不規則関数のスペクトル展開とその応用

高　岡　宣　善*

1. はじめに

動的耐震設計法など，構造動力学に確率論的手法が用いられるようになってから十数年を経過し，不規則振動論を取り扱った教科書や参考書[1)~8)]も出版され，また本誌上でもかつて数学講座[9)]の一環としてこのテーマが取り上げられ，この新しい設計計算法の普及に貢献している。

しかしながら，これらの文献では主としてエルゴード性を有する定常不規則過程のみを対象とし，したがってデータの統計的処理の本来的概念である集合平均（アンサンブル平均）を用いるかわりに，時間平均を用いていろいろな公式を誘導している。

ところで，ひとくちにエルゴード性といってもいろいろな程度のものがある。たとえば，不規則過程の期待値に関してエルゴード性が成立しても，それは相関関数に関してもエルゴード性が成立することを保証するとはかぎらない。このような点からしても，不規則過程論のより深い理解とかその応用面の研究のうえからみれば，いつまでも時間平均を用いる段階にとどまっているのは，いささかものたりないように思われる。

確率論的手法の研究が従来より盛んであるのはソビエトとアメリカ合衆国であろう。実際，これらの両国では不規則過程論まで含めた確率論のすぐれた教科書およびこれを構造動力学へ応用した書物がすでに出版されている[10)~20)]。この報文では，スベシュニコフの著書[14)]を中心にして，定常不規則過程のスペクトル展開ならびに，この理論を援用して解ける非定常過程の取扱い方法について解説したい。

2. 不規則関数の相関理論

不規則関数（不規則過程・確率関数・確率過程とも呼ばれる）の研究は，イギリスの植物学者 R. Brown によるブラウン運動の発見（1827 年）を契機として始まった。ここに，不規則関数というのは，t を助変数（アーギュメント）とする関数 $X(t)$ で，任意の値の t における関数値が不規則な値を取りうる関数のことである[a)]。助変数 t は非不規則な量で，通常 t として時間が採用されるので，これを時助変数（time parameter）ともいう[21)]。

このような不規則性のゆえに，不規則関数の性質はその多次元確率分布密度（分布法則）$f(x_1, x_2, \cdots, x_n|t_1, t_2, \cdots, t_n)$ を与えることによって初めて完全に記述される。しかし，多次元分布法則を用いて不規則関数の特性を記述する方法は，一般にかなり面倒なので，その分布法則のパラメーターに対応する量を与えることにとどめている。これは，ちょうど不規則変数の理論において，その分布法則のかわりに，分布法則のパラメーター（平均値・分散など）を提示するのと同様である。

不規則関数論においては，このようなパラメーターとしていろいろな次数のモーメント（積率）が用いられる。そのうち，第一次および第二次までのモーメントを用いて不規則関数の挙動を研究する理論を相関理論（モーメント理論）という。工学上の諸問題の多くは，この相関理論の枠内で解決できる。

さて，第一次原点（まわりの）モーメント $\bar{x}(t)$ は次式によって定義される。

$$\bar{x}(t)=\mathbf{M}[X(t)] \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに，記号 $\mathbf{M}$ は（数学的）期待値を求めるための記号である（わが国では通常 E という文字で表わしている）。すなわち，$\bar{x}(t)$ は不規則関数 $X(t)$ の期待値（平均値）であり，これはもはや不規則な量ではない。式（1）を $X(t)$ の1次元確率密度関数 $f(x|t)$ を用いて陽表示すれば

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|t)\,dx \quad \cdots\cdots(2)$$

となる。

第二次モーメントのうちとくに重要なのは次の2つの中心モーメント（平均値まわりのモーメント）である。

$$\mathbf{D}[X(t)]=\mathbf{M}[\{X(t)-\bar{x}(t)\}^2] \quad \cdots\cdots(3)$$

$$K_x(t_1, t_2)=\mathbf{M}[\{X(t_1)-\bar{x}(t_1)\}\{X(t_2)-\bar{x}(t_2)\}] \quad \cdots\cdots(4)$$

定義から明らかなように，$\mathbf{D}[X(t)]$ は不規則変数 X

---

* 正会員　工博　関西大学助教授 工学部土木工学教室
昭和 47 年4月より鳥取大学教授 工学部土木工学教室

a) われわれは不規則関数を $X(t)$ のようにローマ字の大文字で表わし，その標本関数を対応する小文字 $x(t)$ で表わすことにする。

(t)——t を固定されたものと考えれば，$X(t)$ は不規則変数となる——の分散であり，$K_x(t_1, t_2)$ は2つの不規則変数 $X(t_1)$ および $X(t_2)$ の相関モーメント（共分散）である。関数 $K_x(t_1, t_2)$ は自己相関関数あるいは単に相関関数と呼ばれる。式（3），（4）を陽な形で表わせば

$$\mathbf{D}[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[x-\bar{x}(t)]^2 f(x|t)dx \quad \cdots\cdots(5)$$

$$K_x(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-\bar{x}(t_1)][x_2-\bar{x}(t_2)] \cdot f(x_1, x_2|t_1, t_2)dx_1dx_2 \cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。このように，いまわれわれが考察しているモーメントのうち二次元分布法則に依存するのは相関関数だけである。式（5），（6）より次の関係が得られる。

$$\mathbf{D}[X(t)]=K_x(t, t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ところで，不規則関数は定常不規則関数と非定常不規則関数とに分けられる。前者においては

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n|t_1, t_2, \cdots, t_n) =f(x_1, x_2, \cdots, x_n|t_1+t_0, t_2+t_0, \cdots, t_n+t_0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

という関係が成立しなければならない。ここに n と t_0 は任意の数値である。

とくに，$n=1$ および $n=2$ の場合には，$t_0=-t_1$ と置くことにより，次の関係を得る。

$$\left.\begin{aligned} f(x_1|t_1)&=f(x_1|0)=f(x_1)\\ f(x_1, x_2|t_1, t_2)&=f(x_1, x_2|0, t_2-t_1)\\ &=f(x_1, x_2|t_2-t_1) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

このとき，式（2），（5），（6）はそれぞれ次のようになる。

$$\bar{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\text{const} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\mathbf{D}[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx=\text{const} \cdots(11)$$

$$K_x(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x}) \cdot f(x_1, x_2|t_2-t_1)dx_1dx_2=K_x(t_2-t_1) \cdots(12)$$

すなわち，定常不規則関数の期待値および分散は定数となり，相関関数は時間差 (t_2-t_1) のみに依存する。

相関理論を応用する工学上の諸問題においては，式(10)，(11)，(12) の 3 条件をもって定常性の定義とするのが妥当である。ヒンチン（А.Я. Хинчин）によって提唱されたこのような定常性を広義の定常性（弱定常）という。

以上においては，t および $X(t)$ はいずれも実数であるとしたが，もし実数の t についてその関数値が複素数となる不規則関数 $X(t)$ に対しては，相関関数は次式で定義される。

$$K_x(t_1, t_2)=\mathbf{M}\{X^*(t_1)-\bar{x}^*(t_1)\}\{X(t_2)-\bar{x}(t_2)\}] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

ここに，星印 * は共役複素数を表わす。

3. 定常不規則関数のスペクトル展開

前節で述べたように，定常不規則関数はその確率特性が時間的に変動しないから，ほぼ周期的な性格を有する。そのために，助変数の領域（時間領域）において定常不規則関数の性質を研究するかわりに，振動数の次元を有するある助変数の領域（振動数領域）において研究することが可能となる。このような研究手法をスペクトル法と称するが，そのための理論がスペクトル理論である。工学上の諸問題においては，一般に相関理論を用いるよりも，スペクトル理論を用いるほうが，計算を著しく簡単化できる。

スペクトル手法を説明するために，まずはじめに平均値 $\bar{x}(t)=0$ を有する定常不規則関数 $X(t)$ が，次のように離散的な振動数 ω_ν の調和振動の和で表わされるものとしよう。

$$X(t)=\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu\cos\omega_\nu t+B_\nu\sin\omega_\nu t) \cdots\cdots\cdots(14)$$

ここに，A_ν および B_ν は不規則変数である。各振動数 ω_ν は必ずしもある数の倍数になっている必要はない。

上式を，Euler 公式によって変形すれば

$$X(t)=\sum_{\nu=1}^{n}(P_\nu e^{i\omega_\nu t}+Q_\nu e^{-i\omega_\nu t}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

となる。ここに，不規則変数 P_ν および Q_ν は，A_ν および B_ν の一次結合として表わされる。いま，$-\omega_\nu=\omega_{-\nu}$ と書くことにすれば，上式は次のようにも表わされる。

$$X(t)=\sum_{\substack{\nu=-n\\ \nu\neq 0}}^{n}\Phi_\nu e^{i\omega_\nu t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

上式中，ν の値が正のときには不規則変数 Φ_ν は P_ν と一致し，負のときには Φ_ν は $Q_{|\nu|}$ と一致する。

さて，$X(t)$ が広義の定常性を満たすためには，不規則変数 Φ_ν が，どのような条件を満たすべきかを調べよう。

最初の仮定により，$\mathbf{M}[X(t)]=\bar{x}(t)=0$ であるから，Φ_ν は

$$\mathbf{M}[\Phi_\nu]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

という関係を満たしていなければならないことはすぐわかる。次に，$\bar{x}=0$ に注意して，式(13)により $X(t)$ の相関関数を定めると，次のようになる

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2)&=\mathbf{M}\Big[\sum_{\substack{\nu=-n\\ \nu\neq 0}}^{n}\Phi_\nu^* e^{-i\omega_\nu t_1}\sum_{\substack{\mu=-n\\ \mu\neq 0}}^{n}\Phi_\mu e^{i\omega_\mu t_2}\Big]\\ &=\sum_{\nu=-n}^{n}\sum_{\substack{\mu=-n\\ \nu,\mu\neq 0}}^{n}e^{i(\omega_\mu t_2-\omega_\nu t_1)}\mathbf{M}[\Phi_\nu^*\Phi_\mu] \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

したがって，$X(t)$ が定常性を有するためには，上式の総和において2つの添字 μ と ν とがあい等しい項だけが残らなければならない。なぜなら，その場合にのみ $K_x(t_1, t_2)$ は時間差 (t_2-t_1) のみの関数となるからである。したがって，不規則変数 Φ_ν はさらに

$$\mathbf{M}[\Phi_\nu{}^*\Phi_\mu]=S_\nu\delta_{\nu\mu} \quad \cdots\cdots(19)$$

という条件を満たしていなければならない。ここに，S_ν は非不規則な正のある係数であり，また $\delta_{\nu\mu}$ は Kronecker のデルターである。式 (19) を (18) に代入すれば

$$K_x(t_1, t_2)=\sum_{\substack{\nu=-n \\ \nu\neq 0}}^{n} S_\nu e^{i\omega_\nu(t_2-t_1)}=K_x(t_2-t_1) \quad \cdots\cdots(20)$$

となり，したがって，また上式より $X(t)$ の分散は

$$\mathbf{D}[X(t)]=\sigma_x{}^2=K_x(t, t)=\sum_{\substack{\nu=-n \\ \nu\neq 0}}^{n} S_\nu=K_x(0)=\text{const} \quad \cdots\cdots(21)$$

式 (14) あるいはそれと等価な式 (16) においては，振動数 ω_ν は離散的な値をとり，また，調波 n の個数も有限であるとしたが，こんどはこれらの条件を撤去し，式 (16) の一般化を試みよう。ただし，不規則過程の分散は前と同様に有限であるものとする。このような一般化を可能にするためには，振動数の変域を，互いに重なり合うことのない微小な区間 $\Delta\omega$ に分割すればよい。そして，各微小区間について式 (16) が成立すると考えるわけである。ところが，分散の式 (21) からわかるように，各振動数は分散に対して正の貢献をなしているから，各微小区間 $\Delta\omega$ に含まれている各振動数から生ずる分散は，区間幅 $\Delta\omega$ を小さくするに応じて減少するものとする。式 (16) で表わされる不規則過程について説明したように，この過程が定常性を有するためには，あい異なる振動数に属する調和振動の各複素振幅が相互に相関していないことが必要であり，したがってまた，互いに重なり合うことのない振動数の各微小区間における振幅の和の間の相関モーメント（共分散）は0でなければならない。

このような準備的考察のもとに，無限に小さな振動数区間 $(\omega_j, \omega_j+d\omega_j)$ を考えよう。区間幅 $d\omega_j$ は無限に小さいから，この区間に含まれるすべての振動数に対しては，指数関数 $e^{i\omega_\nu t}$ は $e^{i\omega_j t}$ であるとみなせる。したがって，この区間内に含まれる振動数に属する調和振動の総和を $e^{i\omega_j t}\Phi(d\omega_j)$ と書き表わすことができる。ここに，$\Phi(d\omega_j)$ はいま注目している区間 $(\omega_j, \omega_j+d\omega_j)$ の中に現われるすべての複素振幅 Φ_ν の和を意味する。

このような操作をすべての無限小区間 $d\omega_j$ について行ない，j について総和すれば不規則関数 $X(t)$ が得られる。すなわち，

$$X(t)=\sum_j e^{i\omega_j t}\Phi(d\omega_j) \quad \cdots\cdots(22)$$

ここで，第 j 番目の微小区間 $d\omega_j$ の不規則関数 $\Phi(d\omega_j)$ のかわりに，

$$\Phi(\omega)=\sum_{\omega_\nu\leq\omega}\Phi_\nu \quad \cdots\cdots(23)$$

で定義される不規則関数 $\Phi(\omega)$ を導入しよう。そうすると，式 (22) は

$$X(t)=\sum_j e^{i\omega_j t}d\,\Phi(\omega_j) \quad \cdots\cdots(24)$$

と表わせる。ここに，$d\,\Phi(\omega_j)$ は助変数 ω を ω_j において $d\omega_j$ だけ変化させたときの関数 $\Phi(\omega)$ の増分を意味する。式 (24) において，すべての区間幅 $d\omega_j$ を0に接近させると，総和のかわりにスチルチェス積分[22)~24)]

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\,\Phi(\omega) \quad \cdots\cdots(25)$$

によって不規則関数 $X(t)$ が表示される。式 (25) は定常不規則過程論の基礎となる重要な式で，これは $X(t)$ のスペクトル展開式と呼ばれる。式 (25) は 1940 年にコルモゴロフ（А.Н. Колмогоров）によって証明されたものである。

われわれに残された問題は，不規則関数 $\Phi(\omega)$ の微分 $d\,\Phi(\omega)$ がどのような条件を満たさなければならないか，ということの解明である。上述したように，増分 $d\,\Phi(\omega_j)$ の非相関性および $X(t)$ の分散の有限性からして

$$\mathbf{M}[d\,\Phi(\omega)]=0 \quad \cdots\cdots(26)$$

$$\mathbf{M}[d\,\Phi^*(\omega)d\,\Phi(\omega_1)]=S_x(\omega)\delta(\omega-\omega_1)d\omega\, d\omega_1 \quad \cdots\cdots(27)$$

という関係が成立していなければならないことがわかる[b)]。式 (27) の $S_x(\omega)$ は助変数 ω の関数で，これは式 (19) の S_ν に対応する $[S_x(\omega)>0]$。

スペクトル展開式 (25) が示しているように，定常不規則過程は種々の複素振幅 $d\Phi(\omega)$ を有する調和振動の重ね合わせであると考えられる。式 (25) は，また不規則関数 $X(t)$ は振動数のある関数の Fourier 変換であるとも解釈できる[c)]。

式 (25) を相関関数の定義式 (13) に代入し，$\bar{x}(t)=0$，式 (27) および推移積分[5)12)14)24)~26)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y-x)dy=f(x) \quad \cdots\cdots(28)$$

に注意すれば，次式が得られる。

$$\begin{aligned}K_x(t_1, t_2)&=\mathbf{M}[X^*(t_1)X(t_2)]\\&=\mathbf{M}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1}d\,\Phi^*(\omega_1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2 t_2}d\,\Phi(\omega_2)\right]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 t_2-\omega_1 t_1)}\mathbf{M}[d\,\Phi^*(\omega_1)d\,\Phi(\omega_2)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_2 t_2-\omega_1 t_1)}S_x(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2)d\omega_1 d\omega_2\end{aligned}$$

b) 式 (17) および式 (19) を参照.

c) 不規則過程 $X(t)$ の標本関数 $x(t)$ に対しては Fourier 変換は存在しない．なぜなら，この $x(t)$ に対しては Fourier 変換の存在条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$ が成立しないからである.

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2(t_2-t_1)} S_x(\omega_2)\,d\,\omega_2$$

ここで，$\tau=t_2-t_1$ とおき，また ω_2 をあらためて ω と書くことにすれば，上式より，定常不規則関数 $X(t)$ の相関関数は次のようになる。

$$K_x(t_1,\,t_2)=K_x(t_2-t_1)=K_x(\tau)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\,d\,\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

とくに，$\tau=0$ の場合には上式から

$$K_x(0)=\sigma_x{}^2=\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,d\,\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

となり，この式により $S_x(\omega)$ に物理的意義を付与することができる。$S_x(\omega)$ は定常不規則過程のスペクトル密度（パワースペクトル密度）と呼ばれる。

式 (29) を Fourier 逆変換すれば

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau)\,d\,\tau \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

となる。もし，$X(t)$ が実関数であれば，$K_x(\tau)$ は τ の偶関数，$S_x(\omega)$ は ω の偶関数となり

$$K_x(\tau)=K_x(-\tau),\quad S_x(\omega)=S_x(-\omega) \cdots\cdots(32)$$

という関係が成立する。式 (29)，(31) は通常ウィーナー-ヒンチンの関係式と呼ばれている。

以上においては，$\bar{x}=0$ としたが，一般に $\bar{x}\fallingdotseq 0$ の場合の広義の定常不規則過程は次のようにスペクトル展開される。

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\,\Phi(\omega)+\bar{x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

上式中の $\Phi(\omega)$ は式 (26)，(27) の関係を満たしている。

地震動加速度 $X(t)$ をひとつの定常不規則過程とみなすとき，その相関関数は次式で十分近似できる。

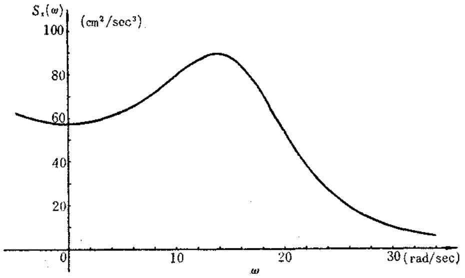
$$K_x(\tau)=\sigma_x{}^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right) \cdots\cdots(34)$$

ここに，α,β および $\sigma_x{}^2$ は定数である。上式から

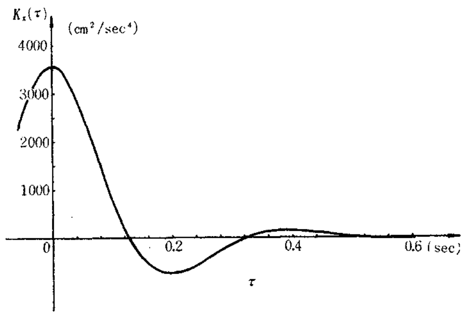
$$S_x(\omega)=\frac{2\,\sigma_x{}^2\alpha\varepsilon^2}{\pi}\cdot\frac{1}{(\omega^2-\varepsilon^2)^2+4\,\alpha^2\omega^2} \cdots\cdots(35)$$

というスペクトル密度が得られる ($\varepsilon^2=\alpha^2+\beta^2$)。

図—1 および **図—2** は，上の2式において $\beta=2\,\alpha=$



図—1



図—2

16 rad/sec，$\sigma_x{}^2=3\,600$ cm²/sec⁴ としたときの相関関数およびスペクトル密度を図示したものである。

4. 定数係数を有する微分方程式の定常解

定常不規則過程 $X(t)$ は微分可能であるとしよう。そうすると，その導関数

$$V(t)=\frac{dX(t)}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

が存在し，この $V(t)$ も定常である[14]。そして，$V(t)$ の相関関数 $K_v(\tau)$ およびスペクトル密度 $S_v(\omega)$ は，もとの不規則過程 $X(t)$ のそれらを用いて表わすことができる。

まず，式 (25) の右辺はパラメーター t について微分可能であることを考慮して，両辺を t で微分すれば

$$\frac{dX(t)}{dt}=V(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} i\,\omega\,d\,\Phi(\omega) \quad \cdots\cdots(37)$$

となる。したがって，相関関数 $K_v(\tau)$ は定義により[d]

$$K_v(\tau)=\mathbf{M}\left[\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t} i\,\omega_1 d\,\Phi^*(\omega_1)\right\}\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2(t+\tau)} i\,\omega_2 d\,\Phi(\omega_2)\right\}\right] \cdots(38)$$

となる。この積分を二重積分で表わし，積分演算と期待値を求める演算の順序を変え，さらに式 (27)，(28) を利用すると，最終的に次式が得られる。

$$K_v(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}|i\,\omega|^2 S_x(\omega)\,d\,\omega=-\frac{d^2K_x(\tau)}{d\,\tau^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

一方，$V(t)$ の定常性からして，その相関関数とスペクトル密度との間には，式 (29) と同様な関係式

$$K_v(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_v(\omega)\,d\,\omega \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

が成立する。上記の2式の右辺を比較すれば

$$S_v(\omega)=|i\,\omega|^2 S_x(\omega)=\omega^2 S_x(\omega) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

となることがわかる。

以上のような操作を n 回繰り返すと，第 n 次導関数

d) 簡単のために，$\bar{x}=0$ としておく。

$$Y(t)=\frac{d^n}{dt^n}X(t) \quad \cdots\cdots(42)$$

に対するスペクトル密度は次のようになる。

$$S_y(\omega)=\omega^{2n}S_x(\omega) \quad \cdots\cdots(43)$$

以上のような準備的考察のもとに，定数係数を有する n 階線形微分方程式の解について研究しよう。いま，対象とする微分方程式

$$a_0\frac{d^nY(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nY(t)=X(t) \quad \cdots\cdots(44)$$

を簡単のために次のように書くことにする。

$$Q_n(p)Y(t)=X(t) \quad \cdots\cdots(45)$$

ここに，$Q_n(p)$ は微分演算子 $p=d/dt$ に関する多項式

$$Q_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n \quad \cdots(46)$$

を意味する。また，$X(t)$ は与えられた定常不規則関数である。

式 (44) の $Y(t)$ のかわりにそのスペクトル展開式

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\Phi(\omega) \quad \cdots\cdots(47)$$

を用い，$Y(t)$ の導関数については上式をパラメーター t で微分したものを用いると，式 (44) は

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a_0(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_n]\cdot e^{i\omega t}d\Phi(\omega) \quad \cdots\cdots(48)$$

となる。上式の右辺の $[\cdots]$ 内の式は，式 (46) の p を形式的に $i\omega$ で置きかえたものに等しいから，上式は

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(i\omega)e^{i\omega t}d\Phi(\omega) \quad \cdots\cdots(49)$$

と表わすことができる。

式 (49) の $X(t)$ の相関関数 $K_x(\tau)$ は定義より

$$K_x(\tau)=\mathbf{M}[X^*(t_1)X(t_2)]=\mathbf{M}[X^*(t)X(t+\tau)]$$
$$=\mathbf{M}\left[\int_{-\infty}^{\infty}Q_n^*(i\omega_1)e^{-i\omega_1 t}d\Phi^*(\omega_1)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(i\omega)e^{i\omega(t+\tau)}d\Phi(\omega)\right]$$

となる。上式を，式 (27)，(28) を用いて変形すると

$$K_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}|Q_n(i\omega)|^2S_y(\omega)d\omega \quad \cdots\cdots(50)$$

を得る。一方，$K_x(\tau)$ と $S_x(\omega)$ との間には式 (29)，すなわち

$$K_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}S_x(\omega)d\omega \quad \cdots\cdots(51)$$

が成立しているから，式 (50) と (51) とを比較して

$$S_x(\omega)=|Q_n(i\omega)|^2S_y(\omega) \quad \cdots\cdots(52)$$

という関係を得る。この式は代数方程式であり，また，$S_x(\omega)$ は既知であるから，上式より次式を得る。

$$S_y(\omega)=\frac{1}{|Q_n(i\omega)|^2}S_x(\omega) \quad \cdots\cdots(53)$$

式 (35) の $1/Q_n(i\omega)$ は動力学系の伝達関数（あるいは振動数応答関数）と呼ばれる。

式 (53) によって，定数係数を有する線形非同次微分方程式の定常解のスペクトル密度 $S_y(\omega)$ が求められたが，われわれに残された重要な課題は，いかなる場合に式 (44) の解 $Y(t)$ が定常不規則関数とみなせるか，ということの解明である。

この課題を解くために，式 (44) の解を，与えられた初期条件を満足する同次方程式の一般解とゼロ初期条件を満たす非同次方程式の特解 $Y_{\mathrm{I}}(t)$ との和の形

$$Y(t)=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j(t)+Y_{\mathrm{I}}(t) \quad \cdots\cdots(54)$$

で表わそう。ここに，$y_j(t)$ は式 (44) の同次方程式の余関数であり，したがって，式 (44) の同次方程式の特性方程式

$$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0 \quad \cdots\cdots(55)$$

の n 個の根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると，$y_j(t)=e^{\lambda_j t}$ となる ($j=1\to n$)。また，特解 $Y_{\mathrm{I}}(t)$ は一般に

$$Y_{\mathrm{I}}(t)=\int_{t_0}^{t}h(t-t_1)X(t_1)dt_1$$
$$=\int_{0}^{t-t_0}h(\tau)X(t-\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(56)$$

と表わせる。ここに，$h(t-t_1)$ は式 (44) の同次方程式の余関数を用いて表わせば，次のようになることが一般的に証明できる[14)]。

$$h(t-t_1)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(t_1) & \cdots\cdots & y_n(t_1) \\ y_1'(t_1) & \cdots\cdots & y_n'(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1(t) & \cdots\cdots & y_n(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_1) & \cdots\cdots & y_n(t_1) \\ y_1'(t_1) & \cdots\cdots & y_n'(t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(t_1) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_1) \end{vmatrix}} \quad \cdots(57)$$

式 (56) の t_0 は定常不規則関数 $X(t)$ が系に印加される時刻である（通常 $t_0=0$）。関数 $h(\tau)$ は $e^{\lambda_j\tau}$ という形の指数関数の和として表わされるから，安定な動力学系においては，助変数 τ が十分大きくなると $h(\tau)=0$ とみなすことができる。したがって，t が十分大ならば，式 (56) の積分の上限を ∞ として

$$Y_{\mathrm{I}}(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(58)$$

としても大きな誤差はない。上式の $Y_{\mathrm{I}}(t)$ は定常性を有している。なぜなら，不規則過程 $X(t)$ は，仮定により，定常であるから，$X(t-\tau)$ も定常であり，また，式 (58) の積分の上限および下限は定数だからである[e)]。

以上のような考察により，式 (44) の解 $Y(t)$ は，t が十分大きくなって初期条件に依存する過渡状態が十分に減衰してしまったとみなせる時点以後においては，定常となることを知る。そのときの解 $Y(t)$ のスペクトル密度は式 (53) で与えられる。

e) 不規則関数の積分については文献 10)～12)，14) を参照されたい。

5. 非定常な外乱を受ける力学系の応答

最後に，定数係数を有する非同次微分方程式

$$Q_n(p)\,Y(t)=W(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

において入力（外乱）$W(t)$ が非定常である場合の解 $Y(t)$ の確率特性を調べてみよう。一般には，この問題の解決は非常に困難であるが，幸いなことに比較的簡単な方法で解決できる場合も若干ある。

まずはじめに，式 (59) の右辺の外乱が非定常であるというのは，多くの応用問題においては，$W(t)$ そのものが本来的に非定常性を有することに起因するのではなくして，定常的な外乱の作用が時間的に変動する結果として惹起されるものである，という点に注目しよう。

そこで，われわれは外乱 $W(t)$ が

$$W(t)=\varphi(t)X(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

という積の形で与えられる場合について研究しよう。ここに，$X(t)$ は定常不規則関数であり，また $\varphi(t)$ は t の確定関数である。解 $Y(t)$ の性質を調べるには，前節で述べたように，ゼロ初期条件を満たす特解 $Y_{\rm I}(t)$ の性質を調べれば十分である。

定常不規則関数のスペクトル展開式 (33) を (60) に代入して次式を得る。

$$W(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\omega t}d\,\Phi(\omega)+\varphi(t)\cdot\bar{x}\ \cdots\cdots(61)$$

上式の右辺第1項に現われる $d\,\Phi(\omega)$ は t には無関係な量であるから，上式を式 (59) の右辺に代入して解 $Y(t)$ を求める際には，$d\,\Phi(\omega)$ は定数とみなされる。したがって，上式の積分を，時間 t の関数 $d\,\Phi(\omega)\cdot\varphi(t)e^{i\omega t}$ の和の極限と考えることにより，外乱 $W(t)$ に対する式 (59) の特解は

$$Y_{\rm I}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega,t)\,d\,\Phi(\omega)+\bar{y}_{\rm I}(t)\ \cdots\cdots\cdots(62)$$

という形で表わされる。上式中，右辺の第1項は時間 t の関数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\omega t}d\,\Phi(\omega)$$

に対する特解であり，$y(\omega,t)$ は通常の常微分方程式

$$Q_n(p)y(\omega,t)=\varphi(t)e^{i\omega t}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

の特解として与えられる。また，$\bar{y}_{\rm I}(t)$ は関数 $\varphi(t)\cdot\bar{x}$ に対する特解である。

さて，$Y(t)$, $Y'(t)$, …, $Y^{(n-1)}(t)$ の初期条件は，非不規則量として数値的に与えられているものとすれば，これらの条件は式 (55) の同次方程式の一般解を決定する際に満足させるようにすることが可能である。したがって，式 (63) の特解 $y(\omega,t)$ はゼロ初期条件を満たすように決定すればよい。特解 $y(\omega,t)$ の求め方は微分方程式の教科書（たとえば文献 27)）に説明されている。そのうち，簡単に解が求められる基本的な場合は

（I） $\varphi(t)=t^m$,　$m=0, 1, 2, \cdots$,

（II） $\varphi(t)=e^{st}$,　s は任意の実数または複素数,

（III） $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{r}b_j t^{m_j}e^{s_j t}$

の3つであるが，ここでは第 II の場合について述べよう。

$\varphi(t)=e^{st}$ のとき，式 (63) は

$$y(\omega,t)=\frac{1}{Q_n(s+i\omega)}e^{(s+i\omega)t}$$

という特解をもっているが[27]，これはゼロ初期条件を満たしていないので

$$y(\omega,t)=\frac{1}{Q_n(s+i\omega)}e^{(s+i\omega)t}+\sum_{j=1}^{n}c_j e^{\lambda_j t}\ \cdots(64)$$

と置く。上式の λ_j は特性方程式 (55) の根であり，また，係数 c_j は $y(\omega,t)$ がゼロ初期条件を満足するように決定する。

式 (64) を (62) に代入すれば，微分方程式 (59) の特解 $Y_{\rm I}(t)$ のスペクトル展開式

$$Y_{\rm I}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{(s+i\omega)t}}{Q_n(s+i\omega)}+\sum_{j=1}^{n}c_j e^{\lambda_j t}\right]d\,\Phi(\omega)+\bar{y}_{\rm I}(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

が得られる。安定な動力学系においては，時間 t が十分大になると $e^{\lambda_j t}$ は0に接近するから，そのときには上式のかぎカッコ [$\cdots$] 内の第2項は無視できる。そうすると

$$Y_{\rm I}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(s+i\omega)t}}{Q_n(s+i\omega)}d\,\Phi(\omega)+\bar{y}_{\rm I}(t)\ \cdots\cdots\cdots(66)$$

となるので[f)]，この $Y_{\rm I}(t)$ を相関関数の定義式

$$K_{y\rm I}(t_1,t_2)=\mathbf{M}[\{Y_{\rm I}^*(t_1)-\bar{y}_{\rm I}^*(t_1)\}\cdot\{Y_{\rm I}(t_2)-\bar{y}_{\rm I}(t_2)\}]\ \cdots\cdots(67)$$

に代入し，式 (27), (28) を利用すると最後に

$$K_{y\rm I}(t_1,t_2)=e^{st_2+s^*t_1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(t_2-t_1)}S_x(\omega)}{|Q_n(s+i\omega)|^2}d\omega\ \cdots\cdots\cdots(68)$$

が得られる。したがって，s が純虚数，すなわち $s=is_1$ であるときには $e^{st_2+s^*t_1}=e^{is_1(t_2-t_1)}$ となるので，このときにかぎって，式 (68) の右辺は時間差 $(t_2-t_1)=\tau$ のみの関数となり，かくして $Y_{\rm I}(t)$ は定常となる。そのときには $Y_{\rm I}(t)$ は

$$S_{y\rm I}(\omega)=\frac{S_x(\omega-s_1)}{|Q_n(i\omega)|^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(69)$$

で与えられるスペクトル密度 $S_{y\rm I}(\omega)$ をもつことになる。

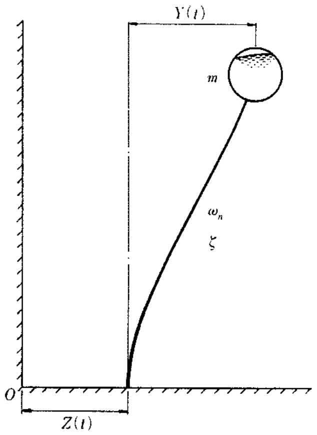
s が一般の実数あるいは複素数の場合には，関数 $Y_{\rm I}$

f) 式 (26) を用いれば，式 (62) ないしは (66) の $Y_{\rm I}(t)$ の期待値は次のようになる：

$$\mathbf{M}[Y_{\rm I}(t)]=\mathbf{M}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega,t)d\,\Phi(\omega)+\bar{y}_{\rm I}(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega,t)\mathbf{M}[d\,\Phi(\omega)]+\mathbf{M}[\bar{y}_{\rm I}(t)]=\bar{y}_{\rm I}(t)$$

(t) はもはや定常ではなくなる。

［**例題**］ **図—3** に示すような高架貯水槽を 1 自由度粘性減衰振動系（減衰定数 $\zeta=0.05$, 非減衰固有円振動数 $\omega_n=10\,\mathrm{rad/sec}$）と考え，その基部に $Z(t)$ という地震動変位が作用したときの水槽の相対変位 $Y(t)$ の分散 $\mathbf{D}[Y(t)]=\sigma_y{}^2(t)$ を計算しよう。ただし，地震動加速度 $X(t)=-d^2Z(t)/dt^2$ は定常とし，そのスペクトル密度 $S_x(\omega)$ は式 (35) および**図—2** に示されているものを用いる。



図—3

いま，$\varphi(t)=e^{st}=e^{-0.1t}$ とすると，$Y(t)$ に関する微分方程式は

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dY}{dt}+\omega_n{}^2Y=e^{st}X(t) \cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

となる。したがって

$$Q_2(p)=p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n{}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

$$Q_2(s+i\omega)=-\omega^2+2iq\omega+q^2+\omega_d{}^2 \cdots\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

となる。ここに

$$q=s+\zeta\omega_n,\ \omega_d{}^2=\omega_n{}^2(1-\zeta^2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

である。$Y(t)$ の分散の式は，式 (68) において $t_1=t_2=t$ とおけば次のようになる。

$$\sigma_y{}^2(t)=e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_x(\omega)}{|Q_2(s+i\omega)|^2}d\omega. \cdots\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

ところが，式 (35) のスペクトル密度 $S_x(\omega)$ は

$$S_x(\omega)=\frac{2\sigma_x{}^2\alpha\varepsilon^2}{\pi}\cdot\frac{1}{|\omega^2+2i\alpha\omega-\varepsilon^2|^2} \cdots\cdots(\mathrm{f})$$

と変形できるから，式 (c), (f) を式 (e) に代入すれば

$$\sigma_y{}^2(t)=\frac{2\sigma_x{}^2\alpha\varepsilon^2}{\pi}e^{2st}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|(-\omega^2+2iq\omega+q^2+\omega_d{}^2)(\omega^2+2i\alpha\omega-\varepsilon^2)|^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{g})$$

となる。上式中の積分の値 I は公式[11)12)]によって

$$I=\pi i\cdot\frac{a_3+a_1a_2}{a_4(a_3{}^2-a_1{}^2a_4+a_1a_2a_3)} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{h})$$

となる。ここに

$$\left.\begin{aligned}a_1&=2i(q-\alpha)\\ a_2&=q^2+\omega_d{}^2+\varepsilon^2-4\alpha q\\ a_3&=2i(\alpha q^2+\alpha\omega_d{}^2-q\varepsilon^2)\\ a_4&=-\varepsilon^2(q^2+\omega_d{}^2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

である。われわれの例題においては

$$\beta=2\alpha=16\,\mathrm{rad/sec}$$
$$\sigma_x{}^2=3600\,\mathrm{cm^2/sec^4}$$
$$\varepsilon^2=\alpha^2+\beta^2$$
$$\omega_n=10\,\mathrm{rad/sec}$$
$$\zeta=0.05$$
$$\omega_d{}^2=\omega_n{}^2(1-\zeta^2)\fallingdotseq\omega_n{}^2$$

であるから，これらの数値を式 (h), (i) に代入して

$$I=\pi i\cdot(-1.7167\times10^{-7}i)=1.7167\pi\times10^{-7}$$

を得る。これを式 (g) に代入して

$$\sigma_y{}^2(t)=\frac{2\sigma_x{}^2\alpha\varepsilon^2}{\pi}e^{2st}I=3.1642\,e^{-0.2t} \cdots\cdots(\mathrm{j})$$

したがって，たとえば $t=10\,\mathrm{sec}$ における分散は

$$\sigma_y{}^2(10)=3.1642e^{-2}=0.4281\,\mathrm{cm}^2$$

$$\therefore\ \sigma_y(10)=\sqrt{0.4281}=0.654\,\mathrm{cm}$$

参 考 文 献

1) J.D. Robson : An Introduction to Random Vibration. Edinburgh University Press, 1963.
2) S.H. Crandall : Random Vibration. Volume 2. The M.I.T. Press, 1963.
3) S.H. Crandall and W.D. Mark : Random Vibrations in Mechanical System. Academic Press, 1963.
4) W.T. Thomson Vibration Theory and Applications. Prentice-Hall. Inc., 1965.
5) 金井・小堀・蛭田共著：地震・振動学（建築学大系 11），彰国社，1963.
6) 伯野元彦：不規則振動論入門（「土木構造物の振動と安全性」に収載），土木学会関西支部，1966.
7) 土木学会編：土木技術者のための振動便覧，第 1 章 振動理論（芳村 仁），土木学会，1966.
8) 京都大学土木会編：土木計測便覧，6. 不規則変動量の解析（山田善一），丸善，1970.
9) 伊藤 学・伯野元彦：不規則な現象の解析（土木技術者のための新数学講座，土木学会誌第 55 巻第 2 号，1970.
10) В.С. Пугачев : Теория случайных функций и ее применение к задауам автоматического управления（不規則関数論とその自動制御への応用），Физматгиз, 1960. 文献 11) はこの英訳である．
11) V.S. Pugahev : Theory of Random Functions and Its Application to Control Problems. Translated by O.M. Blune. Pergamon Press, 1965.
12) В.С. Пугачев : Введение в теорию вероятностей（確率論入門），Издательство《Наука》, Москва, 1968.
13) R.C. Dubes : The Theory of Applied Probability. Prentice-Hall, Inc., 1968.
14) А.А. Свешников : Прикладные теории случайных функций（応用不規則関数論），Издательство《Наука》, Москва, 1968.
15) В.В. Болотин : Статистические методы в строительной механике（構造力学における統計的手法），第 2 版，Стройиздат, Москва, 1965. 文献 16) はこの

英訳である.
16) V.V. Bolotin : Statistical Methods in Structural Mechanics. Translated by S. Aroni. Holden-Day. Inc., 1969.
17) В.В. Болотин, М.Ф. Диментберг : Статистические задачи колебанийи и устойчивости упругих систем (弾性系の振動および安定性の統計的解析の諸問題), Прочность・Устойчиовсть・Колебания, том 3, глава 10. Издательство 《Машиностроение》, Москва, 1968.
18) В.В. Болотин : Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружении (構造計算への確率論および信頼性理論の応用), Издательство Литературы по строительству, Москва, 1971.
19) Н.А. Николаенко : Вероятностнье методы динамического расчета машиностроительных конструкций (確率論的手法による機械構造の動的計算法), Издательство 《Машиностроение》, Москва, 1967.
20) Y.K. Lin : Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967.
21) 伊藤 清：確率論（現代数学 14），岩波書店，1953.
22) 高木貞治：解析概論（改訂第3版），岩波書店，1961.
23) 酒井栄一：微分・積分，上巻（数学講座 2），筑摩書房，1971.
24) K.S. Miller 著，佐藤・藤井共訳：技術者の数学 II（共立数学全書 520），共立出版，1965.
25) A. Papoulis 著，大槻・平岡監訳：工学のための応用フーリエ積分，オーム社，1967.
26) W.B. Davenport, W.L. Root 著，滝・宮川共訳：不規則信号と雑音の理論，好学社，1968.
27) 矢野健太郎：微分方程式通論（東海数学叢書 5），東海書房，1956.

(1971.12.3・受付)
(1972.1.31・再受付)