解　説

非定常な不規則外乱を受ける構造物の応答計算法

高　岡　宣　善*

1. まえがき

著者は先に不規則関数のスペクトル展開法とその応用について報告した[1]。以下においては，その理論をさらに拡張し，一般的な非定常不規則関数を解析する方法ならびに非定常な外乱を受ける構造物の応答計算法について報告する。

先の論文の中で述べてあるように，不規則関数を解析する際にわれわれが用いる手段は，一般に，相関理論とスペクトル理論の二つであり，数値計算に際してはスペクトル理論（振動数領域での計算）を用いるほうが好都合である。

時間 t の不規則関数をスペクトル展開するということは，この不規則関数を振動数 ω の不規則関数として表示する，ということを意味する。不規則関数をこのようにスペクトル表示しておけば，2. 以下で述べるように，非定常問題の取扱いが容易となる。われわれは，定常不規則関数に対しては時間領域における相関関数を用いたが，非定常問題の研究に対しては，時間領域のみならず，振動数領域ならびに時間—振動数領域において定義される相関関数を導入すると便利である。

2. 非定常な不規則関数の相関関数

不規則関数 $X(t)$ が，次式に示すようにスペクトル表示されることは，文献[1),6)]の中に示されている：

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\Phi_x(\omega). \quad\cdots\cdots(1)$$

ここに，不規則関数 $X(t)$ は定常でも，あるいはまた非定常でもよいが，以下においては，$X(t)$ は一般的な非定常不規則関数とする。また，上式においては，簡単のために，$X(t)$ の期待値は

$$\bar{x}=\mathbf{E}[X(t)]=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

と仮定した[a)]。そうすると，式 (1) を（時間領域での）相関関数の定義式に代入し，期待値（を求める）演算と積分演算との順序を交換することにより，次式が得られる：

$$K_x(t_1, t_2)=\mathbf{E}[X^*(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 t_2-\omega_1 t_1)}\mathbf{E}[d\Phi_x^*(\omega_1)d\Phi_x(\omega_2)]. \quad\cdots\cdots(3)$$

上式中，星印 * は共役複素数を意味する記号である。

式 (1) および (3) において，関数 $\Phi_x(\omega)$ は振動数 ω を助変数とする不規則関数であり，下つき添字 x はこの $\Phi_x(\omega)$ が $X(t)$ に属するものであることを示している。いま，$\Phi_x(\omega)$ は ω について微分可能であるとすれば

$$d\Phi_x(\omega)=V_x(\omega)d\omega \quad\cdots\cdots(4)$$

と表わせるから，式 (1) は

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}V_x(\omega)d\omega \quad\cdots\cdots(5)$$

と書ける。ここに，$V_x(\omega)$ も ω の不規則関数である。

そこで，$\mathbf{E}[V_x(\omega)]=0$ であることを考慮して，$V_x(\omega)$ の（振動数領域での）相関関数を次式で定義する：

$$Q_x(\omega_1, \omega_2)=\mathbf{E}[V_x^*(\omega_1)V_x(\omega_2)]. \quad\cdots\cdots(6)$$

上式の $Q_x(\omega_1, \omega_2)$ は一般化されたスペクトル密度と呼ばれることがある[2)]。

さらに，2つの不規則関数 $V_x(\omega)$ と $X(t)$ との間の二次のモーメント $S_x(\omega, t)$ を次式で定義しよう：

$$S_x(\omega, t)=\mathbf{E}[V_x^*(\omega)X(t)]. \quad\cdots\cdots(7)$$

上式の $S_x(\omega, t)$ は，1つの非定常不規則関数を振動数領域および時間領域で表示した各式の間の相関関数を表わしている。

さて，式 (5) は確定関数の場合の Fourier 変換と同じ形をしているから，この式より

$$V_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}X(t)dt \quad\cdots\cdots(8)$$

と表わせることがわかる[b)]。式 (8) の ω として ω_2 を代入したものを式 (6) の右辺の $V_x(\omega_2)$ に代入し，式 (7) を考慮すると，式 (6) は次のように変形できる：

$$Q_x(\omega_1, \omega_2)=\mathbf{E}\left[V_x^*(\omega_1)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 t}X(t)dt\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_2 t}\mathbf{E}[V_x^*(\omega_1)X(t)]dt$$

* 正会員　工博　鳥取大学教授 工学部土木工学科

a) 期待値演算の記号として，文献[1)]では $\mathbf{M}$ という文字を使用したが，本論文では文字 $\mathbf{E}$ を用いることにする。

b) 不規則関数の Fourier 変換が存在するか否かについては文献[2)]の 3·8 を参照されたい。

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t}S_x(\omega_1,t)\,dt. \quad\cdots\cdots(9)$$

同様にして，式 (3) を変形すると

$$K_x(t_1,t_2)=\mathbf{E}\left[X(t_2)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t_1}d\Phi_x{}^*(\omega_1)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t_1}\mathbf{E}[V_x{}^*(\omega_1)X(t_2)]\,d\omega_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t_1}S_x(\omega_1,t_2)\,d\omega_1$$

となる。ここで，あらためて ω_1 を ω と書き直せば

$$K_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t_1}S_x(\omega,t_2)\,d\omega \quad\cdots\cdots(10)$$

となる。この式を逆変換すれば

$$S_x(\omega,t_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_1}K_x(t_1,t_2)\,dt_1. \quad\cdots(11)$$

さらに，上式において，t_1 と t_2 とを入れかえ，また一般に $K_x(t_2,t_1)=K_x(t_1,t_2)$ であることに注意し[6),7)]，あらためて t_1 を t と書き直せば

$$S_x(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_2}K_x(t,t_2)\,dt_2 \quad\cdots\cdots(12)$$

という式が得られる。

式 (12) の右辺を部分積分すれば

$$S_x(\omega,t)=-\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_2}\frac{\partial}{\partial t_2}K_x(t,t_2)\,dt_2 \quad\cdots\cdots(13)$$

となる。この式の両辺を t で微分して次の関係を得る：

$$\frac{\partial}{\partial t}S_x(\omega,t)=-\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}K_x(t,t_2)\,dt_2. \quad\cdots\cdots(14)$$

ここで

$$Y_1(t)=\dot{Y}(t)=\frac{dX(t)}{dt} \quad\cdots\cdots(15)$$

と置けば，式 (12) により

$$S_{y_1}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_2}K_{y_1}(t,t_2)\,dt_2 \quad\cdots\cdots(16)$$

という関係が成立し，一方，時間領域での相関関数においては，一般に

$$K_{y_1}(t,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial t_2}K_x(t,t_2) \quad\cdots\cdots(17)$$

という関係があるから[6),7)]，式 (17) を (14) の右辺に代入し，式 (16) を考慮することにより，次の関係を得る：

$$S_{y_1}(\omega,t)=-i\omega\frac{\partial}{\partial t}S_x(\omega,t). \quad\cdots\cdots(18)$$

また，式 (9) により，$S_{y_1}(\omega,t)$ と $Q_{y_1}(\omega,\omega_1)$ との間には

$$Q_{y_1}(\omega,\omega_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t}S_{y_1}(\omega,t)\,dt \quad\cdots(19)$$

という関係が成立するから，式 (18) を上式の右辺に代入し，部分積分したあと，式 (9) を考慮すると

$$Q_{y_1}(\omega,\omega_1)=-\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t}\frac{\partial}{\partial t}S_x(\omega,t)\,dt$$

$$=\frac{\omega\omega_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1 t}S_x(\omega,t)\,dt$$

$$=\omega\omega_1 Q_x(\omega,\omega_1) \quad\cdots\cdots(20)$$

となる。この関係を繰り返して使用すれば

$$Y_n(t)=\frac{d^nX(t)}{dt^n} \quad\cdots\cdots(21)$$

に対して

$$Q_{y_n}(\omega,\omega_1)=(\omega\omega_1)^nQ_x(\omega,\omega_1) \quad\cdots\cdots(22)$$

という関係が得られる。

3. 運動方程式の解の確率特性値

運動方程式は一般に

$$\ddot{Y}(t)+a\dot{Y}(t)+bY(t)=X(t) \quad\cdots\cdots(23)$$

という形で与えられる。ここに，a および b は実数または複素数の定数であり，粘性減衰系に対しては

$$a=2\zeta\omega_n,\ b=\omega_n{}^2, \quad\cdots\cdots(24)$$

また，構造減衰系に対しては

$$a=0,\ b=(u+iv)\omega_n{}^2 \quad\cdots\cdots(25)$$

とすればよい[3)]。$X(t)$ は系に作用する外乱であり，$Y(t)$ は系の応答であって，両者はいずれも非定常不規則過程である。

以下においては，記述の簡単のために，式 (23) を

$$P(D)Y(t)=X(t) \quad\cdots\cdots(26)$$

と書くことによる。ここに，$P(D)$ は微分演算子 $D=d/dt$ の2次多項式

$$P(D)=D^2+aD+b \quad\cdots\cdots(27)$$

を表わす。

さて，式 (8) の $X(t)$ のかわりに $Y(t)$ と置いた式の右辺を部分積分し，$Y(-\infty)=Y(+\infty)=0$ であることに注意すれば

$$V_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}Y(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\dot{Y}(t)\,dt=\frac{1}{i\omega}V_{\dot{y}}(\omega)$$

となる。したがって

$$V_{\dot{y}}(\omega)=i\omega V_y(\omega). \quad\cdots\cdots(28)$$

同様にして，次の関係が得られる：

$$V_{\ddot{y}}(\omega)=(i\omega)^2V_y(\omega). \quad\cdots\cdots(29)$$

次に，式 (23) の両辺に $e^{i\omega t}/(2\pi)$ をかけ，t について $-\infty$ から $+\infty$ まで積分し，式 (28)，(29) を考慮すれば

$$\{(i\omega)^2+a(i\omega)+b\}V_y(\omega)=V_x(\omega)$$

となる。したがって，式(27)を用いて上式を変形すれば

$$V_y(\omega)=\frac{V_x(\omega)}{P(i\omega)}. \quad\cdots\cdots(30)$$

上式と式 (6) から

$$Q_y(\omega_1,\ \omega_2)=\mathbf{E}[V_y^*(\omega_1)V_y(\omega_2)]$$
$$=\frac{\mathbf{E}[V_x^*(\omega_1)V_x(\omega_2)]}{P^*(i\,\omega_1)P(i\,\omega_2)}=\frac{Q_x(\omega_1,\ \omega_2)}{P^*(i\,\omega_1)P(i\omega_2)} \quad \cdots\cdots(31)$$

という関係が得られる。

最後に，時間領域での応答 $Y(t)$ の相関関数は，式(6)と (8) により，次のようになる：

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2t_2-\omega_1t_1)}\mathbf{E}[d\,\Phi_y^*(\omega_1)\,d\,\Phi_y(\omega_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2t_2-\omega_1t_1)}\mathbf{E}[V_y^*(\omega_1)V_y(\omega_2)]d\,\omega_1d\omega_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2t_2-\omega_1t_1)}Q_y(\omega_1,\ \omega_2)\,d\,\omega_1d\,\omega_2. \quad \cdots(32)$$

したがって，$Y(t)$ の分散は

$$\sigma_y{}^2(t)=K_y(t,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2-\omega_1)t}Q_y(\omega_1,\ \omega_2)\,d\,\omega_1d\,\omega_2 \quad \cdots\cdots(33)$$

で与えられる。

［例題］ 地震動加速度 $X(t)$ の相関関数 $K_x(t_1,\ t_2)$ が次式で与えられているものとしよう：

$$K_x(t_1,\ t_2)=\left\{\begin{array}{ll}\beta^2t_1t_2e^{-\alpha(t_1+t_2)}, & t_1,\ t_2>0,\\ 0, & t_1,\ t_2\leq 0.\end{array}\right\} \quad (\mathrm{a})$$

ここに，α および β はいずれも正の定数である。

式 (12) と式 (a) から

$$S_x(\omega,\ t)=\frac{\beta^2te^{-\alpha t}}{2\pi}\int_0^{\infty}t_2e^{-(\alpha-i\omega)t_2}dt_2$$
$$=\frac{\beta^2te^{-\alpha t}}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha-i\,\omega)^2},\ t>0 \quad (\mathrm{b})$$

が得られ，また式 (a) と式 (b) から，次式が得られる：

$$Q_x(\omega_1,\ \omega_2)=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{(\alpha-i\,\omega_1)^2}\int_0^{\infty}te^{-(\alpha+i\omega_2)t}dt$$
$$=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{(\alpha-i\omega_1)^2}\cdot\frac{1}{(\alpha+i\,\omega_2)^2}. \quad (\mathrm{c})$$

上式を式 (31) に代入すれば

$$Q_y(\omega_1,\ \omega_2)$$
$$=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{P^*(i\,\omega_1)P(i\,\omega_2)(\alpha-i\,\omega_1)^2(\alpha+i\,\omega_2)^2} \quad (\mathrm{d})$$

となる。式 (d) を式 (33) に代入すれば

$$\sigma_y{}^2(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t) \quad (\mathrm{e})$$

と書ける。ここに

$$\varphi_1(t)=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{P(i\,\omega)(\alpha+i\,\omega)^2}d\,\omega, \quad (\mathrm{f})$$

$$\varphi_2(t)=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{P^*(i\,\omega)(\alpha-i\,\omega)^2}d\,\omega$$
$$=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{P^*(-i\,\omega)(\alpha+i\,\omega)^2}d\,\omega. \quad (\mathrm{g})$$

とくに，粘性減衰系のように，定数 a および b が実数の場合には，$P^*(-i\,\omega)=P(i\,\omega)$ となるから，このときには $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)$ となり，したがって

$$\sigma_y(t)=|\varphi_1(t)| \quad (\mathrm{h})$$

となる。

数値計算例として，文献 1) の［例題］の振動系（非減衰固有円振動数 $\omega_n=10$ rad/sec, 減衰定数 $\zeta=0.05$) を採用し，また $\alpha=7\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\beta=1\,000\ \mathrm{cm/sec}^3$ としよう。この場合には

$$P(i\,\omega)=-\omega^2+2\,i\,\zeta\omega_n\omega+\omega_n{}^2, \quad (\mathrm{i})$$

$$\varphi_1(t)=\frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(-\omega^2+2\,i\,\zeta\omega_n\omega+\omega_n{}^2)(\alpha+i\,\omega)^2}d\,\omega \quad (\mathrm{j})$$

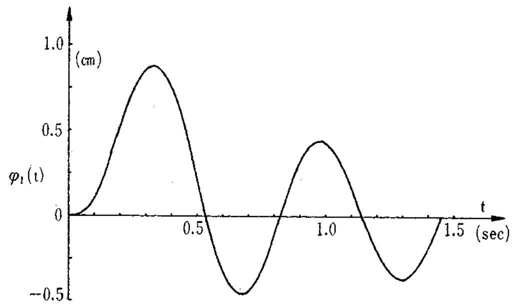
となる。留数定理を用いてこの積分を遂行すれば

$$\varphi_1(t)=\beta e^{-\alpha t}\frac{t(\alpha^2-2\,\alpha\zeta\omega_n+\omega_n{}^2)+2(\alpha-\zeta\omega_n)}{(\alpha^2-2\,\alpha\zeta\omega_n+\omega_n{}^2)^2}$$
$$-\frac{\beta e^{-\zeta\omega_nt}}{\omega_d}\frac{[\omega_d{}^2-(\alpha-\zeta\omega_n)^2]\sin\omega_dt+2\omega_d(\alpha-\zeta\omega_n)\cos\omega_dt}{(\alpha^2-2\,\alpha\zeta\omega_n+\omega_n{}^2)^2} \quad (\mathrm{k})$$

となる。ここに

$$\omega_d{}^2=(1-\zeta^2)\omega_n{}^2. \quad (\mathrm{l})$$

図―1 は，上記の数値を用いて式 (k) の $\varphi_1(t)$ を計算した結果を図示したものである。



図―1 式 (k) で与えられる関数 $\varphi_1(t)$

4. あとがき

この論文は，非定常な外乱の作用を受ける構造物の応答を解析するのに必要な理論とその応用方法について述べたものである。もし系に作用する外乱が定常であるならば，その場合には，一般に

$$Q_x(\omega_1,\ \omega_2)=S_x(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2) \quad \cdots\cdots\cdots(34)$$

となる[1),6),7)]。ここに，$S_x(\omega_1)$ は ω_1 の偶関数であり，これは $X(t)$ のスペクトル密度と呼ばれているものである。式 (34) を式 (9) の左辺に代入し，Fourier 逆変換によって $S_x(\omega_1,\ t)$ を求めると[c)]

$$S_x(\omega_1,\ t)=e^{i\omega_1t}\ S_x(\omega_1) \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

c) Dirac のデルター関数 $\delta(\omega_1-\omega_2)$ を含む無限積分においては，推移積分の関係を利用するとよい。

が得られる。

さらに，応答 $Y(t)$ も定常とすれば，式 (34) と同様に

$$Q_y(\omega_1, \omega_2) = S_y(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

となるので，式 (34) および (36) を式 (31) に代入し，両辺を ω_1 について $-\infty$から $+\infty$まで積分すると

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{|P(i\omega)|^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

という関係を得る（上式においてはωの下つき添字2を省略してある)。式 (37) は，定常不規則関数の理論で周知の公式で，入出力の各スペクトル密度の間の関係を表わしている。

この論文をまとめるに当っては文献[4),5)]（とくに前者）に負うところが大きい。図—1 の作成は，鳥取大学工学部土木工学科助手田中久三君にお願いした。ここに記して，各位に謝意を表したい。

参 考 文 献

1) 高岡宣善：不規則関数のスペクトル展開とその応用，土木学会誌第 57 巻第 10 号，1972 年.
2) Y.K. Lin 著，森・富田・小林・佐藤・小林共訳：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972 年.
3) 高岡宣善：構造材料の内部摩擦による減衰振動，土木学会誌第 57 巻第 3 号，1972 年.
4) Жаров, А.М. : Реакция сооружения на нестационарное сейсмическое воздействие（非定常外乱による構造物の応答). Строительная Механика и расчет сооружений, No. 6, 1964.
5) Lampard, D.G. : Generalization of the Wiener-Khintchine Theorem to Nonstationary Processes. Journal of Applied Physics, Vol. 25, No. 6, 1954.
6) Свешников, А.А. : Прикладные методы теории случайных функций（応用不規則関数論). Издательство «Наука», Москва, 1968.
7) Пугачев, В.С. : Введение в теорию вероятностей（確率論入門). Издательство «Наука», Москва, 1968.

(1972.10.4・受付)