D\{(w_{i+1, j}^{(r+1)} - 2w_{i, j}^{(r+1)} + w_{i-1, j}^{(r+1)})/4x^2 \\
&\quad + \nu(w_{i+1, j+1}^{(r+1)} - 2w_{i, j+1}^{(r+1)} + w_{i-1, j+1}^{(r+1)})/4y^2\} \\
M_{y_i, j}^{(r+1)} &= -D\{(w_{i, j+1}^{(r+1)} - 2w_{i, j}^{(r+1)} + w_{i, j-1}^{(r+1)})/4y^2 \\
&\quad + \nu(w_{i+1, j+1}^{(r+1)} - 2w_{i+1, j}^{(r+1)} + w_{i-1, j+1}^{(r+1)})/4x^2\} \\
M_{x_i, j}^{(r+1)} &= -D(1-\nu)\{(w_{i+1, j+1}^{(r+1)} - w_{i-1, j+1}^{(r+1)} \\
&\quad + w_{i+1, j-1}^{(r+1)} - w_{i-1, j-1}^{(r+1)})/4dx \cdot dy\}
\end{aligned}$$

(5) 大たわみ問題への拡張

板の大たわみ問題を扱う場合は、上記の曲げモーメントのほかに、膜張力  $N_x, N_y, N_{xy}$  を考慮する必要があり、運動方程式は、 $x, y, z$  方向のそれぞれについて計3つ必要となる。したがって、結合方程式も3つ、弾性方程式は、 $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$  についての計6つが必要となる。

① 運動方程式については、 $z$  方向に注目すると、曲げモーメントと膜張力の両者が同時に働くから、外力項  $p$  (kg/cm<sup>2</sup>) のほかに、 $q$  として、 $q = \partial^2 M_x / \partial x^2 + 2(\partial^2 M_{xy} / \partial x \partial y) + \partial^2 M_y / \partial y^2 + N_x(\partial^2 w / \partial x^2) + 2N_{xy}(\partial^2 w / \partial x \partial y) + N_y(\partial^2 w / \partial y^2)$  を考える。 $x$  方向と  $y$  方向については、膜張力のみが働くから、3.(7) をそのまま利用する。結局、次の3式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
\rho h \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{u} \right) &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \\
\rho h \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{v} \right) &= \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \\
\rho h \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + \frac{K}{\Delta t} \dot{w} \right) &= \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\
&\quad + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

② 結合方程式については、次の3式を考える。  
 $\dot{u} = \partial u / \partial t, \dot{v} = \partial v / \partial t, \dot{w} = \partial w / \partial t \dots\dots\dots(13)$

③ 弾性方程式としては式(11)のほかに、次の3つの膜張力についての式を必要とする。

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}, \\
N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \\
N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \\
&\dots\dots\dots(14)
\end{aligned}$$

6. 非線形問題への応用

(1) 材料非線形

イテレーションの各段階において、変位から応力を求める際、その時点での変位に対応する剛性を使って計算すれば、材料非線形が考慮されることになる。たとえ

ば、一次元応力問題では、式(3)'のかわりとして  $\sigma_k^{(r+1)} = (1/dx) \{ E(u_k^{(r+1)}) \cdot u_k^{(r+1)} - E(u_k^{(r)}) \cdot u_k^{(r)} \}$  を考える。ここで、 $E$  は変位  $u$  の関数であり、実験的に得られるものである。

(2) 塑性(骨組構造に対する)

イテレーションのある段階において、その時点における変位から計算された曲げモーメントが、部材の塑性抵抗モーメントをこえた場合、その点に塑性ヒンジが形成されるとし、ヒンジ回転角が計算される。この回転角はイテレーションがすすむにつれ、ふえることはあっても減少することはないものと規定される<sup>11)</sup>。

7. ま と め

構造力学でいわれる一般の差分法は、たとえば板を解く場合、板の方程式 ( $K \nabla^2 w = q$ ) を差分表示し、板の各点の変位を未知量として連立方程式をたてるものであった。これに対して、DR は板の方程式ではなく、前に示したように、方程式を導くための基礎式を組み合わせで連立偏微分方程式をたて、これを解くのに、差分表示を行なって、ぜん化式に直そうというものである。またDRの特徴として高等な数式の変換等いっさいを必要とせず、はりが板になり、シェルになっても、既知の方程式をら列していくだけで解が得られるという簡便性があげられよう。

5.に示した板の曲げ問題は、4.の考え方を拡張したものである。そして、同じ5.の後半の大たわみ問題では、3.(7)で与えた一般式がそのまま用いられている。このようにして、3.ないし4.の組合せにより、理論的には平面から構成されたあらゆる静的構造物についての解が得られるわけである。以上、直線的な境界をもつ構造物を扱ってきたが、曲線境界部に対しても応用した例が散見される<sup>9), 12)</sup>。せん断力を考慮した板の曲げ問題は、式(10)の右辺にせん断力の項を付加することで解析が可能となり、シェル問題は、シェル要素の曲率を考慮することで解析が可能となる<sup>9)</sup>。

ただ、その場合、留意すべきこととして、経済性があげられる。精度の規定、ゼグメントの分割数、粘性弾性係数  $K$ 、そして時間間隔  $\Delta t$  の選び方である。そして、これら諸点に十分注意して計算を実行するならば、DRは、経済的に成り立つ、便利な、そして新しい構造解析法であるといえよう。

この方面での研究は、発祥地であるイギリスにおいて盛んであり、他の国ではあまり見あたらない。有限要素法とならんで、DRによる解析も考えるべき時点にきていると思う。

## 8. 既往の文献

この方面の文献をあげると次のようである。著者らの知る限りでは、これが 1972 年末現在におけるすべてである。

### 参考文献

- a) 本文中と対照あるもの
- 1) W. Hansen : Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und Stromungen in Randmeeren nebst Anwendungen, Tellus, August, 1956.
- 2) A.S. Day : An Introduction to Dynamic Relaxation, Engineer, 219 (Jan. 1965) pp. 218-221.
- 3) J.R.H. Otter : Computations for Prestressed Concrete Reactor Pressure Vessels Using Dynamic Relaxation, Nuclear Structural Engineering, 1 (1965), pp. 61-75.
- 4) K.R. Rushton : Dynamic Relaxation Solutions of Elastic Plate Problems, Journal of Strain Analysis, 3 (1968), pp. 23-32.
- 5) A.S. Day : Analysis of Plates by Dynamic Relaxation with Special Reference to Boundary Conditions, Symposium on the Use of Electronic Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle Upon Tyne, Session 4, Paper 10, July 1966.
- 6) A.C. Cassell, R.E. Hobbs and M.S. Bridgett with P.A.K. Awotwi : Dynamic Relaxation Analysis of Multiple Span Slabs, Structural Engineer, 49 (1971). pp. 549-559.
- 7) J.R.H. Otter : Dynamic Relaxation of Shell Theory Equations for Arch Dams, Theory of Arch Dams, Pergamon Press, 1965, pp. 313-318.
- 8) A.C. Cassell, P.J. Kinsey and D.J. Sefton : Cylindrical Shell Analysis by Dynamic Relaxation, Proc. ICE, 39 (1968), pp. 75-84.
- 9) K.R. Rushton ; Large Deflection of Variable Thickness Plates, International Journal of Mechanical Science, 10 (1968), pp. 723-735.
- 10) K.R. Rushton : DR Solution for the Large Deflection of Plates with Specified Boundary Stresses, Journal of Strain Analysis, 4 (1969), pp. 75-80.
- 11) J.S. Brew and D.M. Brotton : Non-linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3 (1971), pp. 463-483.
- 12) K.R. Rushton : The DR Method Used for Stress Analysis, Joint British Committee for Stress Analysis, Conference, March 1968, Royal Aeronautical Society, London.
- b) 本文との対照のないもの
- 13) J.R.H. Otter and A.S. Day : Tidal Flow Computations, Engineer, 209 (Jan. 1960), pp. 177-183.
- 14) J.R.H. Otter : Dynamic Relaxation Compared with Other Iterative Finite Difference Methods, Nuclear Engineering and Design, 3 (1966), pp. 183-185.
- 15) J.A. Holland : DR Applied to Local Effects, Conference on PCPV, Group H, Paper 51, May 1967, ICE, London.
- 16) J.R.H. Otter, A.C. Cassell and R.E. Hobbs : Dynamic Relaxation, Proc. ICE, 35 (1966), pp. 633-656 and 37 (1967), pp. 723-750.
- 17) W.L. Wood : Comparison of DR with three other Iterative Methods, Engineer, 224 (Nov. 24, 1967), pp. 683-687.
- 18) W.R. Hodgkins : On the Relation between DR and Semi-iterative Matrix Methods, Numerische Mathematik, 9 (1967), pp. 446-451.
- 19) J.R.H. Otter, A.C. Cassell and R.E. Hobbs : Advances in the Application of DR to Arch Dams, Paper 8, Symposium on Arch Dams, ICE, London, 1968.
- 20) R.D. Lynch, S. Kelsey and H.C. Saxe : The Application of DR to the FEM of Structural Analysis, University of Notre Dame, Indiana, Technical Report Themis Und-68-1, September 1968.
- 21) A.J. Malvick and E.T. Pearson : Theoretical Elastic Deformations of a 4 m Diameter Optical Mirror Using DR, Applied Optics, 7 (1968), pp. 1207-1212.
- 22) A.J. Malvick : DR ; A general Method for Determination of Elastic Deformation of Mirrors, Applied Optics, 7 (1968), pp. 2117-2121.
- 23) K.R. Rushton : Post-buckling of Tapered Plates, Journal of International Journal of Mechanical Science, 11 (1969), pp. 461-480.
- 24) A.C. Cassell : Shells of Revolution under Arbitrary Loading and the Use of Fictitious Densities in DR, Proc. ICE, 45 (1970), pp. 65-78.
- 25) A.S. Day and J.W. Bunce : Analysis of Cable Networks, Civil Engineering and Public Works Review, April 1970, pp. 383-386.
- 26) A.C. Cassell and R.E. Hobbs : Dynamic Relaxation, High Speed Computing of Elastic Structures-Proc. of the Symposium of International Union of Theoretical and Applied Mechanics, pp. 787-808, University of Liege, 1971.
- e) わが国では、次のものがある
- 27) 岡本 : DR 法による連続体の応力解析, プレストレストコンクリート, 14.2, pp. 44-53, 1972 年 2 月.

(1973.3.1・受付)

品切れ近し

日本鉄道建設公団・本州四国連絡橋公団編

本州四国連絡橋鉄道吊橋技術調査委員会 中間報告書

軌道専門部会報告・橋梁専門部会報告 A 4・576 6 500 円 (〒 500 円)

本州四国連絡橋基礎工調査実験報告書・併用橋

A 4・968 1 0000 円 (〒 600 円)

残部僅少となりましたので至急お申込み下さい。2冊1組の場合の送料は 600 円です。分売もいたします。