

数値解析法講座 16

応用編

流体解析 (IV)

マック法・有限要素法

日野幹雄*・川原睦人**

1. マ ッ ク

(1) マックと流体アニメーション

電子計算機を使って計算をしたことのある人ならば、まず次々にライン・プリンターから打ち出されてくる数値表に驚き、次にこの数値表をグラフなりマップに見やすいように描き直す作業にうんざりさせられた経験をお持ちのことと思う。電子計算機は本来デジタル量を扱うのであり、計算機の記憶素子の内容をそのまま取りだすと、ぼう大な数値表が打ち出されてくるのは当然である。しかし、われわれの視覚を通しての認識力、さらに進んで理解力はきわめて優れており、計算結果もなんらかの形で視覚的に訴えるように表示し直す必要がある。

電子計算機のライン・プリンターを利用して、簡単な曲線を描くことはよく行なわれている。しかし、複雑な計算結果の表示には十分とはいえない。

ところで、こうした計算結果の視覚化という要求とは別に、最近の流体力学では“流れの可視化”(flow visualization)の重要性がしだいに認められてきている。流体の運動は変形が自在であり、しかも運動は非線形性の強い影響のもとに行なわれる複雑な現象である。それゆえ、基礎方程式を数学を駆使して解いても、あるいは現代の数学の力では解けない問題もあるから、流体现象の十分の理解には流れの実際を見ることが必要である。

これから述べようとする MAC の成立要件には、以上の二つの理由のほかにも一つ、自由表面をもつ非定常流れのためのアルゴリズム (algorism) という積極的理由を付け加えなければならない。流体運動が自由表面をもつ場合には、各瞬間瞬間での自由表面で境界条件 (たとえば、圧力=大気圧) を満たさねばならない。それゆえ、変幻自在な自由表面の位置を常にとらえていなければならない。そのためには、流体中に標識 (marker)

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 中央大学専任講師 理工学部土木工学科

を入れて、流体部分としからざる部分とを常に判定しうるようにすればよい。

以上の理由により、アメリカのロス・アラモス研究所において F.H. Harlow を中心に 1965 年に開発された自由表面をもつ非定常非圧縮性の二次元流れの計算方法がマック^{1),2),3)}(MAC-Marker and Cell method)である。この方法はその後いろいろの研究者により展開改良されている。

なお同じころ Harlow らにより開発されたピック^{4),5)}(PIC-Particle in Cell method)は圧縮性流体の非定常流れの計算手法であり、マーカーは単に標識として取り扱われるのではなく、流体の属性を負う粒子として取り扱われる。

(2) 差分式¹⁾

普通二次元の非圧縮性流れの計算には、従属変数として流速成分 (u, v) と圧力 (p) のかわりに、流関数 ψ と渦度 ω を用いて、変数の数を 1 つ減らす。MAC ではマーカーを移動させるのにその点での流速を知る必要があり、自由表面では圧力=一定の条件を満たさせる必要上、流体運動の基礎方程式 (Navier-Stokes eqs. (1), (2), 連続方程式 (3)) をそのままの形で用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

式 (1) および (2) に式 (3) を加えて変形すれば、次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

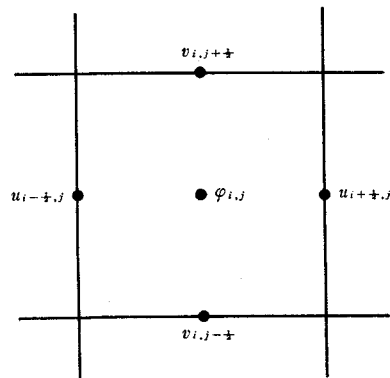


図-1 格子点での変数の配列

$$= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \dots \dots \dots (5)$$

ここに,

$$\varphi = p/\rho, \quad g_x = X/\rho, \quad g_y = Y/\rho$$

また, 式 (4), (5) より圧力 φ に関する方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -R \dots \dots \dots (6)$$

ここに,

$$R = \partial^2 u/\rho \cdot x^2 + 2\partial uv/\partial x \partial y + \partial^2 v/\partial y^2$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (7)$$

さて, 上の三式を差分表示をするために, 流速成分は各セルの辺上で, 圧力はセルの中心で表わすこととする(図-1)。このようにすれば, 式 (3) は

$$D_{ij} = [u_{i+(1/2),j} - u_{i-(1/2),j}]/\delta x$$

$$+ [(v_{i,j+(1/2)} - v_{i,j-(1/2)})/\delta y] = 0 \dots (8)$$

と表わすことができる。

同様に, 式 (4), (5) は次のようになる (u, v の上に付けた superscript ($n+1$) は, 次の時間ステップの値であることを示す)。

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i+(1/2),j} + [u_{i,j^2} - u_{i+1,j^2}] \delta t/\delta x$$

$$+ [u_{i+(1/2),j-(1/2)} \cdot v_{i+(1/2),j-(1/2)}$$

$$- u_{i+(1/2),j+(1/2)} \cdot v_{i+(1/2),j+(1/2)}] \delta t/\delta y$$

$$+ \nu \delta t \{ [u_{i+(3/2),j} + u_{i-(1/2),j}$$

$$- 2u_{i+(1/2),j}]/\delta x^2 + [u_{i+(1/2),j+1}$$

$$+ u_{j+(1/2),j-1} - 2u_{i+(1/2),j}]/\delta y^2 \}$$

$$+ [\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j}] \delta t/\delta x + g_x \delta t \dots \dots (9)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j+(1/2)} + [u_{i-(1/2),j+(1/2)} \cdot v_{i-(1/2),j+(1/2)}$$

$$- u_{i+(1/2),j+(1/2)} \cdot v_{i+(1/2),j+(1/2)}] \delta t/\delta x$$

$$+ [v_{i,j^2} - v_{i,j+1^2}] \delta t/\delta y$$

$$+ \nu \delta t \{ [v_{i+1,j+(1/2)} + v_{i-1,j+(1/2)}$$

$$- 2v_{i,j+(1/2)}]/\delta x^2 + [v_{i,j+(3/2)}$$

$$+ v_{i,j-(1/2)} - 2v_{i,j+(1/2)}]/\delta y^2 \}$$

$$+ [\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j+1}] \delta t/\delta y + g_y \delta t \dots \dots (10)$$

ここに,

$$u_{i,j} = [u_{i-(1/2),j} + u_{i+(1/2),j}]/2$$

等々。

式 (6), (7) より圧力方程式の差分式が与えられる。

$$[\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}]/\delta x^2$$

$$+ [\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j}]/\delta y^2 = -R_{i,j}$$

$$\dots \dots \dots (11)$$

ここに,

$$R_{i,j} \equiv Q_{i,j} - D_{i,j} \delta t - \nu \{ [D_{i+1,j}$$

$$+ D_{i-1,j} - 2D_{i,j}]/\delta x^2 + [D_{i,j+1}$$

$$+ D_{i,j-1} - 2D_{i,j}]/\delta y^2 \} \dots \dots (12)$$

$$Q_{i,j} = [u_{i+1,j^2} + u_{i-1,j^2} - 2u_{i,j^2}] \delta x^2$$

$$+ [v_{i,j+1^2} + v_{i,j-1^2} - 2v_{i,j^2}] \delta y^2$$

$$+ 2[u_{i+(1/2),j+(1/2)} \cdot v_{i+(1/2),j+(1/2)}$$

$$+ u_{i-(1/2),j-(1/2)} \cdot v_{i-(1/2),j-(1/2)}$$

$$- u_{i+(1/2),j-(1/2)} \cdot v_{i+(1/2),j-(1/2)}$$

$$- u_{i-(1/2),j+(1/2)} \cdot v_{i-(1/2),j+(1/2)}] / \delta x \delta y$$

$$\dots \dots \dots (13)$$

原則的には式 (11) の右辺の $R_{i,j}$ のかわりに式 (13) の $Q_{i,j}$ を使用してよいのであるが, 計算誤差を考えると式 (12) を用いるほうが望ましい。流れの場を求めるには, まず式 (11) より加速 Liebmann 法により $\varphi_{i,j}$ を計算する。次に, この $\varphi_{i,j}$ を用いて, 式 (7), (8) より次の時間ステップの u, v を求める。この演算操作を次々に行なう。

(3) マーカー¹⁾

自由表面がない場合には, (2) の計算のみで流れの場が求まる。しかし, 自由表面のある場合には, その位置を決定する計算段階が付け加わる。そのため, 計算の始め $t=0$ に流体部分の各メッシュ・セルの中に数個づつ²⁾ のマーカーを配置し, マーカーを囲むセルの流速成分の内挿値の流速でマーカーを移動させる(図-2)。

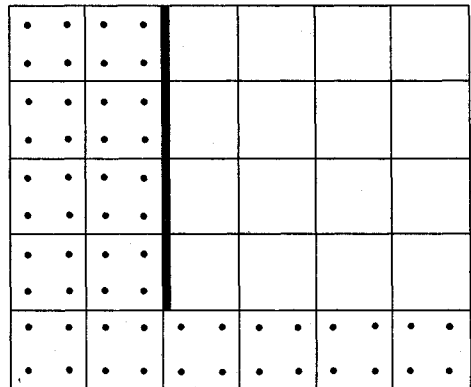


図-2 マーカーの配置

マーカーのないセルは流体を含まないから, 空のセルに隣り合うマーカーのあるセルが自由表面を形成することになる。このセルでは圧力=一定の条件を満たす必要がある。しかし, 実際上自由表面の方向まで正確に決定されているわけではないので, むしろ流速についての境界条件を自由表面や壁面で満たすようにしている。

(4) ディスプレイ^{5), 6), 7)}

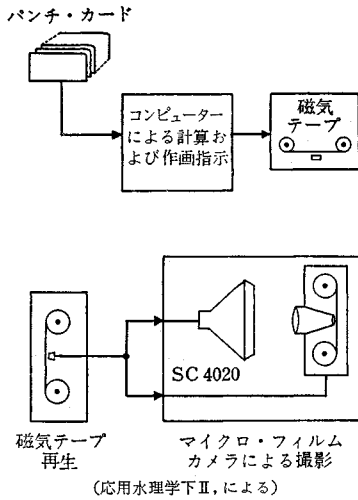
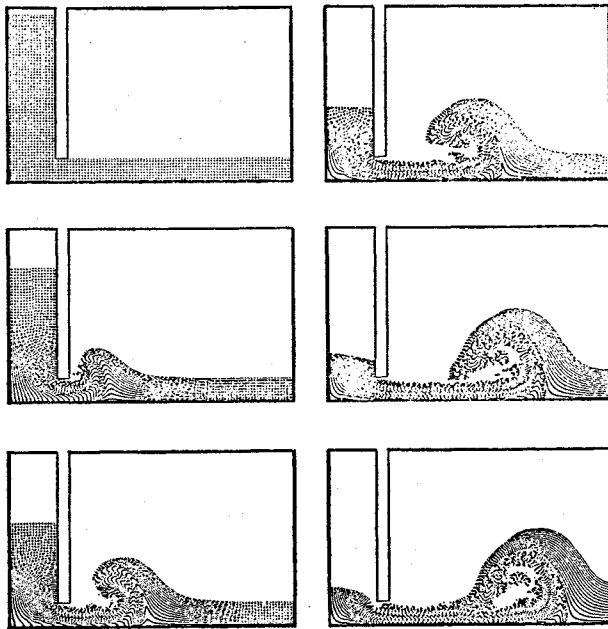
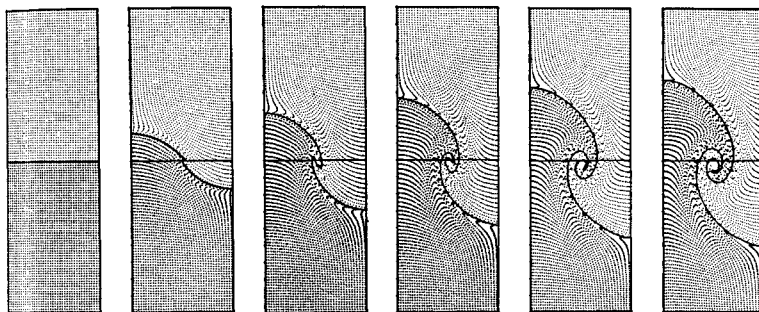


図-3 ブラウン管ディスプレイ方式



(Science, 1965 による)

図-4 ゲートの急開放で流出した水のサージング



(The Physics of Fluid, Feb. 1967, による)

図-5 “レイリー-テラー不安定”の成長過程

マック法では、自由表面の位置を定めることを主目的に、流体セル中にマーカーを配置し、各瞬間瞬間のマーカー位置を追跡した。しかも、マーカーは流れの可視化のためにより有効に利用しうる。

各時間ステップでのマーカーの位置 (x_m, y_m) をマグネティック・テープに記憶しておき、計算完了後 CRT (Cathod Ray Tube, 陰極線管) の面に各マーカー点を映出させ、これをフィルムに撮影する。このようにして各時間ステップのマーカーの画よりアニメーション・フィルムをつくることができる。この種のディスプレイによる流体现象の映画は、アメリカではすでに 10 年前から一部でつくられており、われわれをうらやましがらせていたが、最近日本でも利用しうようになった。また、Numerical Fluid Dynamics のパイオニアである J.E. Fromm 氏 (IBM) が昨年 6 月以来滞日中である。

(5) 種々の例

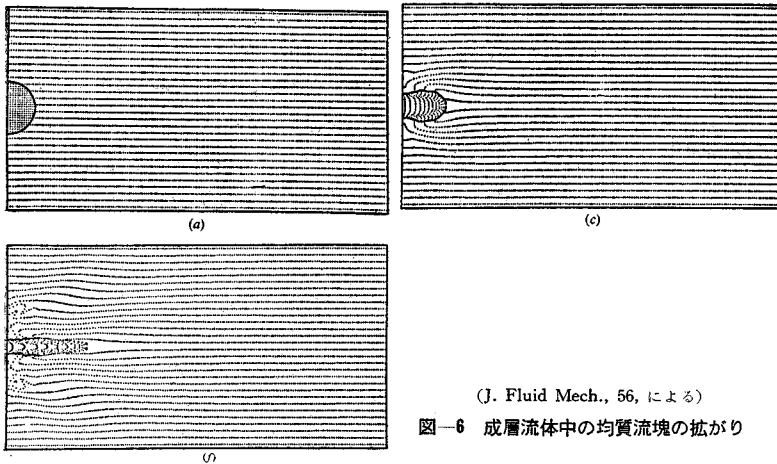
ここで、Harlow らを中心とする計算の具体例をいくつかあげる。詳細については、参考文献を参照されたい。

① ダム崩壊¹⁾あるいは水門急開によるサージ波²⁾(図-4): ゲートを急に開いた際に流出するサージ波の変形が水沫一滴まで、もっともらしくシミュレートされている。

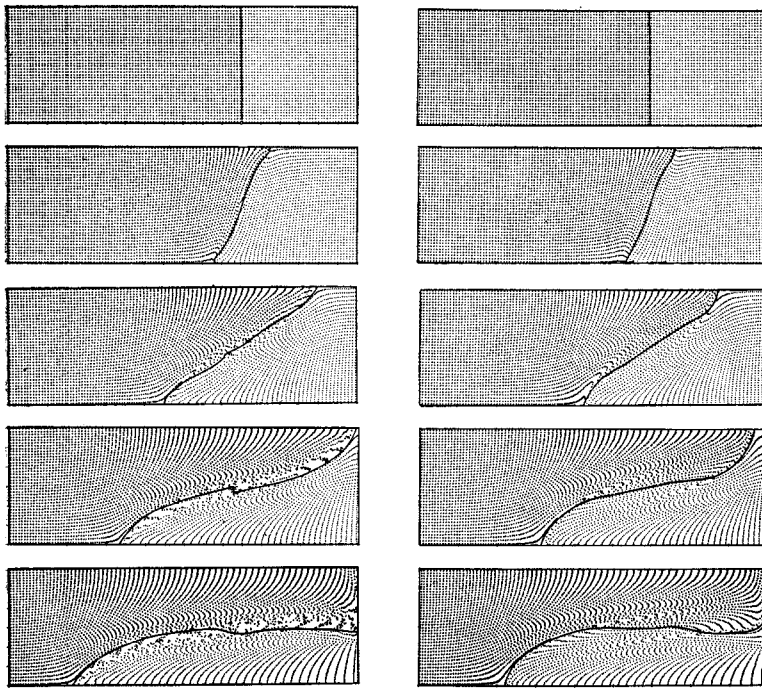
② 二層流体境界面の不安定¹⁰⁾(図-5): 軽い液体の上に重い液体の層がある場合で、この不安定な多少仮想的均衡は一瞬にしてくずれてしまう。これを Rayleigh-Taylor 型不安定という。この瞬時の変化のプロセスをとらえるのは計算機実験なればこそである。

③ 密度流^{11), 12)}(図-6, 7): 密度の異なる二流体あるいは密度が一樣でない流体の力学、いわゆる密度流・成層流は、水理学のみならず気象学や海洋学でも問題となっており、いわば流体力学の花形課題の一つでもある。それゆえに、実験的研究が重視されるのであるが、実際

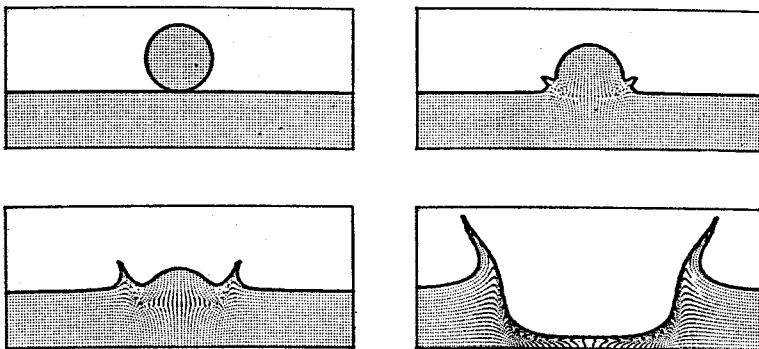
上実験・実測はかなり困難で、ここにコンピューター実験の必要性が生じる。図-6 は、成層流体中の水塊の一部をよく混合させて均一化した際に、その水塊の影響が周囲に波及する様子を示している。図-7 は重い流体が軽い流体の下にもぐり込む現象(たとえば前線や塩水楔)の MAC によるシミュレーションを示す。二層流体間に発生する不安定波(風波も



(J. Fluid Mech., 56, による)
 図-6 成層流体中の均質流塊の拡がり



(Daly, Phy. Fluid, Vol. 11, による)
 図-7 密度舌の侵入



(Proc. 2nd Symp., による)
 図-8 水滴落下による水面の表面変化・0, 0.0002, 0.0005, 0.0023 秒時

これと同じ理屈で発生する)の MAC によるシミュレーションも行なわれている。

④ 水面への落下水滴¹³⁾: 高速度撮影機の宣伝パンフレットに、ミルクの中への水滴の落下により、美しい王冠が水面に出現する写真が載っている。図-8 は、MAC によるシミュレーションで、まことに美しく楽しい画である。

⑤ 津波のはい上り: 波が岸に近づくと波高は急速に増大し波形が大きく変化する。これまでは、この問題は特性曲線法により解かれてきた。筆者は昨年 Fromm 氏より MAC によるアニメーションを見せてもらったが、現在のところ岸へのはい上りの計算にはいま一步というところである。そのほか MAC あるいはそれに類する方法により解かれた例題を教えあげるときりがなくらいである。

(6) 改良 MAC およびラグランジュ法

MAC 法はその後いく人かの研究者による改良が行なわれた (SUMMAC: Stanford University Modified MAC, ICE: Implicit Continuous-fluid Eulerian, MACRL)。MAC あるいは PIC は本来 Euler 的な計算を主とするもので、補助マーカーにより Lagrange 的な方法を取り入れようとしたものである。自由表面のある流体運動の計算に便利な Lagrange 法のウェイトをもっと大きくした方法もいくつかある (Mixed Euler-Lagrange, LINC, ALE: Arbitrary Lagrangian and Eulerian)。さらに、まったくラグランジュの運動方程式で解く方法も用いられている (CALTEC)。 (日野幹雄)

2. 有限要素法

(1) 有限要素法の特徴

流体の流れの解析，すなわち，流れの流速や圧力を与えられた境界条件のもとに求めることは，実用上の要求から従来までに，非常に多くの研究が行なわれてきている。一般に，解析的方法によって解を求めることに対しては，与えられた条件を満足する高等な関数を見つけることに主力がそそがれてきた。これに対して，数値的方法によって解析する場合は，条件を満足する大量の数値をもって解を表わすことを考えることになる。このために，大量の数値をどのように手際よく処理するかが重要となり，解析的方法による場合には，いかに見通しよく方程式を整理するかが重要な解決のポイントになるのに対して，数値的方法による場合には，いかに機械的に処理するかが解決の鍵となる。

従来，数値解析の方法としては，主として有限差分法が用いられてきたが，1950年代の中ごろに航空機の構造解析を目的として有限要素法が開発された。有限要素法は，近年急速に発達し，構造解析の分野においては，実用を目的とする大型プログラムが次々と開発され，広く実際の設計に用いられるようになった。この手法は単に構造解析のみにとどまらず，工学上の多くの問題に有効であることが指摘され，1960年代後半より，流体力学の分野での研究成果が多く発表されるようになってきている。

有限要素法も，有限差分法も，高速のデジタル計算機によって未知数の非常に多い連立方程式が，比較的簡単に解けるようになったことを前提としている。両者ともになんらかの方法によって，ある領域における連続体の性質を，その領域内にとられた，独立した点における離散化した量に変換する手法であると見ることができる。

このとき，有限差分法では，原則として直交格子点を用い，有限要素法では，任意の形状をした有限要素を用いる(図-9(a),(b)参照)。

この離散化量に換算する手法として，有限差分法では微分を差分に置きかえるという手法を用い，有限要素法は，ある近似関数によって重み付きの誤差が最小になるように換算するという手法を用いる。すなわち，有限差分法は，文字通り与えられた微分方程式を，差分によって離散化する方法であり，有限要素法は，重み付き誤差を最小にする変分法によって離散化する手法である。

これは，解析的によく用いられるリッツ・ガレルキン法を高速電子計算機に適するように拡張したものであるといえる。このことから，有限差分法では格

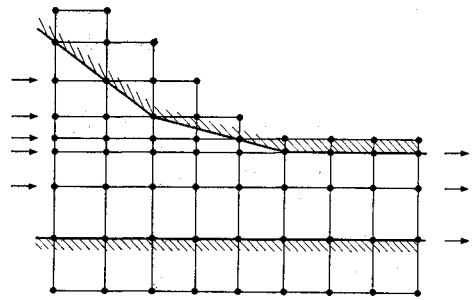


図-9(a) 有限差分法の格子点

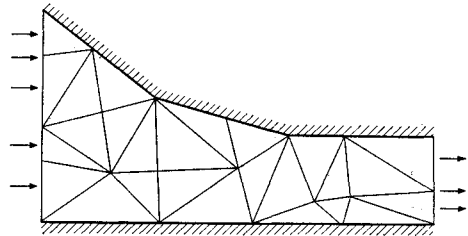


図-9(b) 有限要素法の分割

子点における物理量にのみ着目するのに対して，有限要素法では，近似的であるにせよ，有限要素内部およびその境界での物理量の関係を物理的に解釈することが可能になる。有限要素法の考え方は，構造解析においては，エネルギー定理によって説明することができ，物理的な裏づけが明確になる。流体解析においても，構造解析ほど明らかではないが，同じようにしてエネルギー定理と結びつけることができる。

有限差分法においては，差分の取り方，たとえば，前方差分や中央差分などによって，離散化の手法が分類されるのに対して，有限要素法では，基礎となる変分定理の相違，物理量の近似の方法の相違などによって多くの離散化手法が分類される。近似方法の判定に対して，物理的性質を考え合わせることができるとともに，近似の程度と計算時間を見くらべながら，どのような方法を選ぶかを選択することが可能になる。

有限要素法による流体解析は，現在発展の途上であり，離散化誤差の検討，安定性の把握などについて十分な研究が行なわれているとはいえない。ナビエ-ストークス方程式に対する有限要素法の適用については，Oden・Somogi¹⁴⁾，Oden^{15)~17)}，Ping-Tong¹⁸⁾，Zienkiewicz¹⁹⁾，Skiba・Unny・Weaver²⁰⁾などの研究がある。流体解析における有限要素法の展望については，拙著の展望論文²¹⁾を参照されたい。

(2) 基礎方程式

有限要素法を適用するためには，基礎方程式を整理し整頓しておかねばならない。ここでは，非圧縮性粘性流

体の定常層流流れについて説明する。簡単にするために二次元流れを扱うことにすると、運動の方程式は、次のようになる。

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \hat{f}_x \dots (14)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = \rho \hat{f}_y \dots (15)$$

ここに、 u, v は x, y 方向の流速、 ρ は密度、 \hat{f}_x, \hat{f}_y は物体力を表わす。応力 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ は次の関係で与えられる。

$$\tau_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \dots (16)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots (17)$$

$$\tau_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \dots (18)$$

ここに、 μ は粘性係数で、 P は圧力である。連続の方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots (19)$$

である。以上の方程式 (14)~(19) は流れの場 V 内で成立する。境界条件としては、次の条件を考えることにする。境界 S は、 S_1 と S_2 に分けることができ、境界 S_1 においては、流速が規定される。すなわち、

$$u = \hat{u} \text{ on } S_1 \dots (20)$$

$$v = \hat{v} \text{ on } S_1 \dots (21)$$

である。ここに、 \hat{u}, \hat{v} は、与えられた一定値であることを示す。境界 S_2 においては、応力ベクトル S_x, S_y が、

$$S_x = \tau_{xx}l + \tau_{xy}m = \hat{S}_x \text{ on } S_2 \dots (22)$$

$$S_y = \tau_{xy}l + \tau_{yy}m = \hat{S}_y \text{ on } S_2 \dots (23)$$

となるものとする。ここに、 l と m は境界 S_2 にたてた単位法線の方向余弦である。基礎方程式 (14)~(23) を満足する関数 u, v を求めることが目的とする問題である。この問題を、解析的に解くためには、非常に高級な関数を使わねばならず、実用目的には不可能に近い場合が多い。これに対して、数値的に解を求める場合には大量の数値によって解を表現することになる。ここで、注意すべきことは、いかに大量の数値をもってしても、有限個の数値で表現する限り、近似的な解の表現であることである。

有限要素法を用いるために、式 (14)~(23) から、以下のようにして変分方程式を導く必要がある。まず、重み関数 u^*, v^* を考える。この関数は、流速が与えられる境界では 0 であるが、そのほかの部分では任意の値を取りうる関数である。これは、構造解析でいう仮想変位に対応する量である。さて、式 (14), (15) に u^* と v^* をそれぞれかけて、ある領域 V について積分し加え合わせると次のようになる。

$$\int_V \left[u^* \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \hat{f}_x \right) + v^* \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \rho \hat{f}_y \right) \right] dV = 0 \dots (24)$$

部分積分の公式を用いて

$$\int_V \left(u^* \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u^* \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + v^* \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) dV = - \int_V \left[\tau_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] dV + \int_S [u^*(\tau_{xx}l + \tau_{xy}m) + v^*(\tau_{xy}l + \tau_{yy}m)] dS \dots (25)$$

なる恒等式が得られるので、これを式 (24) に代入し、 u^*, v^* は S_1 では 0 であること、および式 (22) と (23) を用いて整頓すると、結局次の方程式を得ることができる。

$$\int_V u^* \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \int_V v^* \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \int_V \left[\tau_{xx} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] dV = Q \dots (26)$$

$$Q = \int_{S_2} (u^* \hat{S}_x + v^* \hat{S}_y) dS + \int_V (u^* \rho \hat{f}_x + v^* \rho \hat{f}_y) dV \dots (27)$$

式 (26) に式 (16)~(18) を代入すれば、有限要素法に用いられる変分方程式が次のように整頓される。

$$\int_V u^* \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV + \int_V v^* \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV - \int_V P \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) dV + \int_V \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] dV + \int_V \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] dV = Q \dots (28)$$

一方、式 (16)~(18) を式 (14), (15) へ代入すれば、よく知られた定常層流に対するナビエーストークス方程式が得られる。

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \rho \hat{f}_x \dots (29)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \rho \hat{f}_y \dots (30)$$

式 (29), (30) の両辺に u^* と v^* をそれぞれかけて領域 V について積分し、加え合わせて変形し整理すると、

$$\int_V u^* \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV + \int_V v^* \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV - \int_V P \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) dV + \int_V \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \right] dV = Q \dots (31)$$

となる。ただし、式 (31) における Q は、

$$Q = \int_{S_1} (u^* \hat{Q}_x + v^* \hat{Q}_y) dS + \int_V (u^* \rho \hat{f}_x + v^* \rho \hat{f}_y) dV \dots (32)$$

である。ここに

$$\hat{Q}_x = \left(-P + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) m \dots (33)$$

$$\hat{Q}_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left(-P + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) m \dots (34)$$

である。すなわち、式 (31) は式 (22), (23) で与えられる境界条件とは別の境界条件を表わすことになる。もちろん、式 (28) より直接式 (31) を誘導することができる。式 (21) および式 (31) はニュートン流体についてなりたつ関係であるが、式 (26) は非ニュートン流体についても成立する方程式である。このことは、非ニュートン流体へも有限要素法が適用しうること示唆している。一方、連続の方程式については、式 (19) に、 P^* をかけ領域 V について積分した関係、

$$\int_V P^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = 0 \dots (35)$$

を用いることにする。 P^* は重み関数である。

(3) 有限要素法

流体の流れの場を図-9(b) に示したように、有限要素に分割する。有限要素の形状には、いろいろの種類が考えられているが、三角形がよく用いられている。三角形要素を用いた場合にも、三角形の3頂点を節点として用いる3節点三角形要素(図-10(a))、3頂点のほか各辺の中点をも節点とする6節点三角形要素(図-10(b))などがある。節点における x, y 方向の流速を、

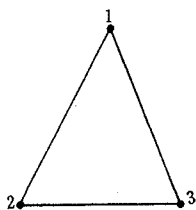


図-10(a) 3節点三角形要素

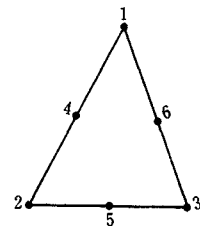


図-10(b) 6節点三角形要素

それぞれ、

$$u_1, u_2, \dots, u_n \dots (36)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n \dots (37)$$

と表わすことにする。添字 $1, 2, \dots, n$ は、要素の節点の番号に対応する。すなわち、3節点三角形要素では n は3、6節点三角形要素では n は6である。有限要素内部の任意の位置における流速 u, v を、節点の流速を用いて、次のように内挿補間する。

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_n u_n = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha u_\alpha \dots (38)$$

$$v = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \dots + \phi_n v_n = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha v_\alpha \dots (39)$$

ここに、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ は形状関数と呼ばれ、有限要素法の離散化誤差に重要な影響をもつ関数である。この関数の具体的表現は後述する。

さて、式の表示をなるべく簡単に表わすために、表示方法にある約束を設けることにする。すなわち、式(38), (39) に見るとき $\sum_{\alpha=1}^n$ なる記号を省略して表わし、式(38), (39) を

$$u = \phi_\alpha u_\alpha \dots (39)$$

$$v = \phi_\alpha v_\alpha \dots (40)$$

式(39), (40) のように表示することにする。以後、同一項に、同じ添字が繰り返して表われたときには、 Σ 記号が省略されているものと解釈し、その添字の最大個数まで積をつくらせて、加え合わせることを意味すると考える。この約束は総和規約と呼ばれている。

同様に、有限要素内部の圧力 P も節点での圧力 P_α ($\alpha=1, 2, \dots, n$) を用いて内挿補間し、

$$P = \psi_\alpha P_\alpha \dots (41)$$

とする。一般に関関関数 ψ_α は ϕ_α とは別の関数を用いる。一方、重み関数についても、それぞれ

$$u^* = \phi_\alpha u_\alpha^* \dots (42)$$

$$v^* = \phi_\alpha v_\alpha^* \dots (43)$$

$$P^* = \psi_\alpha P_\alpha^* \dots (44)$$

と考えることにする。変分方程式として、式(31)を用いることにして、式(21)~(23)を式(31)に代入して整理すると式(45)が得られる。

$$\begin{aligned} & u_\alpha^* \int_V \phi_\alpha \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \\ & + v_\alpha^* \int_V \phi_\alpha \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \\ & - u_\alpha^* \int_V (\phi_{\alpha,x} P) dV - v_\alpha^* \int_V (\phi_{\alpha,y} P) dV \\ & + u_\alpha^* \int_V \left(\phi_{\alpha,x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \phi_{\alpha,y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + v_\alpha^* \int_V \left(\phi_{\alpha,x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \phi_{\alpha,y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \\ & = u_\alpha^* Q_{\alpha x} + v_\alpha^* Q_{\alpha y} \dots (45) \end{aligned}$$

ここに

$$Q_{ax} = \int_{S_i} (\phi_a \bar{Q}_x) dS + \int_V (\phi_a \rho \bar{f}_x) dV \dots\dots (46)$$

$$Q_{ay} = \int_{S_i} (\phi_a \bar{Q}_y) dS + \int_V (\phi_a \rho \bar{f}_y) dV \dots\dots (47)$$

である。ただし、 (\quad) , x および (\quad) , y はそれぞれ、 $\frac{\partial(\quad)}{\partial x}$, $\frac{\partial(\quad)}{\partial y}$ を表わしている。式 (46), (47) は物体力と周辺力に重み ϕ_a をかけて平均した量であり、物体力と周辺力を節点に関する量に換算しなおしたものを表わしている。式 (45) において、 u_a^* と v_a^* とは任意であることを用いると、次の2組の方程式系を得ることができる。

$$\int_V \phi_a \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV - \int_V (\phi_{a,x} P) dV + \int_V \left(\phi_{a,x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \phi_{a,y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV = Q_{ax} \dots\dots (48)$$

$$\int_V \phi_a \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV - \int_V (\phi_{a,y} P) dV + \int_V \left(\phi_{a,x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \phi_{a,y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = Q_{ay} \dots\dots (49)$$

まったく同様にして、式 (34) に式 (44) を代入して整頓し、 P_a^* が任意であることを用いると、

$$\int_V \phi_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = 0 \dots\dots (50)$$

を得ることができる。式 (48), (49) は運動方程式に重み ϕ_a をかけて平均した方程式を与え、式 (50) は連続の方程式に重み ϕ_a をかけて平均した関係である。この式 (48)~(50) が有限要素法の基本的考え方を表わしている。

式 (48)~(50) に式 (39)~(41) を代入して、整頓すると最終的に有限要素法の解式を次のように得ることができる。

$$K_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta v_\gamma + H_{\alpha\beta}^x P_\beta + M_{\alpha\beta} u_\beta = Q_{ax} \dots\dots (51)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^x u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma}^y v_\beta v_\gamma + H_{\alpha\beta}^y P_\beta + M_{\alpha\beta} v_\beta = Q_{ay} \dots\dots (52)$$

$$H_{\alpha\beta}^x u_\alpha + H_{\alpha\beta}^y v_\beta = 0 \dots\dots (53)$$

ここに

$$K_{\alpha\beta\gamma}^x = \int_V \rho (\phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma)_{,x} dV$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}^y = \int_V \rho (\phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma)_{,y} dV$$

$$H_{\alpha\beta}^x = \int_V (\phi_{\alpha,x} \psi_\beta) dV$$

$$H_{\alpha\beta}^y = \int_V (\phi_{\alpha,y} \psi_\beta) dV$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \mu (\phi_{\alpha,x} \phi_{\beta,x} + \phi_{\alpha,y} \phi_{\beta,y}) dV$$

である。ただし、 x, y については総和規約は用いない。式 (51)~(53) を流れの場にあるすべての有限要素についてたて、流れの場全体について組み合わせれば、全節点における流速と圧力を未知数とする非線形連立方程式を得ることができる。この方程式を、境界条件式 (20), (21) のもとに解けば、全節点における流速と圧力を求めることができる。この過程は、構造解析における有限要素法解析とまったく同様である。非線形の連立方程式を解くことは、また別の重要な問題であるが繰り返し代入法、ニュートン-ラプソン法、摂動法などが研究されている。

(4) 形状関数

形状関数 ϕ_a と ψ_a は、有限要素法において、最も重要な役割を果たすもののうちの一つである。流速の形状関数 ϕ_a として6節点三角形要素を用いたもの、圧力の形状関数 ψ_a として3節点三角形要素を用いたものを以下に示すことにする。図-11を参照して、要素内の流速 u, v が要素ごとにとられた座標 ξ, η に関して二次の多項式で与えられると仮定する。すなわち

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi^2 + a_4 \xi \eta + a_5 \eta^2 \dots\dots (54)$$

$$v = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi^2 + b_4 \xi \eta + b_5 \eta^2 \dots\dots (55)$$

とする。ここに、 $a_0 \sim a_5$, $b_0 \sim b_5$ は未定係数である。この未定係数は、式 (54), (55) で表わされる流速が、要素の各節点では節点の流速 u_i, v_i ($i=1, 2, \dots, 6$) に等しくならねばならないことから決定される。すなわち、式 (54), (55) にそれぞれ節点の座標を代入して、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & (-b)^2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 & 0 & c^2 \\ 1 & (a-b)/2 & 0 & (a-b)^2/4 & 0 & 0 \\ 1 & a/2 & c/2 & a^2/4 & ac/4 & c^2/4 \\ 1 & -b/2 & c/2 & b^2/4 & -bc/4 & c^2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \dots\dots (56)$$

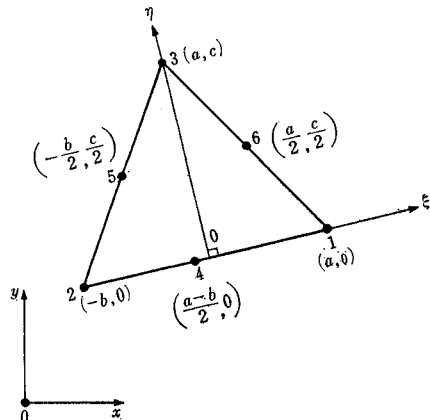


図-11 6節点三角形要素の座標

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 & (-b)^2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 & 0 & c^2 \\ 1 & (a-b)/2 & 0 & (a-b)^2/4 & 0 & 0 \\ 1 & a/2 & c/2 & a^2/4 & ac/4 & c^2/4 \\ 1 & -b/2 & c/2 & b^2/4 & -bc/4 & c^2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(57)$$

なる方程式より求められる。求められた未定定数を式(54),(55)に代入すると式(55),(56)は次のように書き換えることができる。

$$u = \sum_{p=1}^6 \mathfrak{A}_{\alpha p} \xi^{n_p} \eta^{m_p} \cdot u_{\alpha} \quad \dots\dots\dots(58)$$

$$v = \sum_{p=1}^6 \mathfrak{A}_{\alpha p} \xi^{n_p} \eta^{m_p} \cdot v_{\alpha} \quad \dots\dots\dots(59)$$

ここに、 $\mathfrak{A}_{\alpha p}$ は式(56)および(57)の右辺の係数行列の逆行列であり、 n_p, m_p は式(56)と(57)のべき乗を表わしている。すなわち

$$n_p = [0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0] \quad \dots\dots\dots(60)$$

$$m_p = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2] \quad \dots\dots\dots(61)$$

である。同様にして圧力に関する形状関数は次のようになる。要素の圧力 p を

$$p = c_0 + c_1 \xi + c_2 \eta \quad \dots\dots\dots(62)$$

と仮定することより、

$$p = \sum_{q=1}^3 \mathfrak{B}_{\alpha q} \xi^{n_q} \eta^{m_q} \cdot p_{\alpha} \quad \dots\dots\dots(63)$$

である。ここに

$$\mathfrak{B}_{\alpha q} = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} \quad \dots\dots\dots(64)$$

$$n_q = [0 \ 1 \ 0] \quad \dots\dots\dots(65)$$

$$m_q = [0 \ 0 \ 1] \quad \dots\dots\dots(66)$$

となる。式(58)と(59)から流速の形状関数 ϕ_{α} は

$$\phi_{\alpha} = \sum_{p=1}^6 \mathfrak{A}_{\alpha p} \xi^{n_p} \eta^{m_p} \quad \dots\dots\dots(67)$$

であり、圧力の形状関数 ψ_{α} は、式(63)よりわかるごとくに

$$\psi_{\alpha} = \sum_{q=1}^3 \mathfrak{B}_{\alpha q} \xi^{n_q} \eta^{m_q} \quad \dots\dots\dots(68)$$

である。

このように、形状関数は、有限要素の形状および節点の取り方に関連して決定される。従来、数多くの形状関数が提案され研究されている。このなかには、有限要素の境界線を曲線とし、しかも、その中点を節

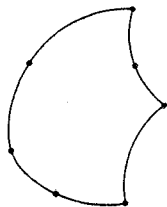


図-12 アイソパラメトリック要素の一例

点とするアイソパラメトリック要素(図-12)と呼ばれる要素などがある。この要素は任意の曲線境界に用いることができ、数値計算の結果よい近似を与えるとしており、構造解析では広く用いられている。

(5) 数値計算例

有限要素法による流体解析の数値計算の2,3例を図-13~16に示す。図-14は、わん曲した水路の定常流

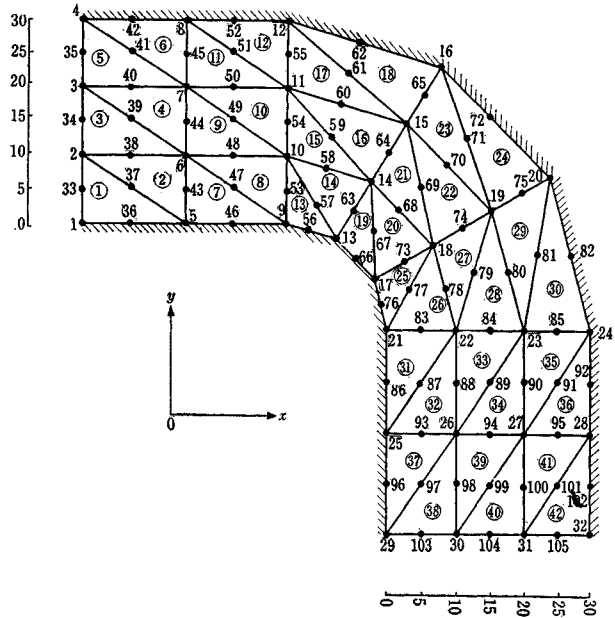


図-13 有限要素の分割

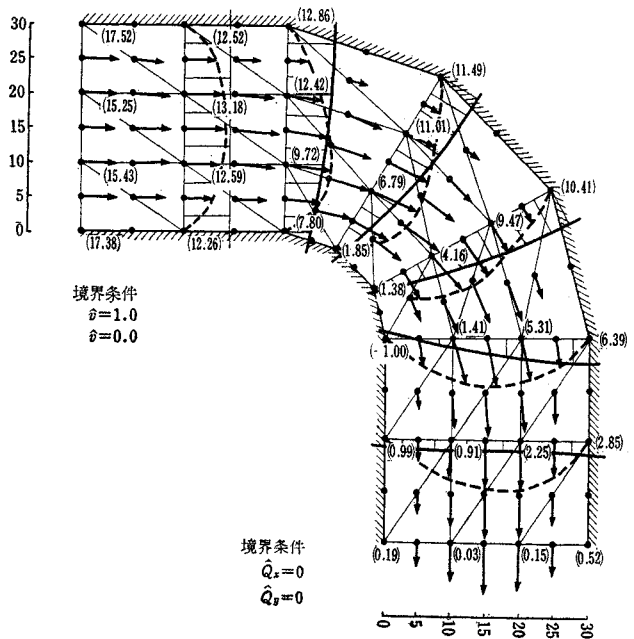


図-14 流速と圧力

れの計算結果である。有限要素の分割は図-13のように行ない、流速については、6節点三角形要素による形状関数を、圧力については、3節点三角形要素による形状関数を用いている。境界条件は、入口では流速を一様に与え、出口においては式(33)、(34)が成立するとしている。図中において矢印は流速の大きさと方向を、()内の数字は圧力の大きさを示している。この計算におけるレイノルズ数は30である。計算結果では、曲げ部で、水路の外側が圧力が高く、内側で流速が速くなっている。非線形連立方程式は、繰返し計算法によって解いている。図-15、16は入口が狭くなった水路の定常流

れを、摂動法を用いて計算した例題である。それぞれ、図-15はレイノルズ数20、図-16はレイノルズ数70のときの結果である。レイノルズ数が高くなると水路入口付近に、渦が発生する様相が計算されている。なお、この数値計算例は、大成建設の吉村信敏氏、芙蓉情報センターの中川克也氏および著者によるものである。

(6) 有限要素法の問題点

有限要素法は、解析手法であるから、流体の流れの挙動を表現する方程式が確立している現象でなければ適用することはできない。しかし、流体の基礎方程式が、連

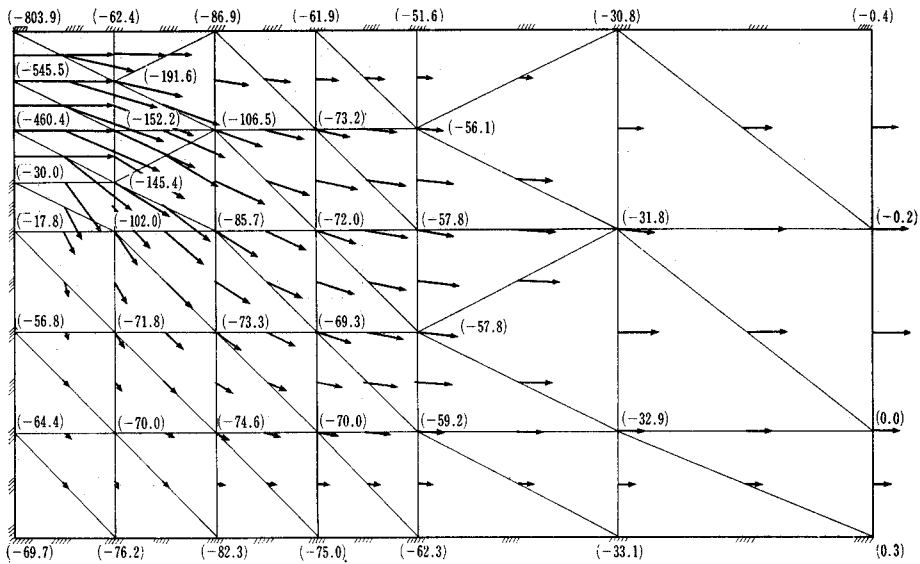


図-15]レイノルズ数 20 の流速と圧力

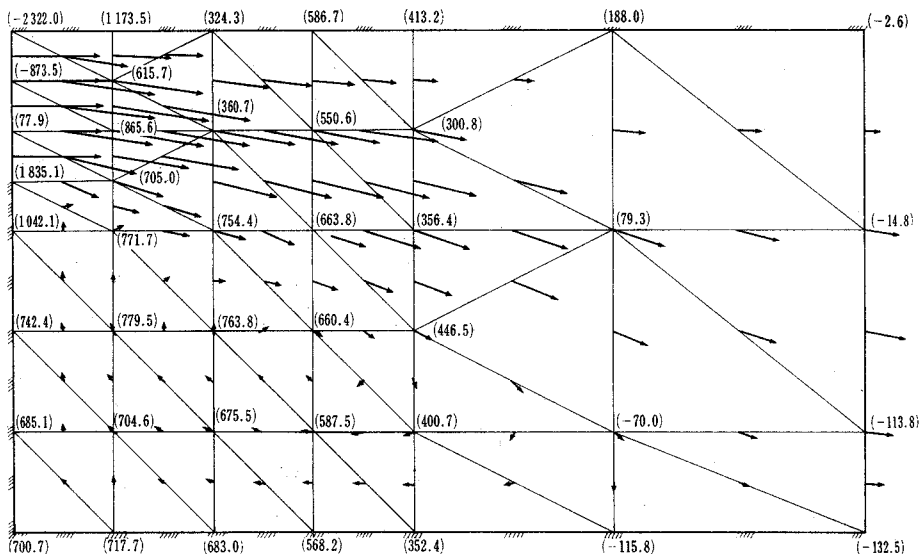


図-16 レイノルズ数 70 の流速と圧力

統体力学的観点から確立された現象に対しても、有限要素法を用いるうえで、今後の検討を待たねばならないところが種々ある。第一に検討されるべきことは、安定性も含めて、収束性の問題である。すなわち、有限要素の大きさを、どの程度に取れば、正解との誤差がどの範囲にあるかといった問題である。このためには、実測や実験との対比による現象的な検討、関数解析などによる数学的な検討などを多くの事例について行なわねばならない。これに関連して、第二として、変分定理の検討がある。ここに述べた変分方程式のほかにも、いくつかの変分定理が提案されており、どの定理によれば、いかなる問題の解決が可能であるかという研究が必要であろう。たとえば、自由表面の問題、流体中にある物体の振動問題などがその重要な課題である。第三に形状関数の取り方である。ここでは、有限要素内部における流速が二次変化、圧力が一次変化となる関数を用いている。問題によっては、これ以外の関数を用いるほうが適している場合も多いであろう。第四に、非線形連立方程式の解法がある。非定常問題、定常問題の別を問わず、解を求めるためには、未知数の非常に多い非線形連立方程式を解かねばならない。この解法の確立が必要であろう。

以上のように、有限要素法による流体の流れの解析は研究の歴史が浅く、多くの検討すべき点を残している若い学問である。それだけに、苦勞も、また楽しみも大きい。

(川原睦人)

参 考 文 献

- 1) Harlow, F.H. and Welch, J.E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phy. Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182~1965.
- 2) 本間 仁編: 応用水理学下Ⅱ, 数値解析・水文観測, pp. 138~, 1971.
- 3) 和田 明: 沿岸海洋現象における二, 三のシミュレーション手法, *海洋科学*, Vol. 5, No. 1, pp. 56~, 1973.
- 4) Harlow, F.H.: The particle-in-cell computing method for fluid dynamics, *Methods in Computational Physics*, Ed. B. Alder, S. Fernbach & M. Rotenberg, Academic Press, Vol. 3, pp. 319~, 1964.
- 5) Fromm, J.E. and Harlow, F.H.: Numerical solution of the problem of vortex street development, *Phy. of Fluids*, Vol. 6, No. 7, pp. 975~, 1963.
- 6) Fromm, J.E. and Schreiber, D.E.: System aspects of large-problem computation and display, *IBM, Systems Journal*, Vol. 11, No. 1 pp. 41~, 1972.
- 7) 渋谷政昭ほか: 2250 映像表示装置による映画作製, *IBM サイエントフィック・センター技術資料*, 7月, 1972.
- 8) Harlow, F.H., Shannon, J.P. and Welch, J.E.: *Liquid waves by Computer*, Science, Vol. 149, pp. 1092~, 1965.
- 9) Harlow, F.H. and Welch, J.E.: Numerical study of large-amplitude free-surface motions, *Phy. Fluids*, Vol. 9, No. 5, pp. 842~, 1966.
- 10) Daly, B.J.: Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability, *Phy. of Fluids*, Vol. 10, No. 2, p. 297, 1967.
- 11) Daly, B.J. and Pracht, W.E.: Numerical study of density-current surge, *Phy. of Fluids*, Vol. 11, No. 1, p. 15, 1968.
- 12) Young, J.A. and Hirt, C.W.: Numerical calculation of internal wave motions, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 56, part 2, pp. 265~, 1972.
- 13) Nichols, B.D.: Recent extensions to the Marker-and-Cell method for incompressible flows, *Proc. of the Second Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pp. 371~, 1971.
- 14) J.T. Oden and D. Somogyi: "Finite Element Applications in Fluid Dynamics", *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 95, No. EM 3, pp. 821~6, 1968.
- 15) J.T. Oden: "A Finite Element Analog of the Navier-Stokes Equations", *Proc. A.S.C.E.*, Vol. 96, No. EM 4, pp. 529~34, 1970.
- 16) J.T. Oden: "The Finite Element Method in Fluid Dynamics", *NATO Advanced Study Institute Lisbon*, 1971.
- 17) J.T. Oden: "Finite Element Formulation of Problems of Finite Deformation and Irreversible Thermodynamics of Nonlinear Continua", *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, 1971.
- 18) Ping-Tong: "The Finite Element Methods for Fluid Flow", *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, 1971.
- 19) O.C. Zienkiewicz: "Weighted Residual Processes in F.E.M. with Particular Reference to Some Problems and Coupled Problems", *NATO Advanced Study Institute*, 1971.
- 20) E. Skiba, T.E. Unny and D.S. Weaver: "A Finite Element Solution for a Class of Two Dimensional Viscous Fluid Dynamics Problems", *Proc. Symposium at University of Waterloo, Canada*, 1971.
- 21) 川原睦人: "流体力学における有限要素法", 第 22 回応用力学連合講演会, 1972.

土木技術者のための法律講座 ●改訂版完成いたしました●

B 5・126 ページ 8ポ二段組並製 1100 円 会員特価 1000 円 (〒100 円)

●総論●財政●会計制度●建設業法●標準契約約款●公害対策基本法●騒音規制法●水質汚濁防止法●大気汚染防止法●労働基準法および関係法令●市街地土木工事公衆災害防止対策要項および火薬類取締法●道路交通関係法令●河川・砂防・海岸・公有水面行政法規●港湾関係法令●都市計画法●水道法●下水道法●建築基準法●宅地造成等規制法●土地収用法(第2版で追加)●

確率論手法による構造解析

星谷 勝著 A5判 180頁 ¥1,500
 構造物の設計・解析において必要不可欠な、確率・統計論手法を説き、土木・建築の構造工学者、技術者を対象とし、静的・動的の両部門にまたがって、とかく難解となりがちなこの種の内容をわかりやすく扱った著作である。 東大教授 伊藤 学・推薦

土木工事標準積算便覧

工事費積算研究会編●重版出来/B5判 300頁 ¥3,500
 工事費積算の体系化を行ない、最近の機械化施工や工事の施工実績に基づく標準歩掛を確立した書。

現場技術者のための土質工学●重版出来/

最上武雄・福田秀夫共編 B5判 420頁 ¥2,500
 建設現場の積算・施工に従事するすべての技術者の必携書として、土質技術者養成のテキストにも最適。

トンネル技術者のための岩盤力学入門

Q, イザクソン著 A5判・260頁 ¥1,400
 国鉄技研地質研究室・高橋彦治・小林芳正共訳
 地圧の問題を懇切に解決し、これまで比較的稀薄であった分野を埋める意義ある書——岡本舜三

凍結工法

ドルマン, トルウバック共著/原田千三訳編
 A5判 230頁 ¥2,200

土質工学の基礎—土の力学的挙動

ヤン, ワーケンティン共著/山崎不二夫, 山内豊聡共訳
 A5判 450頁 ¥2,400

現場技術者のための都市土木—土と水の諸問題

福田秀夫・坂野五郎共編——B5判・300頁 ¥2,800

* 小社は注文制を主にしていますので、万一店頭がないときは書店にご注文下さい。

明日を築く
 知性・技術

鹿島出版会

107東京都港区赤坂6 5 13 電話582 2251 振替東京180883

土木 施工技術 雑誌

5月号 4月20日発売 定価 360円 (〒40円)

〈特別企画〉 本四連絡橋基礎工の概要

1. 基礎工調査の概要……………本四公団 吉田 滋
2. 自然条件調査
 気象調査……………本四公団 西野新造 測量調査……………本四公団 小暮三郎
 航行安全調査……………本四公団 鍋島正昭 地質調査……………本四公団 越智啓登
 (A,D,Eルート) 山根 守 高田志郎
3. 下部工設計調査……………本四公団 富岡 紘
4. 試験工事……………本四公団 遠藤武夫
5. 作業船……………本四公団 伊藤六兵衛
6. 掘削試験……………本四公団 沢田茂良
7. コンクリート調査……………本四公団 金沢克義
8. 施工計画(A,D,Eルート)……………本四公団 六車真一
 金光 宏 山田勝彦

土質安定 工法便覧

京都大学 松尾新一郎 編
 A5判 730ページ
 定価 7,000円(〒300円)

〈呈内容見本〉

土質安定工法の意義と分野、工法選択のポイント、そして、34の工法を用途、原理、設計、施工法、施工例、施工上の注意点にわたって、図を多数用いて解説。

集録工法：粒度調整工法/凝集沈澱工法/締固め工法/水締め工法/置換工法/爆破工法/パイロ・フローテーション工法/サンド・コンパクション・パイル工法/電気衝撃工法/セメント安定処理工法/アスファルト安定処理工法/石灰安定処理工法/合成樹脂安定処理工法/被覆工法/防じん処理工法/プレローディング工法/サンド・ドレーン工法 ほか

日刊工業新聞社

東京都千代田区九段北 1-8-10