

# 数値解析法講座 14

## 応用編

### 岩盤変形解析

林 正夫\*・飯田隆一\*\*

#### まえがき

最近、ダム、大規模な橋梁、地下発電所など巨大な構造物の建設があいついで行なわれるに伴って、岩盤の透水、変形、応力の解析についても、岩盤の特性に対応した解析方法について、幾多の研究が行なわれるようになった。とくに、岩盤の透水性、非弾性的な応力-ひずみの関係、粘弾性的な変形の進行、動的な弾性と粘性などに関する数値解析は有限要素法の発達に伴って、急速な進歩をみせている。しかし、岩盤に特有な異方性、不連続性などに関しては研究を進めるべき余地が多く、まだ定型的な手法が広く行なわれているわけではないが、ここ三、四年の間に、上記の土木工事に関連して行なわれた、有限要素法の応用としての数値解析のうち基本的な事項について以下に述べることにする。

#### 1. 浸透流の解析

岩盤内の浸透流は一般に Darcy の法則に従うと考えられている。しかし、実際にはルジオン値（ボーリング孔 1 m につき 10 kg/cm<sup>2</sup> の圧力で岩盤中に圧入される 1 分あたりの水の量 (l) をいう) が 1 桁のときは、明らかに Darcy の法則に従うが、20~30 ルジオン以上では Darcy の法則に従っていないと考えられる実測値が得られている。このため、岩盤内の浸透流の解析を行なうには、これらの現象を説明しうるような研究が必要で、非 Darcy 流の解析方法についても、一、二<sup>1), 2)</sup> 試みられているが、これらの解析に用いる諸係数の決定方法が未知であることと検証に用いる実測資料の不足などから、解析方法の提案にとどまっていた、実際には用いられていない。このため、Darcy の法則が適用できるか

どうかを定性的に判断して適用しうると判断できる範囲内で、数値解析が試みられているのが実状である。

由来、Darcy の法則に従う浸透流の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} + (u/k_{11} + v/k_{12}) &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} + (u/k_{12} + v/k_{22}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

で表わされ、このほか連続の方程式として

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial h}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

として表わされるので、熱伝導の問題と同型の方程式となり、数値解析としては簡単な部類に属する。しかし、浸潤面が形成される場合には、境界面の一部としての浸潤面の位置が未知であるために、解析上やっかいな問題となり、さらに非定常問題では、その浸潤面が時間とともに移動するために、より複雑となる。これらの問題については、浸潤面の追跡については川本の研究<sup>3)</sup>があり、非定常問題に対しては飯田の研究<sup>2)</sup>がある。これらについて簡単に説明を加えよう。

いま、浸潤面が

$$f(x, y, t) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

にて表わされるとする。図-1 から、 $u, v$  なる流速により浸潤面が  $\partial h / \partial t$  だけ上昇したとすると

$$u \delta y + v \delta x = \frac{\partial h}{\partial t} \delta x$$

となり、

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} \dots\dots\dots (4)$$

が浸潤面上で成立することになる。

さて、式 (1)、(2) に変分原理を適用してみる。いま、 $u, v, h$  は式 (1)、(2) を満足し、 $u + \delta u, v + \delta v, h + \delta h$  は式 (1) を満足し、式 (2) を満足しないとする。しからるとき

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta h) + (\delta u/k_{11} + \delta v/k_{12}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\delta h) + (\delta u/k_{12} + \delta v/k_{22}) = 0$$

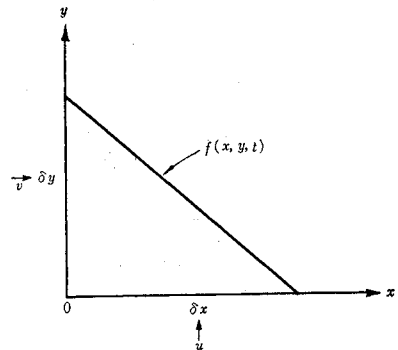


図-1

\* 正会員 工博 電力中央研究所 技術第二研究所 地盤耐震当  
任兼地盤基礎研究室長

\*\* 正会員 建設省土木研究所フィルダム研究室長

が成立する。これから

$$\iint \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\delta h) + (\delta u/k_{11} + \delta v/k_{12}) \right\} u + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\delta h) + (\delta u/k_{12} + \delta v/k_{22}) \right\} v \right] dx dy dz = 0$$

が成立する。いま、浸潤面上にとつた境界面を  $F$  とし、浸潤面下で、透水層内にとつた境界面を  $S$  とすると

$$\int_{S+F} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y)] \delta h ds - \iint \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta h dx dy + \iint [(u/k_{11} + v/k_{12}) \delta u + (u/k_{12} + v/k_{22}) \delta v] dx dy = 0$$

これに式(2)を代入し、浸潤面  $F$  上では式(4)が成立することを考慮すると

$$\int_S [u \cos(n, x) + v \cos(n, y)] \delta h ds + \int_F \frac{\partial h}{\partial t} \delta h \cos(n, y) ds + \iint \alpha \frac{\partial h}{\partial t} \delta h dx dy + \iint [(u/k_{11} + v/k_{12}) \delta u + (u/k_{12} + v/k_{22}) \delta v] dx dy = 0 \dots \dots \dots (5)$$

これが、弾性問題における仮想仕事の原理に対応するもので、これにより浸潤面を有する浸透流の有限要素法による解析が可能となる。その詳細については原論文<sup>2)</sup>にゆずるとして、ここで注目すべきことは、浸潤面上では他の境界面における法線方向の単位長さあたり、単位時間あたりの流入量  $\{u \cos(n, x) + v \cos(n, y)\}$  に相当するものは  $\partial h / \partial t \cos(n, y)$  となるから、浸潤面のそ

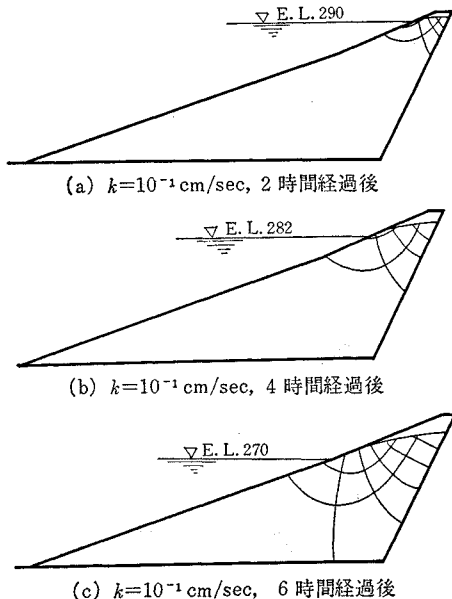


図-2 非定常浸透流計算例

の面の法線方向への移動量に相当することになる。これから、定常浸透流の場合には、圧力  $p$  が 0 で、流入量が 0 となる点を節点を移動させることにより求めれば、浸潤面の位置を求めることが可能となり、非定常浸透流の場合には、ある時刻  $t$  における浸潤面の位置が既知の場合には、 $t + \Delta t$  のときの境界条件で計算を行ない、時刻  $t$  における浸潤面での圧力を 0 に保つために必要な浸潤面上での外部からの流入量を求めれば、 $\Delta t$  時間での浸潤面の移動量を求めることができる。

この方法により、フィルダムの水面急降下時の間引き水圧の解析が行なわれている。

## 2. 岩盤の非弾性的解析の概要

岩盤内には節理などの不連続面が存在するため、非弾性的な特性を示し、これらに対し幾多の研究がなされてきた。これらの研究を要約すると

- ① 異方性弾性体としての解析
- ② 粘弾性的な解析
- ③ 非弾性的な応力-ひずみ関係を考慮した解析
- ④ ①~③ を組み合わせた解析

に分類しうる。

異方性弾性体としての解析は、弾性解析の一部であるから省略することにし、粘弾性解析については、次節で述べることにする。

非弾性的な応力-ひずみ関係を考慮した解析は、大別して

- ① いわゆる非線形解析、
- ② 岩盤の非弾性的特性は、岩盤内に存在する節理などの不連続面によると考えられるので、これらの不連続面を考慮した解析、

に分けられる。

このうち、非線形解析については、材料非線形問題として、前号に詳述されているので、岩盤特有の問題に限定して 4. に述べることにする。

不連続面を考慮した解析は、岩盤特有の問題であるので、いままでに行なわれてきた研究の代表的なものについて 5. で述べることにする。

## 3. 岩盤の粘性を考慮した解析

泥岩、風化砂岩その他軟岩の類は、強度が低いので、塑性と粘性が混った形式で経時的に変形を生じる。いま掘削を対象として、粘性と弾性の相互作用に関し、1つの方法を解説しておこう。

【状態-1】掘削  $i$  により、まず各要素は弾性ひずみ  $\epsilon_{e,i}$  を生じ、いま各要素が拘束なしにクリープすると

考えると、 $p$  段階後のクリープひずみの増分  $d\epsilon_c$  は粘弾性モデルとして、3要素 Voigt 型をとるとすると

$$d\epsilon_c = \Delta\epsilon_{e,1} \cdot \alpha \left\{ -\exp\left(-\beta \sum_{i=1}^p \Delta t_i\right) + \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{p-1} \Delta t_i\right) \right\}$$

$$+ \Delta\epsilon_{e,2} \cdot \alpha \left\{ -\exp\left(-\beta \sum_{i=2}^p \Delta t_i\right) + \exp\left(-\beta \sum_{i=2}^{p-1} \Delta t_i\right) \right\}$$

.....

$$+ \Delta\epsilon_{e,p-1} \cdot \alpha \left\{ -\exp\left(-\beta(\Delta t_{p-1} + \Delta t_p)\right) \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\beta \Delta t_{p-1}\right) \right\} + \Delta\epsilon_{e,p} \cdot \alpha \left\{ -\exp\left(-\beta \Delta t_p\right) \right\}$$

.....(6)

ここに、 $\alpha$  はクリープひずみの弾性ひずみに対する比率であり、 $\beta$  はクリープひずみの発生速度に関する定数である。現実の岩盤では、 $\alpha$ 、 $\beta$  は応力水準によって変化するので、数値解析で具体的に取り入れる物性は今後研究すべき事柄が多い。この状態-1 では  $d\epsilon_c$  を完全に阻止する状態を考え、阻止節点力  $\{dS^{(1)}\}$  とし、そのために生じる岩盤内の応力分布  $\{d\sigma_1^{(1)}\}$  を求める。

$$\{d\sigma_1^{(1)}\} = -[D]\{d\epsilon_c\} \dots \dots \dots (7)$$

【状態-2】 次に、各要素を節点系に接合して、構造物と地山とを1つの系とする。そして、状態-1 で求めた  $\{dS^{(1)}\}$  と等大異符号の外力  $\{dS^{(2)}\}$  を各節点に作用させて拘束を解く。このときには、各節点は相互に弾性もしくは弾塑性的に構造物と地山に接合されている不静定構造であるとする。

$$\{dS^{(2)}\} = -\{dS^{(1)}\} \dots \dots \dots (8)$$

この値は、仮想仕事の原理を適用すると

$$\{dS^{(2)}\} = \iint [J^{-1}]^T [D] \{d\epsilon_c\} dx dy \dots \dots \dots (9)$$

で求める。ここに  $\{V\} = [J]\{\epsilon\}$  である。状態-2 での

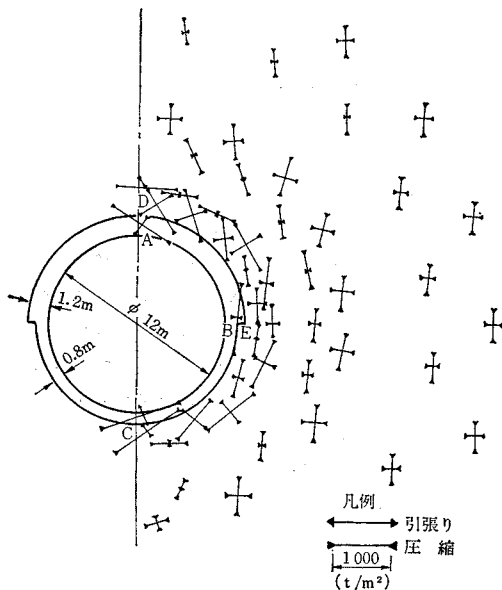


図-3 粘塑性地山内のトンネル覆工に作用する主応力分布 (ケースA3, 100日後)

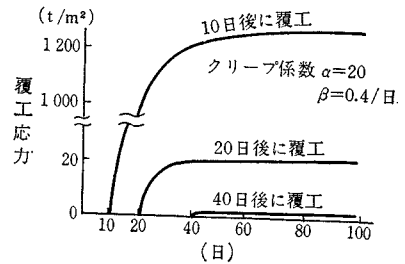


図-4 トンネル覆工への粘塑性応力経時変化の計算例

系としての節点荷重  $\{dF^{(2)}\}$  と  $\{dS^{(2)}\}$  の関係は

$$\{dF^{(2)}\} = [a]^T \{dS^{(2)}\} \dots \dots \dots (10)$$

となる。ここで、 $[a]$  は配列マトリックスで、 $\{V\} = [a]\{r\}$  で定義されている。状態-2 における応力は

$$\{d\sigma^{(2)}\} = [D][\epsilon] = [D][J^{-1}][V] = [D][J^{-1}][a]\{d r^{(2)}\} \dots \dots \dots (11)$$

となる。

【状態-3】 結局  $\{d\epsilon_c\}$  が発生しようとして、地山構造物に弾塑性的に阻止されて「あと荷」が発生する状態は状態-1 と状態-2 の和として求められる。

$$\{d\sigma^{(3)}\} = \{d\sigma^{(1)}\} + \{d\sigma^{(2)}\} = -D\{d\epsilon_c\} + \{d\sigma^{(2)}\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\{d r^{(3)}\} = \{d r^{(1)}\} + \{d r^{(2)}\} = \{0\} + \{d r^{(2)}\} \dots \dots \dots (13)$$

この解析はトンネルの覆工に適用され、図-3 にはトンネル掘削後 10 日目の主応力が示されており、図-4 にはトンネル覆工に作用する粘弾性応力の経時変化と覆工時期との関係が示されている。

粘弾性解析の手法は、別に堀井・川原<sup>5)</sup>、桜井<sup>6)</sup>らによっても提案されている。軟岩の動的粘性を三次元有限要素法に組み入れて、軟岩盤と地上構造物の連成震動挙動の解析<sup>7)</sup> を地盤の粘性減衰を考慮して試みた林らの研究<sup>7)</sup> は紙面の都合で割愛することにする。

#### 4. 非線形解析

岩盤の非線形解析は大別して

- ① 応力-ひずみ曲線に対応して、各応力段階に応じた応力とひずみの関係を求めていく方法
  - ② 弾塑性理論にもとづく方法
- とに分けられ、さらに、①の方法は
- Ⓐ 荷重漸増法
  - Ⓑ 直接反復法
- の2種類の方法があり、②の方法は
- Ⓐ 荷重漸増法
  - Ⓑ 初期応力法

の2種類の方法があるが、これらについては前号に述べられているので、ここでは省略することにする。

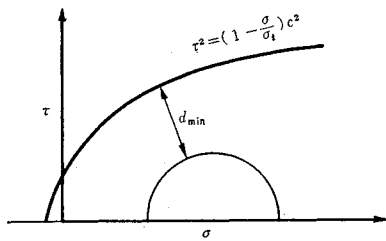


図-5 非線形パラメータ  $d_{min}$

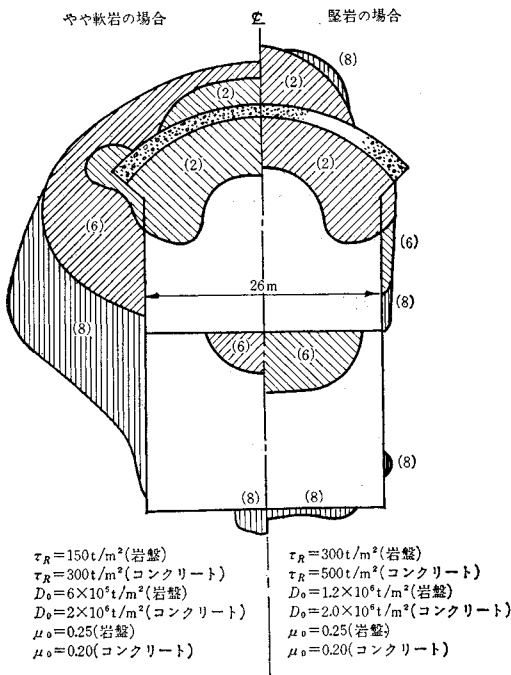
岩盤などでは、金属材料におけるような弾塑性の特性が明確ではないので、Drucker の降伏条件

$$f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} = k \dots \dots \dots (14)$$

を用いた解析も可能であるが、このように仮定して得られる応力-ひずみ曲線は実際の岩盤のそれとは一致しにくいし、あるいは一致するようにするためには、かなりの物性解釈が必要である。そこで多くの解析例は①の方法がとられており、飯田の行った岩盤内の不連続面でのすべりを考慮した弾塑性解析<sup>9)</sup>は次節で述べたほうがよいと考えられるので、ここでは、①の解析例<sup>9)</sup>について解説しよう。

図-5のように、岩盤の破壊の包絡線を、岩盤のみかけの粘着強度  $c$ 、みかけの引張強度  $\sigma_t$  より、二次放物線

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_t}\right) c^2 \dots \dots \dots (15)$$



(粘着強度の違いの影響)

図-6 地下発電所掘削中に発生する緩み領域の比較

と考え、作用応力円とこの破壊の包絡線との応力的なへだたり  $d_{min}$  を助変数として、岩盤の非線形変形度を表現する方法である。いま、応力条件が

$$\sigma_t - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\sigma_t} - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + 2u) > 0 \dots \dots \dots (16)$$

の場合には

$$d_{min} = c \sqrt{\left\{1 - \frac{c^2}{4\sigma_t^2} - \frac{1}{2\sigma_t} (\sigma_1 + \sigma_2 + 2u)\right\} - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)} \dots \dots \dots (17)$$

となる。ここに、 $u$  は間げき水圧である。式 (16) の不等号が反対の場合には

$$d_{min} = \sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + 2u) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \dots \dots (18)$$

となる。 $d_{min}$  と接線変形係数  $D$  の関係、 $d_{min}$  とポアソン比  $\nu$  の関係などについては、岩盤の三軸圧縮変形特性によるべきであるが、現地試験がむずかしく、目下は岩石の三軸圧縮変形特性から類似的に数式化し<sup>9)</sup>、ダム基礎岩盤の安定解析<sup>10)</sup>などにも用いられており、さらに前述した粘弾性解析と組み合わせて、地下発電所などの大規模な掘削工事の安定性の解析にも用いられている (図-6)。

### 5. 岩盤の不連続面に関する解析

前述したように、節理、きれつなどを有する堅い岩盤の非弾性は、これらの不連続面で開口しないすべりが生ずるためと考えられている。したがって、岩盤の力学的解析においては、これらの不連続面を考慮した解析に大きな関心が寄せられ、幾多の研究がなされてきた。

これらの研究を大別すると、

① 特定の不連続面を考慮し、これにより岩盤の非弾性的特性を解析する方法、

② 不連続面での開口、すべりなどの特性を連続体の力学のなかに考慮して解析する方法、

に分けられる。前者は個々の不連続面の影響を解析するうえではきわめて有利であるが、実際の岩盤にはこのような不連続面が数多く存在しており、これらをすべて考慮した巨視的な挙動を解析するには計算が複雑となり不向である。一方、後者は岩盤の巨視的な挙動を解析するうえでは有利であるが、個々の不連続面の影響を解析することはできない。前者に属するものとしては、Goodman, Zienkiewicz, Mahab, 林, 北原の研究があげられ、後者に属するものとしては、Zienkiewicz, 飯田らの研究があげられる。

#### (1) 特定の不連続面を考慮した方法

##### a) Goodman の方法<sup>11)</sup>

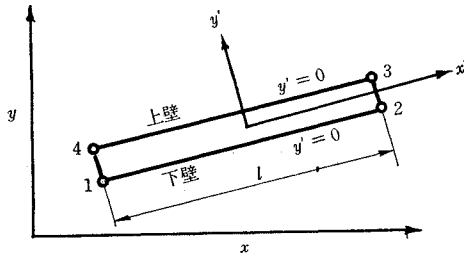


図-7 ジョイント要素

力学モデルとして、不連続面は平板状で、その面に垂直な方向の引張力には抵抗しないとし、さらに、接線力に対しては Mohr の説で表わされるせん断強度をもっていると考えられる。ジョイント要素は、図-7 に示すように、長さ  $l$ 、幅  $0$  のもので、節点 1 と 4、2 と 3 の初期の座標は等しくとる。この要素の節点力と節点変位の関係は、次のようにして求めている。

$\{w'\}$  を相対変位ベクトルとすると

$$\{w'\} = \begin{Bmatrix} u'_{\text{top}} - u'_{\text{bottom}} \\ v'_{\text{top}} - v'_{\text{bottom}} \end{Bmatrix}$$

で、不連続面要素に作用する単位長さあたりの作用力ベクトルを  $\{p'\}$  とし、これは相対変位に比例するとして

$$\{p'\} = \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \end{Bmatrix} = [k] \{w'\} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_w \end{bmatrix} \{w'\} \dots (19)$$

と表わすことができる。 $k_s$  と  $k_w$  はそれぞれ単位長さあたりのジョイントの接線方向と垂直方向の剛性で、これらの値はジョイントを含む岩盤の直接せん断試験により明らかにしておくものとする。

いま、 $u_i'$  と  $v_i'$  をそれぞれ不連続面を表わす要素の節点  $i$  での接線方向と垂直方向の変位とすると

$$\{w'\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & A & 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ u_3' \\ v_3' \\ u_4' \\ v_4' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [D] \{u'\} \dots (20)$$

ここに、

$$A = 1 - \frac{2x'}{l}, \quad B = 1 + \frac{2x'}{l}$$

これらの関係を用いると、この要素内に蓄積されるポテンシャルエネルギーは

$$\phi = \int_{-l/2}^{l/2} \{w'\}^T \{p\} dx = \frac{1}{8} \int_{-l/2}^{l/2} \{u'\}^T [D]^T [k] [D] \{u'\} dx = l/2 \{u'\}^T [K] \{u'\}$$

となる。仮想仕事の原理から、節点力を  $\{S\}$  とすると

$$\phi = \{u'\}^T \{S\}$$

であるから

$$\{S\} = [K] \{u'\} \dots (21)$$

これから  $[K]$  は連続体要素における剛性行列に相当するものである。

b) Zienkiewicz の方法、その他類似の方法

Zienkiewicz の方法<sup>12)</sup>は、基本的には Goodman の方法と同じであるが、不連続面を表わす要素を、長さ  $l$ 、幅  $t$  の 4 節点の isoparametric 要素で表わし、応力-ひずみ曲線に対応して、弾性定数を変化させていく方法を提案している。

そのほか、類似の方法で岩盤に適用したものとしては Mahab の方法<sup>13)</sup>があげられ、さらに鉄筋コンクリートに適用したものであるが、岩盤にも適用しうるものとしては Ngo の方法<sup>14)</sup>があげられる。これらについて興味ある方は原論文を参考されたい。

c) Rashid の方法<sup>15)</sup>

この方法はプレストレストコンクリートに適用されたものである。ここでは、岩盤を解析するうえで有効であると考えられる方法で、図-8 に示すように、きれつが入った三角形要素を用いている。

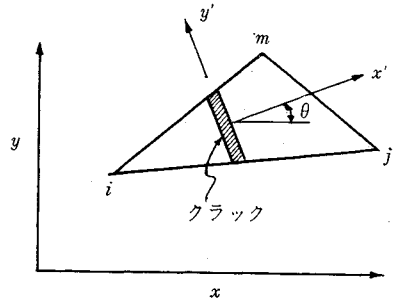


図-8 クラックの入った要素

d) 林の方法<sup>16)</sup>

この方法は、いままでに述べた方法のように、不連続面を表わす要素を考えないが、特定の不連続面の両側の相対する節点は相対変位を生じ、その摩擦抵抗に等しいせん断応力だけを伝えるとした方法である。それは、不連続面で仕切られた各領域を I, II, III とし、荷重増分  $\{dL\}$  に対して、各領域内の変位ベクトルを  $\{d r_{in}\}$ 、不連続面でのそれを  $\{d L_b\}$  とする。剛性行列  $[K]$  を各領域のそれに分解し

$$\begin{Bmatrix} d L_b \\ d L_{in} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d r_b \\ d r_{in} \end{Bmatrix} \dots (22)$$

をもととし、まず、不連続面での変位ベクトル  $\{d r_b\}$  が完全に拘束されて、外力  $\{d L_{in,1}\}$  が作用する場合には拘束力  $\{d L_{b,1}\}$  は次式となる。

$$\{d L_{b,1}\} = [k_{12}] [k_{22}]^{-1} \{d L_{in,1}\} \dots (23)$$

不連続面にだけ仮想的に任意の変位  $\{r_{b,0}\}$  が生じるとき、その面上での相応する力  $\{L_{b,0}\}$  を予備的に求め

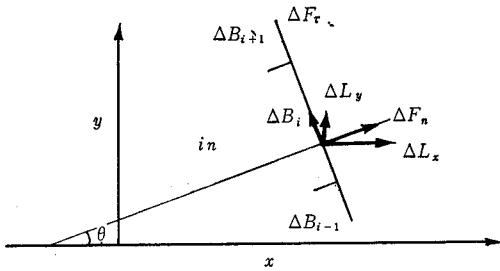


図-9 不連続面での節点力  $\Delta F_n$ ,  $\Delta F_r$  と 面素  $\Delta B_i$

ておくと

$$\{\Delta L_{b,0}\}_{1,2,3} = ([k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{12}])\{r_{b,0}\} = [K_0]\{r_{b,0}\} \dots (24)$$

次に、不連続予定面での拘束を解くに必要な力  $\{\Delta L_{b,2}\}$  は、その面に関する領域 I, II, III, …… などの影響を重ね合わせて

$$\{\Delta L_{b,2}\} = \{\Delta L_b\} - \sum_{j=1}^i \{\Delta L_{b,1,j}\} \dots (25)$$

この解放力  $\{\Delta L_{b,2}\}$  による対応成分の変位  $\{\Delta r_{b,2}\}$  は、要素のひずみエネルギーの和が系全体の外的な仕事に等しいという条件から

$$\{\Delta r_{b,2}\} = [[G]^T [K_0] [G]]^{-1} \{\Delta L_{b,2}\} \dots (26)$$

この  $[G]$  は適合条件を形成する配列行列である。この  $\{\Delta r_{b,2}\}$  は、不連続面で不整合が生じない場合のこの面の変位ベクトルである。これらの値を各領域に分解して、 $\{\Delta r_{b,2}\}_{1,2,3}$  による各領域内の変位は

$$\{\Delta r_{in,2}\} = -[k_{22}]^{-1}[k_{21}]\{\Delta r_{b,2}\} \dots (27)$$

したがって、不整合を生じない場合の応力  $\{\Delta \sigma_k\}$  は

$$\{\Delta \sigma_k\} = [H][B^{-1}][a] \left\{ \begin{matrix} \Delta r_{b,2} \\ \Delta r_{in,1} + \Delta r_{in,2} \end{matrix} \right\} \dots (28)$$

また、各領域の境界力  $\{\Delta b_{b,k}\}$  は

$$\{\Delta L_{b,k}\} = [k_{11}]\{\Delta r_{b,2}\} + [k_{12}]\{\Delta r_{in,1} + \Delta r_{in,2}\} \dots (29)$$

全体座標系の  $x$  軸と  $\theta$  をなす方向に不連続の法線方向がある場合、不連続面への垂直力  $\{\Delta F_n\}$  およびせん断力  $\{\Delta F_r\}$  は

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_n \\ \Delta F_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta L_{xk} \\ \Delta L_{yk} \end{Bmatrix} \dots (30)$$

不連続面で局所剝離あるいは局所滑りを生じるかどうかを調べるには、先行力を  $F_0$ 、不連続予定面の面素  $\Delta B_i$  での引張抵抗とせん断抵抗を、それぞれ  $\sigma_t \Delta B_i$ ,  $(F_{n,0} + \Delta F_n) \tan \varphi + \tau_0 \Delta B_i$  とすれば、図-9を参照して

$$(F_{n,0} + \Delta F_n) + \sigma_t \Delta B_i < 0 \dots (31)$$

の場合は剝離を生じ、その後の荷重増分に対して、この面素  $\Delta B_i$  は自由面として、配列行列  $[a]$  と  $[G]$  を考慮する。次に

$$[(F_{n,0} + \Delta F_n) \tan \varphi + \tau_0 \Delta B_i] - [F_{r,0} + \Delta F_r] < 0 \dots (32)$$

の場合には、この面素は滑ろうとする。ここで、 $F_{r,0}$  は先行せん断力である。超過せん断力

$$\Delta \Delta F_r = [F_{r,0} + \Delta F_r] - [(F_{n,0} + \Delta F_n) \tan \varphi + \tau_0 \Delta B_i] \dots (33)$$

は、隣接する面素  $\Delta B_{i-1}$  と  $\Delta B_{i+1}$  に対応する両節点に、両節点の先行変位のせん断方向の成分  $r_{o,r,i-1}$  と  $r_{u,r,i+1}$  に逆比例して配分する。この超過力を前出の  $\{\Delta L_{b,2}\}$  の式の付加荷重として再計算を行ない、局所滑りがとまるまで繰り返す。その形、次の増分荷重の段階に進む。

このほか、不連続面を表わす要素を考えないで、不連続面でのすべりを解析した北原の研究<sup>17)</sup>があるが、これについては原論文を参照されたい。

## (2) 連続体の力学の中に不連続面の特性を加味した方法

### a) Zienkiewicz の方法<sup>18)</sup>

原論文は岩盤の解析のために提案されたものであるがこの方法は引張りに抵抗し得ない材料の解析方法といったほうが妥当であろう。

まず、問題を連続した弾性体として計算し、引張応力が生じていれば、とりえず構造物が変形しないようにして、これらの引張主応力を取り除く。つり合いを保つためには、この段階で拘束力を一時的に構造物に作用させねばならない。この拘束力は要素ごとに次の方法で求める。計算のある段階での要素内の応力を  $\{\sigma^n\}^e$  とし、これを次のように2つの部分に分ける。

$$\{\sigma^n\}^e = \{\sigma_1^n\}^e + \{\sigma_0^n\}^e \dots (34)$$

ここで、 $\{\sigma_0^n\}^e$  は節点力によって支持されねばならない引張りの部分を示す。このような引張応力を支えるために要求される節点力  $\{F_0^n\}^e$  は、仮想仕事の原理により

$$\{F_0^n\}^e = \int [B]^T \{\sigma_0^n\}^e d(\text{vol}) \dots (35)$$

このような拘束力は実際には存在しないから、それらの効果が等大異符号の節点力を加えることによって、構造物から取り除かれなければならない。このような力の効果に対して構造物が再び解析され、求められた応力が等大異符号の節点力を作用させる前の段階の応力に加えられる。このようにして求められた主応力がまだ引張りであれば、繰返し計算を行なうことになる。

### b) 飯田の方法<sup>9)</sup>

この方法は、異方性塑性理論により、不連続面でのすべりによる非弾性的変形を解析する方法である。この方法では個々の不連続面には着せず、一定の方向性を持った不連続面群が存在するとし、二次元問題では2個の群、三次元問題では5個の群まで取扱いうるとする。

すなわち、塑性理論を降伏条件に達したのちに降伏条

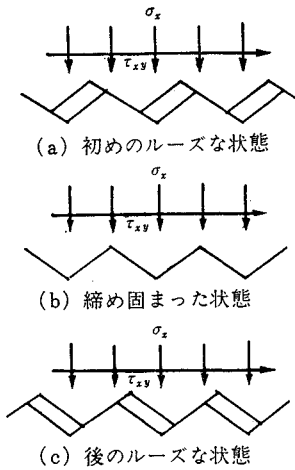


図-10 岩盤節理のモデル

件が応力の拘束条件となり、これを満足しながら応力変化が起るように、ひずみ増分と応力増分を定める力学体系であるとみなし、不連続面には、Coulomb の内部摩擦説にもとづく応力の拘束が存在するとする。

しかるとき、Mises によれば、塑性ひずみエネルギー増分の応力による変分は真の解の付近で停留値をとるから

$$\delta_0 dW^p = d\epsilon_x^p \delta\sigma_x + d\epsilon_y^p \delta\sigma_y + d\epsilon_z^p \delta\sigma_z + d\gamma_{yz}^p \delta\tau_{yz} + d\gamma_{zx}^p \delta\tau_{zx} + d\gamma_{xy}^p \delta\tau_{xy} = 0 \dots (36)$$

この場合、変分変数は二次元の場合は  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\tau_{xy}$  の3個で、三次元の場合は  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \dots, \delta\tau_{xy}$  の6個であるから、応力の拘束条件は数学的に、二次元の場合に2個、三次元の場合に5個存在しうる。これらの拘束条件を各不連続面群のすべりに対する降伏条件とし

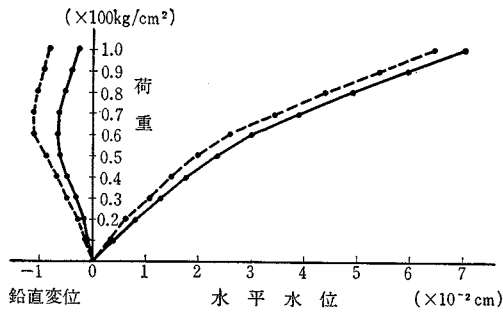


図-11 せん断試験における荷重-変位図

表-1

No.	状態	物理的性質	降伏条件	膨脹収縮	硬化軟化
I	初めのルーズな状態	弾性体			
II	締め固まった状態	弾塑性体	$ \tau_{xy}  = C - \sigma_x \tan \phi$	収縮	硬化
III		弾性体			
IV	のちのルーズな状態	弾塑性体	$ \tau_{xy}  = C + \sigma_x \tan \phi$	膨張	劣化
V	破壊				

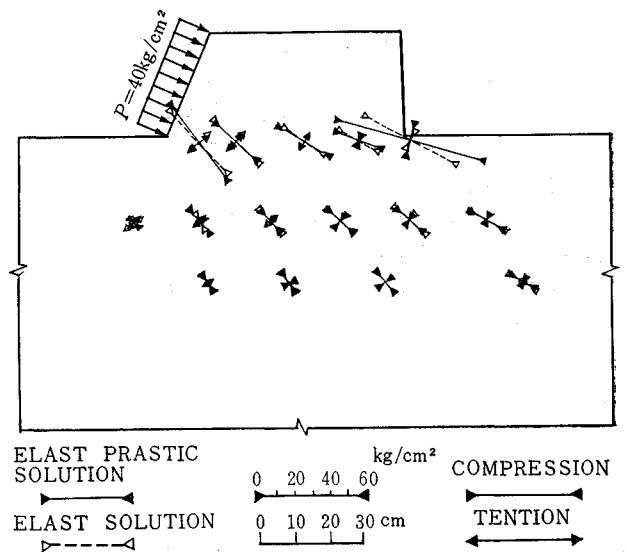


図-12 せん断試験における主応力図

$$f_v(\sigma_{ij}) = k_v \dots (37)$$

にて表わされるとする。しかるとき、Lagrange の不定定数法から、塑性ひずみ増分は次式で表わされることになる。

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum \frac{\partial f_v}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_v \dots (38)$$

この関係を用いて、平滑に方向にyだけすべりするような不連続面を想定するときは

$$du^p = dw^p = 0, dv^p \neq 0, \frac{\partial}{\partial y} dv^p = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} dv^p = 0, \frac{\partial}{\partial x} dv^p \neq 0$$

塑性ひずみ増分は

$$d\epsilon_x^p = d\epsilon_y^p = d\epsilon_z^p = d\gamma_{yz}^p = d\gamma_{zx}^p = 0$$

$$d\gamma_{xy}^p \neq 0$$

降伏条件  $f(\sigma_{ij})$  は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} = 0, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \neq 0$$

となり、 $\tau_{xy}$  のみの関数となる。すなわち、このような場合には Tresca の降伏条件に従うことになる。

次に、降伏条件が Coulomb の内部摩擦説に従う場合には

$$f(\sigma_{ij}) = |\tau_{xy}| - (c + \sigma_x \tan \phi) = 0$$

なので、塑性ひずみ増分は式 (38) から

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda = -\tan \phi d\lambda, \\ d\gamma_{xy}^p &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\lambda = \pm d\lambda \\ d\epsilon_z^p / d\gamma_{xy}^p &= \mp \tan \phi \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

また、不連続面では塑性変形は生ぜず、不連続

面上では、一様なすべりを生じているとすると

$$d \varepsilon_x \phi / d \tau_{xy} \phi = d(du \phi) / d(dv \phi) = \mp \tan \phi \dots (40)$$

以上から明らかなように、平滑な平面で滑りが生ずる場合には、Tresca のせん断応力に従わなければならないとし、Coulomb の内部摩擦説に従う場合には、不連続面に  $\phi$  だけ傾いた方向に移動が生ずることになる。このことは、不連続面での滑りが Coulomb の説に従う場合には、その面に凹凸があるからであり、凹凸の不連続面への傾きが  $\phi$  であると解釈することにする。こうするとすべりが生ずる際の応力に対する制約条件における内部摩擦角  $\phi$  は、不連続面の幾何学的性質に強く支配されることになる。

これから、図-10 に示すような不連続面のモデルを考え、岩盤は初めルーズな状態にあり、荷重を加えられ、このゆるみが押し固められ、締め固った状態になり、さらに荷重が加えられると、再びゆるんだ状態へと移行し、最後に破壊すると仮定した。表-1 に示すように初めのルーズな状態から締め固った状態へ移行する際には、直応力はすべりを促進する方向にあるから、降伏条件は

$$|\tau_{xy}| = c - \sigma_x \tan \phi \dots (41)$$

となる。この塑性変形に際して収縮を生じ、締め固った状態からあとのルーズな状態に移行する際には、直応力はすべりを阻止する方向にあるから、降伏条件は

$$|\tau_{xy}| = c + \sigma_x \tan \phi \dots (42)$$

となり、この塑性変形に際しては膨張を生じているとした。以上の仮定にもとづき、異方性塑性理論を用いて層状岩盤とブロック状岩盤を解析方法を提案している。図-11 は、層状岩盤のせん断試験における荷重変位曲線を示しており、図-12 は浮上り荷重より小さい荷重での応力を示している。これから、岩盤のせん断試験によくみられる変形の様子、とくに浮上り現象が説明でき、さらに岩盤のゆるみが岩盤の低い荷重のときの塑性変形の量および応力分布に大きな影響を持つことが明らかにされている。

#### 参考文献

1) Volker, R.E. : Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements, Proc. A.S.C.E. H.Y. 6, 1969.

2) 飯田隆一・朝倉肇：非定常浸透流の有限要素法による解析，土木研究所報告，No. 142 号の 1，1971。  
 3) 川本眺万・駒田広也：基礎および堤体内にける浸透流の解析について，第 6 回岩盤力学シンポジウム，1969，土木学会。  
 4) 林正夫・北原義浩・日比野敏：粘塑性地山内でのトンネル覆工への経時的応力の解析法，第 5 回岩盤力学シンポジウム，1969，土木学会。  
 5) 堀井健一郎・川原睦人：有限要素法による粘弾性体の解析方法，土木学会論文報告集，179 号，1970. 7。  
 6) 桜井春輔：有限要素法の粘弾性体への適用，土木学会年次学術講演会講演集，I-21，1968。  
 7) 林正夫・北原義浩・藤原義一・駒田広也：岩盤の動的繰り返し変形特性と地震時応答解析，第 8 回岩盤力学シンポジウム，1973，土木学会。  
 8) 飯田隆一・小林茂敏：岩盤の非弾性的挙動に対する力学的解析の一試み，第 6 回岩盤力学シンポジウム，1970，土木学会。  
 飯田隆一・小林茂敏：割れ目を有する岩盤の非弾性的挙動に関する理論的考察，土木研究所報告，No. 144, No. 2, 1972。  
 9) 林正夫・日比野敏：地下の開削にともなう周辺地盤の緩みの進展に関する解析，電力中央研究所研究報告土木，No. 67095, 1968。  
 10) 林正夫：非線型変形現象を考慮した岩盤の変形，応力の耐荷力の解析法，電力中央研究所研究報告，土木，No. 66072, 1967。  
 11) Goodman R.E. Taylor, R.L. and Brekke, T.L. : A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc. A.S.C.E. SM 3, 1968, pp. 637~659。  
 12) Zienkiewicz O.C. et al : Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with particular Reference to Jointed Rock Systems, Proc. 2nd Cong. International Society of Rock Mechanics, Beograd 8-14, 1970。  
 13) Mahtab M.A. and Goodman. R.E. : Three-dimensional Finite Element Analysis of Jointed Rock Slope, Proc. 2nd Cong. I.S.R.M. Beograd, 7-12, 1970。  
 14) Ngo and Scordelis : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, Jour. of A.C.I., 1967, pp. 152~163。  
 15) Rashid Y.R. : Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, Nuclear Eng. and Design, 7, 1968, pp. 334~344。  
 16) 林正夫・藤原義一：逐次破壊現象としての斜面の安定性の数値解析，土木学会論文報告集，171，1969。  
 17) 北原義浩：節理面を有する岩盤のせん断試験時の強度と応力分布の検討，電力中央研究所研究報告，土木，No. 67084, 1968。  
 18) Zienkiewicz O.C., Valliappan, S. and King I.P. : Stress Analysis of a Rock as a no Tension Material, Geotechnique, 1968, p. 56。

## 土木技術者のための法律講座 ● 第 2 版・48 年 2 月末出版 ●

B 5・126 ページ 8 ポ二段組並製 1100 円 会員特価 1000 円 (〒 100 円)

●総論●財政・会計制度●建設業法●標準契約約款●公害対策基本法●騒音規制法●水質汚濁防止法●大気汚染防止法●労働基準法および関係法令●市街地土木工事公衆災害防止対策要項および火薬類取締法●道路交通関係法令●河川・砂防・海岸・公有水面行政法規●港湾関係法令●都市計画法●水道法●下水道法●建築基準法●宅地造成等規制法●土地収用法 (第 2 版で追加)