

応用力学における最近の動向

(1) 構造力学

奥村 敏 恵*

はじめに

応用力学の最近の動向を示す一つの例として、学術会議力学研連が主催する応用力学連合講演会で過去6年間に、シンポジウム形式として取り上げた特定テーマをあげると、表-1になる。もちろんこれが代表的なものといえるかは問題なしとはいえないが、その一つの傾向を示すものとして注目される。これによると、マトリックス法、有限要素法、有限帯板法などで代表される数値計算法と、その背景となる学問体系が最も多く取り扱われている。次に、問題となるのは構造動力学と名づけられる分野の研究である。とくに、土木工学にからんでは、

表-1 応用力学連合講演会の特定テーマ

年度 (昭和)	特定テーマ (シンポジウム)
42	(A) 応用力学における高速計算 (B) 実験力学における新しい方法 (C) 板およびシェル (D) 衝撃および衝撃波
43	(A) 応用力学における統計的方法 (B) 不安定現象 (C) 境界層と拡散 (D) 疲労
44	(A) 生体力学 (B) 材料力学および構造力学における数値計算法 (C) 熱流体力学
45	(A) レオロジー (B) 応用力学における不規則現象 (C) 応用力学における数学的手段 (D) 材料設計
46	(A) 拡散現象 (B) 応用力学における波動、衝撃現象 (C) 破壊力学 (D) 有限要素法による数値解析
47	(A) 応用力学における安定問題 (B) 多相系の力学 (C) 有限要素法における解析的手法 (D) 応用力学における解析的手法

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

地震、風、波浪、交通車両などの動的効果を伴う外力と構造物の応答挙動を追跡する学問体系であって、構造力学における統計的方法、応用力学における不規則現象、応用力学における安定問題などの形で取り上げられているのがこの分野の関連研究を示すものである。一方、固有値問題も前掲の2つの分野とからんで、なお新しい研究の芽を残しているといえよう。この場合、従来の保存系の荷重のもとにおける安定問題から、非保存系の安定問題が取り上げられている。さらに、構造物または構造材料に存在する、いわゆる初期不整の座屈値に及ぼす影響を明確にしようとする努力も見逃すことのできない最近の構造力学にからんだ問題であるといえよう。

一方、狭い意味の構造力学である骨組の力学も新しい形体をととのえようとしている。すなわち、最近の橋梁などの構造物が空間的に特有の曲線形の弾性軸線を持ち平面的にもある広がりを持った断面で、しかも薄板またはシェルを適当に組み合せた、いわゆる薄肉断面で形成されるようになり、これら構造物のより厳密な設計計算をするための基礎として、曲げモーメントおよびねじりモーメントを受ける薄肉断面構造部材の骨組力学が体系化しようとしている。この代表的な著作として、V.Z. Vlasov²⁾、および C.F. Kollbrunner and N. Hajdin³⁾の著書があげられる。わが国においても土木学会論文報告集に、二、三の代表的なもの^{4),5),6)}をはじめとして数多くの論文が寄せられている。これらの一つの特徴として、従来の断面形不変の仮定より一歩すすめて断面形が変形する影響を組み入れた形に発展している点が注目される。なお、まったく別な構造モデルを基礎にした折板理論が、特に開断面の構造部材の断面形変形を考慮した力学的挙動を追跡するために適用され、具体的問題の解析とからんで、いくらかの発展を見せているのも注目してよいであろう。また、大変形を前提とした骨組力学も計算機の使用とあいまって非線形の構造力学の一分野を占めている。

一方、塑性設計法とからんだ、塑性ヒンジ形成を発想

の基礎とした“Plastic Methods of Structural Analysis”はいささか古い話題にはなったが、構造物の終局耐力を解析する方法を模索しようとする一連の動きは依然として残っており、研究対象としての関心を失っていない。

最適設計にからんだ一連の動きも、構造力学の一分野として取り入れてよい話題である。

さらに、破壊力学にからんだ研究が、構造力学の範疇に属しているとは必ずしもいえないが、後述する構造解析が、その研究の一端を占めていることは述べてよいであろう。また、測定技術の進歩も構造力学の発展に一役を買っており、古い伝統を持った数理弾塑性学およびそれに関連した基礎的学問が、構造力学の発展の背景になっていることは、ここで強調しておいてよいであろう。

以上、構造力学にからんだ最近の展望を、きわめて簡単にふれてきたが、その個々の問題について詳細に述べるには紙数の都合で無理と思われるので、代表的な3つの問題を取り上げて、その現状の紹介をすることにより筆者の責を果したい。これらの特殊な問題が、どのような取組み方をされているかを知ることにより、会員諸兄の研究意欲の推進に役立てば幸いである。

1. 構造解析(有限要素法)を中心として^{7)~21)}

構造力学における最近の動向について記すにあたって、まず触れておかなければならないことは、構造解析法の面における急速な進歩の様相についてであろう。構造力学における最近の目新しい個々の話題の大部分が、電子計算機による解析と関連するからである。有限要素法に代表される構造解析法の最近の進歩の大きな部分は、いうまでもなく、電子計算機が実用化されて以後のものであり、したがって、ここ数十年の間の展開である。それにもかかわらず、その発展の内容があまりに広範かつ多様であって、その姿の概略をすら、誤りなく伝えようとすることは不可能である。したがって、ここでは、そのほんの一端に触れることで、お許しいただきたい。

構造の問題にかぎらず、工学における解析を目的とした問題の多くは、連続型または離散型の問題の境界値問題、固有値問題、初期値問題のいずれかに分類される。したがって、連続型の問題を解析可能な形、すなわち、計算機を利用できる形に表現、または等価に変換する方法が一つの問題になる。偏微分方程式の新しい数値解析法としての有限要素法、歴史の古い差分法や級数による解法の具体的内容については、ここで触れるまでもないが、これらの解法が単独に用いられる場合のほか、たとえば、個々の構造単位に級数解を適用し、境界や異な

った構造単位との接合に、選点法や有限要素法を組み合わせ用いるといった、複数の解法が有機的に結合して用いられる場合も多いということ、またこれらの具体的には異なった解法が、本質的概念において相互に共通する面を持っているということは指摘しておく必要がある。

新しい解法には、必ず誤差評価が伴うことになる。したがって、有限要素法に関する基礎理論面の研究は、解の収束性または、信頼性に関連する変分原理に関するもの、誤差評価に関連する数学的理論および数値計算法に関連するものが中心である。たとえば、ポテンシャルエネルギー原理、相補エネルギー原理、Reissnerの原理およびこれらの基本的な原理の修正変分原理などに基づいて、適合モデル、平衡モデル、混合モデル、ハイブリッドモデルなどの種々の有限要素法の定式化が具体化されている。また、昨年(1972年)9月に、イギリスのSouthampton大学で開かれた「工学における変分法」に関する国際会議においては、有限要素法関係の学者を中心として、線形および非線形の連続体の力学における変分原理、有限要素法の基礎としての変分原理および流体力学をはじめとする非構造問題の解析に有限要素法を適用する際の定式化の問題などについて、9つの特別講演を含めて、83の論文が発表されている。

電子計算機が実用化されて以後の数値計算法の進歩はめざましく、古典的な計算法の再構成を含めて、まさに星の数ほどの論文が発表されている。構造解析に関連して重要な位置づけにあるのは、多元連立一次方程式の解法と固有値の計算法であり、より大きな問題をいかにして早く精密に処理するかということは、構造解析に携わる技術者の最大の関心事である。しかも、数値計算法は年々進歩しており、数年前の常識は現在の常識ではなくなっているというのが現状である。ガウスの消去法、コレスキー法、SOR(Successive Over-Relaxation)法、CG法(共役傾斜法)、有限要素法の大きな問題を解くために、外部記憶装置を効果的に使うように考案されたウェーブフロント法、その他数多くの多元連立一次方程式の解法およびベキ乗法、ベキ乗法を改良した方法としてのジェニングスの方法、三重対角行列への変換を中継する方法としてのギブンス・ハウスホルダー法、標準型への変換を必要としないために、質量マトリックスおよび剛性マトリックスに非対角要素が少ない場合には非常に効果的になるヤコビ法、マトリックスのバンド幅が大きく、すべてのまたは、多くの固有値および固有ベクトルを必要とする場合に効果的である、HQRI(Householder-QR-Inverse Iteration)法、その他数多くの固有値の計算法など、数値計算法の進歩の過程が構造解析の発展と直接的に関連している。

構造解析における計算法において、もう一つ重要な問

題は、構造物の振動解析や粘弾性解析など、時間依存の問題の解法である。四次のルンゲ・クッタ法、その変種としてのルンゲ・クッタ・ギル法、アダムスの方法と呼ばれる一群の公式、2階の微分方程式の解法としてのニューマークの β 法などに代表される積分公式についてはいまさらいうまでもないが、これら初期値問題の微分方程式の解法に関する、たとえば、線形加速度法を無条件に安定になるように改良したウィルソンの θ 法の提案や解法の安定性、進み幅の自動調節などに関する、地味であるが非常に重要な問題の研究も多く行なわれている。

有限要素法は、対象とする構造の形状や境界条件の任意性に適応しようという点では、現状において最も有力な解析法の一つである。しかし、前提となる電子計算機の容量、計算時間などにはおのずから限度がある。したがって、解析の効率、使い易さ、解析精度などの面から薄板構造、回転シェル、厚肉シェル、三次元連続体など、対象とする個々の構造物の解析に適した有限要素の開発も、また、実用的な面からは非常に重要になる。したがって、種々の定式過程に基づいて、目的とする解析に適した、新たな要素の開発も多く行なわれている。

有限要素法を適用して、大きな成果をおさめている分野として、振動解析と座屈の問題などを含めた非線形解析をあげなければならない。たとえば、今年(1973年)の6月に予定されている、日本鋼構造協会主催のマトリックス構造解析法に関する国内シンポジウムには104編の研究論文の応募があり、その中で骨組の非線形解析、殻の弾塑性解析、PC構造の粘弾性解析など、非線形問題に関連する応用面、理論面の研究が40%弱を占めている。また、固有値の計算法、初期値問題の数値解析法などの基礎的な研究を含めて、振動問題に関連した論文が全体の20%を占めている。

電子計算機の進歩に伴って、構造物の動的応答解析の可能性が格段に開けたこと、それに伴って、本格的な耐震計算を必要とするような構造物が次々と具体化されているために、動的応答解析は構造力学の中で重要な位置を占めるようになった。この問題については、あとで再びふれることになるが、とくに解析法を中心としてまとめておくことにする。すなわち、上述したように動的応答問題の数値解析上の基本的問題は、自由振動の固有値問題の解法と振動方程式の積分法に関するものである。また、実際面で重要になる問題の一つとして、構造系の振動減衰の評価法の問題をあげることができる。構造系の振動減衰は、構造材料や接合機構、その他非常に多くの要因が関連し、物理的に明確にとらえることは困難であり、実際には、既存の実構造物の測定から得られるデータとの比較によって決められるのが普通である。実際のエネルギー損失機構は非常に複雑であるが、計算上は

個々のモードに対する粘性減衰比として評価するのが普通であり、減衰マトリックスの誘導法に関するいくつかの提案がなされている。さらに非線形振動問題や、とくにモード間の相互作用を考慮しなければならない場合、たとえば軟弱地盤上の構造物などに見られる、土と構造物で構成される構造系の振動問題などに関する研究も着々と進められている。

有限要素法の応用の面で落とすことのできない問題の一つに、この方法の破壊力学への応用に関する研究がある。破壊強度の推定において基準となる、弾性体の形状係数および応力集中係数の解析、繰返し荷重下での切欠き材の弾塑性解析、金属材料の結晶組織の破壊機構などに着目した、微視的な破壊力学の解析などに有限要素法が適用され成果をあげている。

マトリックス構造解析法が実際面に広く適用され、工学と工業の各分野に大きな影響を与えている現在、これの汎用プログラムをつくり、実用面に寄与しようとする努力も各方面で行なわれている。たとえば、Stuttgart工科大学において開発されたASKA、MITで開発されたICES STRUDL II、NASAによって開発されたNASTRANなどの汎用プログラムをあげることができる。汎用プログラムは、弾性解析、振動解析、非線形解析など、できるかぎり広範囲の問題を包含する形でつくられるものと、対象を限定し、使いやすさ、経済性などに重点を置いて、つくられるものがある。たとえば、ASKAは非常に多くの種類の要素が組み込まれているのが特徴で、非線形解析も可能である。STRUDLは線形解析に限定し、使いやすさをとくに考慮している。NASTRANは非線形解析も可能である。これらのプログラムは汎用プログラムの中でもとくに有名なものであり振動解析を含め、非常に大型の問題の解析を行なうことができるようにつくられている。一方、とくに非線形解析を目的としてつくられたMARC、振動解析を効果的に行なうことができるようにつくられたSTARDYNE、ユーザー自身が改良し、みずからのプログラムを組み込むことができるように考慮されたSAPなど、対象および目的を限定してつくられたプログラムも数多く知られている。

最近著しい進歩をとげつつある分野は、有限要素法を構造以外の問題の解析に適用しようとする研究である。その代表的なものが、熱伝導や流体力学への応用である。対象領域を有限な部分領域の集合として理想化し、部分領域内の物理量をその領域の周囲に設定された節点における対応する物理量の関数として補間し、有限自由度の問題に置換して解析する。定式化に際して重要なのは、現象を支配する基礎方程式と等価で、対応する境界条件が自然境界条件として得られるような最小化を必要

とする汎関数を見いだすことである。したがって、種々の方程式に対応する汎関数を求めようとする研究が行なわれている。また、領域内の物理量の分布を、仮定された分布と支配方程式から得られるものとの残差を最小にすることを基準として決めようとする、いわゆる Galerkin 法や最小 2 乗法の適用は、有限要素法を非構造問題の解析に応用するための大きな可能性を開くものとして注目され、適用されている。

2. 構造動力学の発展

過去十数年の構造力学は、測定・解析機器の進歩、確率統計的手法の発展に伴って著しく進歩した。本来、構造物の適切な強度を与えるための設計荷重は、荷重の不確定現象を決定論的に取り扱うことによって、設計者の便宜をはかっている。構造物に作用する外力は、構造物の自重などのように静的な成分と、風や地震、波浪あるいは交通車両などのような動的で不規則な変動量に分類することができる。従来はこの不規則変動量を一応決定論的な考え方で、ある一定の確定的な値におきかえて安全率の中に含める方法が用いられてきた。しかし、このような不規則変動量は本来確定的なものでなく、平均値のまわりにはばらつきをもったものであり、かつ構造系との相互作用によって決定されるべき性質もっている。したがって、荷重の不規則変動量に対する構造系の相関、すなわち応答を明らかにしなければ、適切な構造物を設計することはできない。今日、構造力学で用いられている方法は、おもに確率統計的手法により、外力の不規則変動量を定常確率過程あるいは非定常確率過程とみなして、応答系である線形あるいは非線形構造物にこれらの外力が入力したときの出力を解析し、より正確な設計をはかろうとするものである。外力を定常過程、非定常過程のいずれとみなすかによって、解析の手法が異なってくる。風や波浪、あるいは交通車両による外力はどちらかといえば時間的にも空間的にも定常過程、もしくは弱定常過程とみなすことができる。このような外力に対する取扱いは、自動制御や情報工学で用いられる手法と同様に荷重系のスペクトル密度や、確率分布関数、構造系の周波数伝達関数を求めることによって、構造の応答スペクトルを確率統計的に明らかにする方法がとられている。1961年 A.G. Davenport²³⁾ は、自然風の乱れについて定常確率過程が成立するものと仮定し、自然風の振幅をあらわすスペクトル密度、空間相関などから吊橋構造の応答の分散や、スペクトル密度、確率分布関数を求め、吊橋の建設地点、振動性状や規模に応じた設計風速を評価する方法を提案している。この考え方は、従来の風荷重に対する不確定性を大きく改善したものと

して耐風設計に対する指針を与え、以来この種の研究は著しく進歩した。海中に設けられる構造物についても同様な手法が用いられる。海洋における波浪の特性については W.J. Pierson や G. Neuman らの研究があるが L.E. Borgman²³⁾ は、これらをもとに海洋構造物に適用し、波浪の抗力による非線形性を考慮した解析を行ない、確率統計的な解析方法を確立した。また、交通車両についても山田・小堀²⁴⁾らは路面の不整のパワースペクトルを入力として、タイヤ、車両、橋桁のばねからなる 3 自由度系の振動を解いて、橋桁の応答スペクトルを計算している。

以上の定常確率過程に関する解析手法に対して、地震などのように非定常確率過程に関する手法は、一般に構造の単位衝撃応答を求め、不規則な外力を時系列として入力し、応答を解析する方法が用いられている。Housner ら²⁵⁾は過去に記録された地震記録について 1 自由度系の構造の固有周期に対する最大応答曲線を求め、それを多自由度系の構造にも拡張することによって、非定常地震応答解析への道を開くとともに、耐震構造設計の方法を提唱した。最近では、すでに述べたように複雑な地盤などの境界条件、材料の不均一性を考慮して有限要素法を用いて地盤をモデル化し、構造と地盤の連成系としての動的解析が行なわれるようになった。

これらの先駆的な研究によって、今日の構造力学は飛躍的に進歩したが、その背景には測定技術や解析機器の進歩を見ずぐすことはできない。たとえば、SMAC 型強震計の設置などにより自然外力を正確に把握できるようになったばかりでなく、大型計算機、アナログ計算機によって、解析技術が大幅に進歩した。

構造力学の当面する課題は、このような解析結果をいかに整理して、設計理念に取り入れるかであろう。信頼性理論などによって、荷重や構造、あるいは材料などの不確定量を加味した設計理念を確立し、さらに精確な構造設計のための指針を決定することが望まれる。

3. 初期不整と座屈

初期たわみ、荷重の偏心、残留応力のないいわゆる不整や材料の非弾性挙動が座屈強度に及ぼす影響は、実際の設計と関連し、最近の構造力学分野の大きな関心事である。この場合、解析が容易であるのと、手近な具体的問題と関係が深いことにより、主として柱についての研究が、その主要部分を占めている。座屈問題に対する不整の影響に関する現状をまとめる目的で、テーマを中心圧縮を受ける柱にかぎった国際会議²⁶⁾が昭和 47 年 11 月パリで開かれたのも、このような背景による。ここでは、いかに計算量を少なくして解を得るかという点と

不整の分布および量をいかに評価するかに主眼がおかれていた²⁶⁾。後者は、前項で示した確率手法の適用が問題となっている。一方、板やシェルなどについては座屈後の挙動が問題であり、この場合、最大荷重に達したときの状態のみに着目し、耐荷力を求めようとしている。とくにプレートガーダーを対象とした研究の一応の総括として昭和46年4月ロンドンで国際会議が開かれ、最近の10年間の崩壊解析に関する理論的および実験的成果がまとめられている²⁷⁾。

なお、最近の世界各国におけるボックスガーダー系の落橋事故の続発に刺激されてか、補剛板構造の耐荷力に関しても研究が盛んで、線形解析から求められていた従来の研究成果を不整解析、非線形解析の立場から再検討されようとしている。

おわりに

以上3つの話題を中心として最近の動きを示したが、これらを総合すると、構造力学は当面する構造設計にからんで多くの模索が行なわれており、とくに非線形問題を中心として、その数値解析の基礎が曲がりなりにもかためられようとしていることがわかるであろう。

多くの研究者の関心と参加を期待すると同時に、将来さらに発展し、より厳密な構造設計のよりどころが確立されるよう期待したい。最後に本文の執筆にあたって西野文雄、吉田裕、西岡隆各助教授の協力を得た。記して感謝する。

参考文献

- 1) V.V. Bolotin : Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability.
- 2) V.Z. Vlasov : Thin-Walled Elastic Beams.
- 3) C.F. Kollbrunner and N. Hajdin : Dünnwandige Stäbe.
- 4) 小松定夫・小西一郎：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集 87 巻，1962 年。ほかに小松・中井らの一連の論文。
- 5) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集 108 巻，1964 年。
- 6) 奥村敏恵・坂井藤一：薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析，土木学会論文集 176 巻 1970 年。ほかに，奥村・坂井らの一連の論文。
- 7) 山田嘉昭編：マトリックス法の応用—構造工学問題の数値化解析，東京大学出版会，1972 年。
- 8) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会編。コンピュータによる構造工学講座，II-3-A，培風館，1972 年。
- 9) 山本善之・山田善一：マトリックス構造解析の誤差論／日本鋼構造協会編コンピュータによる構造工学講座，II-5-B，培風館，1972 年。

- 10) 戸川隼人：マトリックスの数値計算，オーム社，1971 年。
- 11) A. Ralston and H.S. Wilf (ed.) : Mathematical Methods for Digital Computers¹⁾, I, II, John Wiley, 1960; 1967.
- 12) S.H. Crandall : Enginerring Analysis, McGraw-Hill, 1956.
- 13) J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto (ed.) : Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Univ. of Alabama Press, 1972.
- 14) O.C. Zienkiewicz : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
- 15) R.J. Melosh and R.M. Bamford : Efficient Solution of Load-Deflection Equations, Jour. of the Struc. Division, Proc. ASCE, pp. 661~676, 1969.
- 16) N.M. Newmark : A Method of Computation for Structural Dynamics, Jour. of the Engg. Mech. Division, Proc. ASCE, pp. 67~94, 1959.
- 17) R.E. Nickell : "On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics", Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1971.
- 18) E.L. Wilson, et al. : "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures", Int. Jour. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, No. 2, Sept. 1972.
- 19) E.L. Wilson and J. Penzien : Evaluation of Orthogonal Damping Matrices, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol. 4, No. 1, Jan. 1972, pp. 5-10.
- 20) 日本鋼構造協会主催，第3回マトリックス法による構造解析および設計に関する国内シンポジウム概要集，1973年6月(予定)。
- 21) P. Tong : The Finite Element Method for Fluid Flow, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, 1971.
- 22) A.G. Davenport : The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures, Proc. ICE, Vol. 19, 1961.
- 23) L.E. Borgman : Spectral Analysis of Ocean Wave Force on Piling, Proc. ASCE, Journal of W.H. Division May 1967.
- 24) 山田善一・小堀為雄：活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数—に関する考察，土木学会論文集 148 巻，1967。
- 25) P.C. Jennings, G.W. Housner and N.C. Tsai : Simulated Earthquake Motions for Design Purposes, Proc. 4 W.C.E.E., Vol. 1, A-1, pp. 145-160.
- 26) IABSE : Proceedings of Colloquium on Centrally Compressed Struts, Paris, Nov. 1972, to be Published.
- 27) Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength, London-1971, IABSE, Reports of the Working Commissions, Vol.-Band II 1972.
- 28) V.V. Novozhilou : Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, Rochester, N.Y., 1953.

(1973.4.23・受付)

土木学会耐震工学委員会編●好評発売中●正誤表ができましたので希望者はお申出下さい。

地震応答解析と実例 B5・485 頁上製箱入豪華本
定価 5 000 円 会員 4 500 円 (〒 200)