

数値解析法講座 9

応用編

計画手法 (I)

庄子幹雄*

1. PERT 系手法

(1) 矢線図とボロジカルオーダリング

a) 矢線図のルール

工程表をつくるにあたって、その作業や順序関係・関連について矢線を作業として書き表わしたものが矢線図である。すべての作業を孤立させることなく、結合点をとおして結びつけることによって矢線図はできあがる。そのためのルールを整理すれば、次のようになる。

- ① 各作業は結合点により結ばれる。各結合点には、異なった結合点番号をつける。
- ② 各矢線の先端、後端はそれぞれ結合点を持ち、矢線を作業とし、図-1 のように表わす。
- ③ 結合点によって結合している矢線は、直接の先行作業、後続作業を持つ。作業 (i, j) は作業 (j, k) の先行作業、作業 (j, k) は作業 (i, j) の後続作業という(図-5)。
- ④ ダミーという特別な作業がある。これは、所要時間が0で、作業の順序だけを示し、使用法は一般の作業に準ずる。一般には、点線の矢線で示す。
- ⑤ 一組の結合点 (i, j) によって、ただ一つの作業を示す。同一結合点間に複数の作業を示す場合は、図-3 のように表わす。



ただし $i < j$
 i : 先行結合点番号
 j : 後続結合点番号

図-1 作業の表わし方

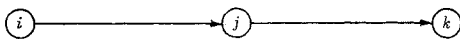


図-2 作業の順序

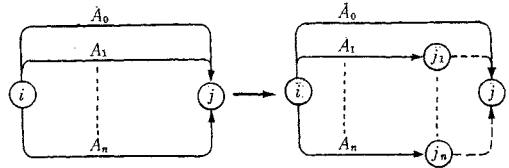


図-3 同一結合点間の複数作業の表わし方

b) トポロジカルオーダリング (Topological Ordering)

矢線図のルールから、後続結合点番号のほうを先行結合点番号より大きくするが、実際には計画の途中で作業の順序を変更したり、結合点の番号づけ段階でミスすることにより、そのルールを守れないことがある。このため結合点番号をつけかえし、すべての結合点番号の順序付けを行なうことを、トポロジカルオーダリングという。この操作の方法には、1) 尻取法、2) 位取法、3) 繰返し法などがある。

① 尻取法 (Threading Method): 作業をすべてリストアップする。最初にリストされた作業から、後続結合点番号を先行結合点番号とする作業をみつけ、順次、後続作業を配置して作業系列をつくる。この作業系列に入った作業をリストから抜いて、リストに残った作業にも同様な作業系列をつくって、以前の系列の先行作業グループとして配置していく。

リストの作業がなくなるまで整理していくもので、手計算向きの方法である。

② 位取法 (Ranking Method): 作業のリストと結合点のリストから、先行作業を持たない作業、つまり開始作業から結合点番号をつけかえ、先行作業順に作業を見つけて、順次新しい結合点に置きかえていくもので、機械的に計算していく。多少計算に繁雑さがあるが、コンピュータ向きである。

③ 繰返し法 (Repeating Method): 矢線図の結合点を開始結合点からのレベルの深さ(開始結合点からどれだけ遠いか)を求めて、レベルの小さいもの、つまり開始結合点に近いものから順次新しい結合点番号につけかえていくものである。計算が単純であるが、計算量が矢線図によって変化するためコンピュータ向きである。

以上3つの方法を簡単に述べたが、この中で繰返し法の考え方とフローチャートを次に示す。

④ 繰返し法の考え方: 矢線図の作業を $a_1(i_1, j_1)$, $a_2(i_2, j_2)$, ..., $a_n(i_n, j_n)$ とする。また結合点 i のレベルを $L(i)$ であらわすと、 $k=1$ より順次 n まで各作業について 1) あるいは 2) の操作をする。

1) $L(i_k) < L(j_k)$ の場合は、判断 $D=0$ とし、次の作業を調べる。

2) $L(i_k) \geq L(j_k)$ の場合は判断 $D=1$ とし、 $L(j_k)$

* 鹿島建設(株)重役室 電子計算センター企画課長

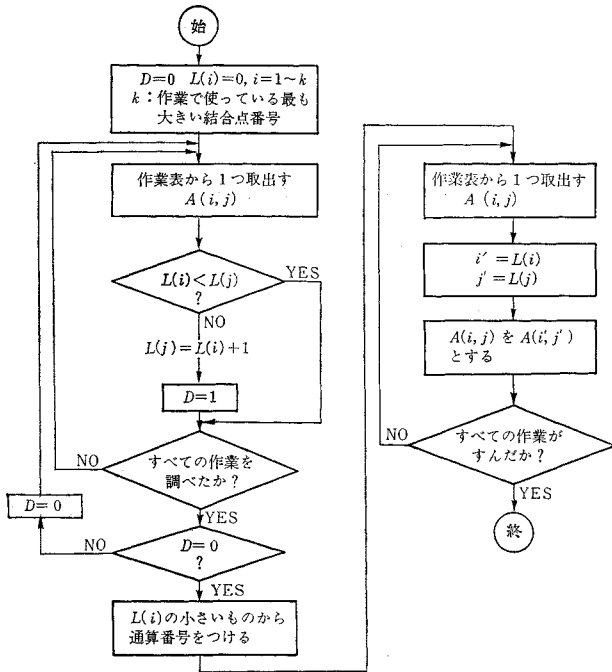


図-4 繰返し法のフローチャート

$=L(i_k)+1$ とレベルを更新して、次の作業を調べる。すべての作業を調べたら、判断 D が 1 である場合は、 $k=1\sim n$ まで、各作業について、前述の操作を繰り返す。

判断 D が 0 である場合は、すべての作業 (i, j) について $L(i) < L(j)$ が成立し、結合点のレベルは求められた。すべての結合点 i について $L(i)$ の小さいものから、通し番号をつけておく。作業 $a_k(i_k, j_k)$ を作業 $a_k(L(i_k), L(j_k))$ と書きかえれば、結合点の番号はルールどおりになる。

⑤ フローチャート：図-4 のとおりである。

(2) 日程計算 (PERT/TIME Calculation)

矢線図の作業に所要時間(時, 日, 週, 月など)を入れて、このプロジェクトがいつ完了するか、また各作業の開始時刻, 終了時刻はいつかを求める。ここでは、先行作業順, つまり結合点番号の小さい順の作業で計算をすすめていく。

a) 最早結合点時刻 (Earliest Event Time : T_i^E)^{a)}

プロジェクトの開始から、順調に作業を行なっていた場合の結合点 i の開始時刻を示すものである。開始結合点を S とすると

$$T_S^E=0 \text{ またはプロジェクトの開始予定日} \dots\dots\dots(1)$$

a) 前向き計算ともいう。

$$T_j^E = \max_{(i,j) \in P} (T_i^E + D_{ij}) \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 D_{ij} は作業 (i, j) の所要時間、 $(i, j) \in P$ はこのプロジェクトの作業すべてということ(以下同様)である。

b) 最遅結合点時刻 (Latest Event Time : T_j^L)^{b)}

プロジェクトの完了時刻から逆算して、完了を遅らせずに結合点 i を可能な限り遅らせて終了する場合の終了時刻を示すものである。終了結合点を F とすると次式のとおりとなる。

$$T_i^L = T_F^E \text{ またはプロジェクトの終了予定日} \dots\dots\dots(3)$$

$$T_i^L = \min_{(i,j) \in P} (T_j^L - D_{ij}) \dots\dots\dots(4)$$

c) 作業時刻 (Activity Time)

各作業の開始, 終了時刻は、最早結合点時刻から求められるものと、最遅結合点時刻から求められるものとの2種類があり、前者を最早日程, 後者を最遅日程という。

1) 最早開始時刻 (Earliest Starting Time : ES)

$$ES_{ij} = T_i^E \dots\dots\dots(5)$$

2) 最早終了時刻 (Earliest Finishing Time : EF)

$$EF_{ij} = ES_{ij} + D_{ij} \dots\dots\dots(6)$$

3) 最遅終了時刻 (Latest Finishing Time : LF)

$$LF_{ij} = T_j^L \dots\dots\dots(7)$$

4) 最遅開始時刻 (Latest Starting Time : LS)

$$LS_{ij} = LF_{ij} - D_{ij} \dots\dots\dots(8)$$

作業時刻が求められると、各作業時刻の差によって工期に対する余裕および後続作業に対する余裕を計算する。前者を全体余裕 (Total Float : TF), 後者を自由余裕 (Free Float : FF) という。

$$TF_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij} \text{ (または, } LS_{ij} - ES_{ij}) \dots\dots\dots(9)$$

$$FF_{ij} = T_j^E - EF_{ij} \dots\dots\dots(10)$$

5) クリティカルパス (Critical Path)

$TF=0$ の作業経路をいい、このパス上の作業は 1 日でも遅れるとプロジェクトの完了時刻をその分だけ遅らせる。この日程計算のフローチャートは図-5 のようになる。また、コンピュータの計算結果をバーチャートで表わしたものが図-6 である。

(3) 配員計算 (PERT/MANPOWER Calculation)

日程計算の結果に基づいて、資源(労務者, 機械, 材料など)計算を行なう。この配員計算では、資源の必要量を求める山積計算と、資源の効率的な使用, 平滑化をは

b) 逆向き計算ともいう。

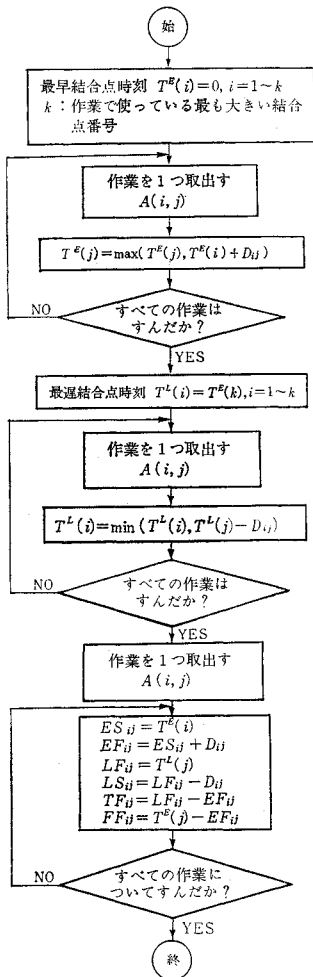


図-5 日程計算のフローチャート

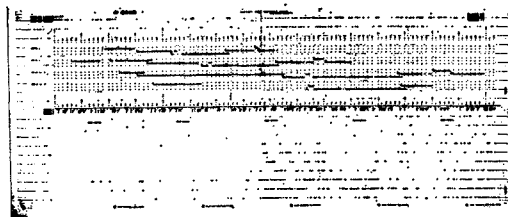


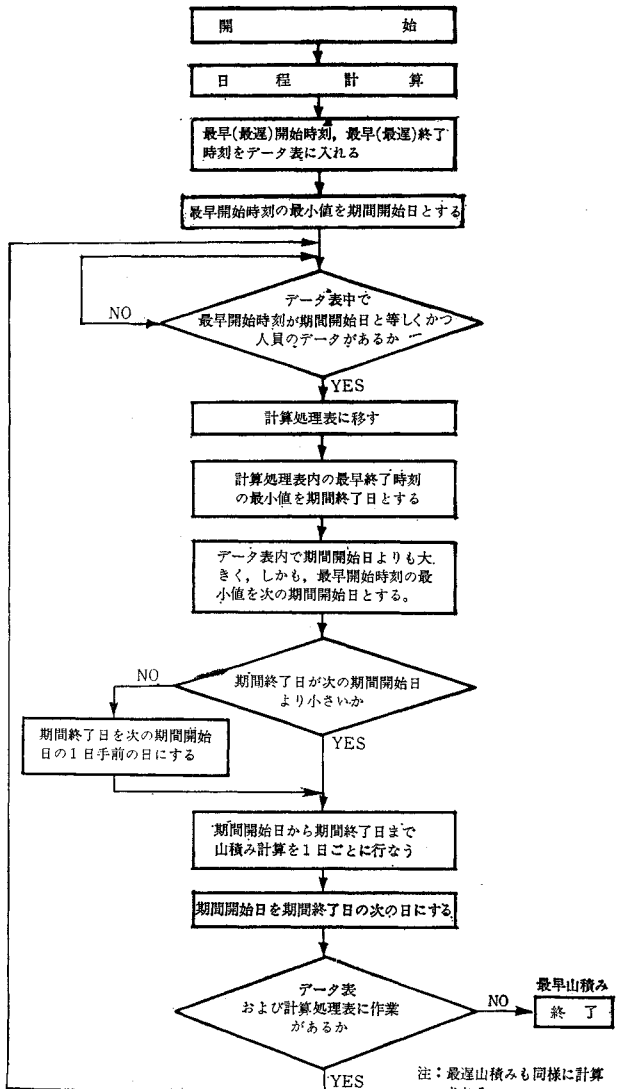
図-6 コンピュータが計算したバーチャートのアウトプット例

かる山崩計算との2種類がある。

a) 山積計算 (Manpower Loading Calculation)

作業 (i, j) の開始時刻を ST_{ij} , 終了時刻を FN_{ij} とする。時刻 t における遂行作業 W_t は

$$W_t = \{(i, j) | ST_{ij} \leq t < FN_{ij}, (i, j) \in P\} \dots\dots\dots(11)$$



注: 期間開始日とは山積の等しい期間すなわち, 人員のデータの入っている作業のきりめの期間の開始日であり, 日程をたて割りした場合のデータの入っている作業の結合点の開始日から, 他の人員のデータの入っている作業の開始日までの期間の始めの日である。

期間終了日とは, 山積の異なる前の日である。すなわち, 次の人員のデータをもつ作業が始まる以前の日であり, 次の作業の開始日の前日といま行なわれている作業の終了日の小さいほうである。

図-7 山積計算のフローチャート

作業 (i, j) の1単位 (時, 日, 週, 月など) あたりの必要資源を M_{ij} とすると, 時刻 t における必要資源量 $R(t)$ は

$$R(t) = \{\sum M_{ij} | (i, j) \in W_t\} \dots\dots\dots(12)$$

したがってプロジェクトの開始時刻 S から終了時刻 F までを計算すれば, プロジェクト全体の必要資源量が求められる。

$\{R(t)|S \leq t \leq F\}$ をグラフ化すれば、山積図を得ることができる。このとき

$ST_{ij}=ES_{ij}$, $FN_{ij}=EF_{ij}$ の場合を最早日程による山積

$ST_{ij}=LS_{ij}$, $FN_{ij}=LF_{ij}$ の場合を最遅日程による山積という。

b) 山積計算のフローチャート

図-7 のとおりである。

c) 山崩計算 (Manpower Levelling Calculation)

山積計算の結果、必要資源量 $R(t)$ に、極端に凹凸がある場合、あるいは、このプロジェクトに用意された資源の制限以上に $R(t)$ がある場合は、プロジェクトの完了時刻を守って、さらに資源の配分 (資源の制約、平滑化) ができるかどうか山崩計算で検討していく。一般には、最早日程に合わせて順次あとへ遅らせつつ山崩していく。

① 時刻 t における必要資源量 $R(t)$ を式 (11), (12) で求める。

資源の制限量を $L(t)$ で与えられた場合は

② $R(t) \leq L(t)$ であれば、時刻 t を 1 日進めて、上記の ① を行なう。

③ $R(t) > L(t)$ であれば、式 (11) 中のいずれかの作業を遅らせなければならない。

作業 (i, j) の優先基準 P_{ij} (一般には $P_{ij}=TF_{ij}$ とし、小さいものを優先する) により、遅らせる作業 DL_{ij} は、

$$DL_{ij} = \max\{P_{ij}|(i, j) \in W_t\} \dots\dots\dots (13)$$

遅らせる作業のあつまり W_t^* は

$$W_t^* = \{DL_{ij}\} \dots\dots\dots (14)$$

修正した必要資源量 $R'(t)$ は

$$R'(t) = \{\sum M_{ij}|(i, j) \in W_t, (i, j) \notin W_t^*\} \dots\dots\dots (15)$$

$R'(t)$ を $R(t)$ に修正して、② を満たすまで、式 (13)~(15) を繰り返す。② を満たしたときに、 W_t^* 中の作業 (i, j) について、作業の開始、終了時刻、余裕を修正する。

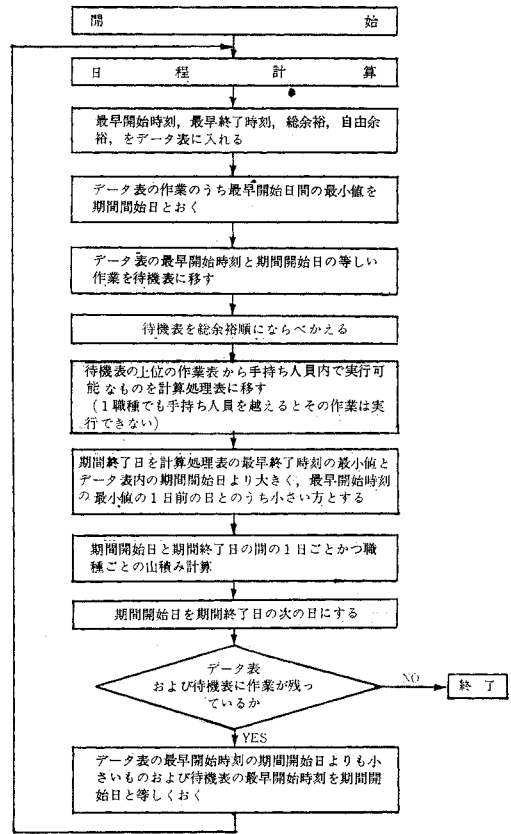
$$ST_{ij} = t + 1 \dots\dots\dots (16)$$

$$FN_{ij} = ST_{ij} + D_{ij} \dots\dots\dots (17)$$

$$TF_{ij} = TF_{ij} - 1 \dots\dots\dots (18)$$

これに伴って遅らせた作業に、後続する以下の作業についても作業の開始、終了時刻、余裕を修正する。こうして時刻 t をプロジェクト開始時刻 S より、終了時刻 F まで、①~③ について順次計算していく。

ここで、 $L(t)$ が時刻によって変化する場合を多段レベルによる山崩しという。この場合は、 W_t の作業群のすべての作業の終了時刻まで $L(t)$ をみて、②の条件を満たせばよい。 $\{R(t)|S \leq t \leq F\}$ をグラフ化すれば、



注：期間開始日、期間終了日については、図-7 のとおり。

図-8 山崩計算のフローチャート

山崩図を得ることができる。

d) 山崩計算のフローチャート

図-8 のとおりである。

e) 山積、山崩計算のアウトプット

実際の計算は、コンピュータによって、各種 (1 種類以上) の資源について同時に山積計算、山崩計算をして棒グラフのアウトプットを得る。

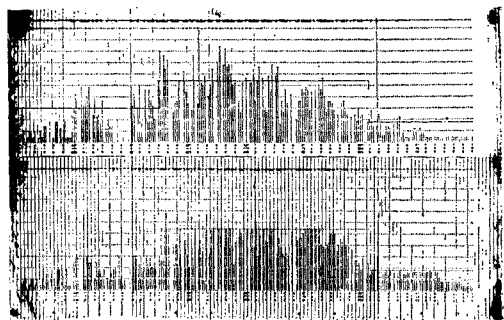


図-9 山積 (上) と山崩 (下) のアウトプット例

(4) 費用計算 (PERT/COST Calculation)

実行可能な日程に従って、各作業を遂行するための必要費用の算出をする。この計算は、配員計算に準ずるが一般には、累計費用で表わす。

時刻 t における累計費用を $C(t)$ とする。費用計算では、作業の進捗に合わせて費用が発生することを表わすため実行作業 W_t' は

$$W_t' = \{(i, j) | ST_{ij} < t \leq FN_{ij}, (i, j) \in P\} \dots\dots\dots (19)$$

$$C(t) = \left\{ \sum \frac{E_{ij}}{D_{ij}} \mid (i, j) \in W_t' \right\} + C(t-1) \dots\dots\dots (20)$$

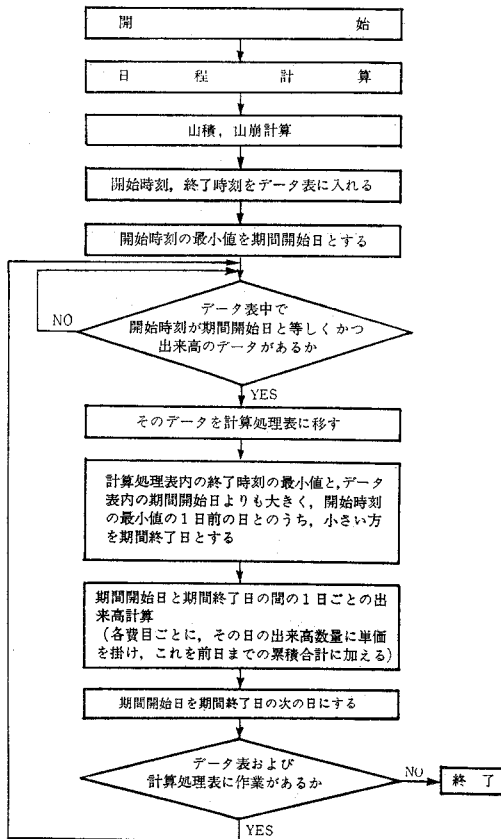
ただし、プロジェクトの開始時刻 S の以前の累計費用は $C(S-1) = 0 \dots\dots\dots (21)$

として、 $\{C(t) | S \leq t \leq F\}$ をグラフ化すれば、費用曲線を得ることができる。

a) 費用計算のフローチャート

図-10 のとおりである。

b) 費用計算のアウトプット



注：① 期間開始日、期間終了日については、図-7 のとおり。
② 開始時間、終了時間は、山崩計算の結果であり、余裕割付けの完了したものである。

図-10 費用計算のフローチャート

全費用ならびに種目別の費用を得る (図-11)。

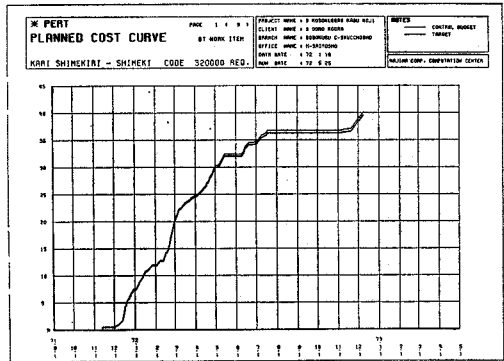


図-11 費用計算のアウトプット例

2. CPM 系手法

PERT 系手法と同様に、矢線図をデータとして計算がすすめられる。

CPM 系手法の特徴は、作業遂行のために、標準状態と特急状態の所要時間と所要費用とにより、工期と費用の関係を示すものとしてとらえるところにある。矢線図の作業は、プロジェクトの直接費用を表わしておりこれに間接費用を付加することにより、コストミコマムの工期を探し出すことができる。一般に土木工事等が図-12 のようになり、段階的に増加するものがある。CPM 系手法の適用そのものには計算の複雑さとともに適用の方法に問題があると思われる。

(1) 計算の考え方

作業 (i, j) の標準時間 DN_{ij} 、標準費用を CN_{ij} 、特急時間 DC_{ij} 、特急費用を CC_{ij} とすると、費用勾配 θ_{ij} は式 (22) のようになる。

$$\theta_{ij} = \left| \frac{CN_{ij} - CC_{ij}}{DN_{ij} - DC_{ij}} \right| \dots\dots\dots (22)$$

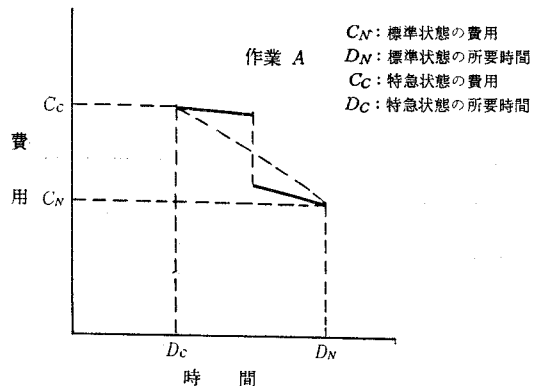


図-12 段階的に変化する作業

所要時間 D_{ij} を DN_{ij} と等しくおき、PERT/TIME の計算手法を適用する。

クリティカルパス上の作業 S は

$$S = \{(i, j) | TF_{ij} = 0\} \dots \dots \dots (23)$$

短縮すべき作業 A_s は

$$A_s = \min(\theta_{ij} | (i, j) \in S, D_{ij} \neq DC_{ij}) \dots \dots (24)$$

- ① A_s がなければ計算終了。
- ② A_s があれば、その作業の D_{ij} を 1 単位時間短縮して通常の日程計算を行ない、式 (22) を繰り返す。実際には、PERT/TIME の計算結果で、プロジェクトの工期 λ を求める。また各作業の所要費用を E_{ij} として、 $E_{ij} = CN_{ij} + (DN_{ij} - D_{ij}) \times \theta_{ij}$ によって $C(\lambda)$ を、PERT/COST の手法で求める。こうして、工期と工費のグラフ $G(\lambda, C(\lambda))$ の直接費用曲線を得ていく。本来の CPM 系手法のための計算には、ラベリング法などシステムティックな解法があるが、ここでは割愛する。一般に、直接費用、間接費用、総費用の関係は 図-13 のようになる。

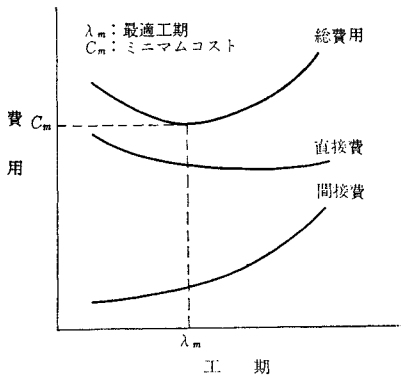


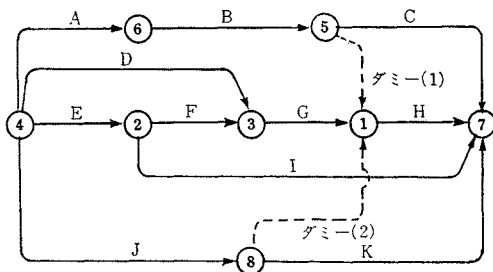
図-13 工期と費用の関係

3. ケース スタディー

(1) 小さな矢線図での計算例

PERT 系手法による、トポロジカルオーダーリングによる

(1) $i < j$ を満たさない矢線図



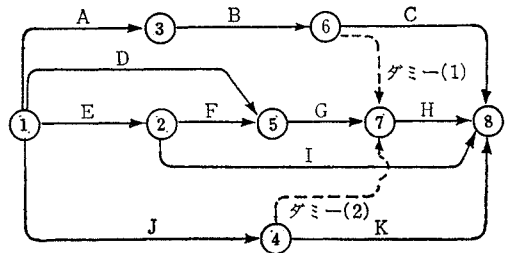
(2) 結合点のレベル

旧結合点 番号	結合点のレベル $L(i)$					最終 レベル	新結合点 番号
	第0回	第1回	第2回	第3回	第4回		
1	0	2	3			3	7
2	0	1				1	2
3	0	1	2			2	5
4	0					0	1
5	0	1	2			2	6
6	0	1				1	3
7	0	1	3	4		4	8
8	0	1				1	4
初期値	$D=1$	$D=1$	$D=1$	$D=0$			

(3) 作業名と i, j の関係

No.	作業名	i	j	No.	作業名	i	j
1	H	1	7	8	D	4	3
2	ダミー(2)	8	1	9	B	6	5
3	C	5	7	10	A	4	6
4	G	3	1	11	E	4	2
5	K	8	7	12	J	4	8
6	I	2	7	13	ダミー(1)	5	1
7	F	2	3				

(4) $i < j$ を満たす矢線図



例-1 作業リストを無秩序にひらいて作り、繰返し法を利用して結合番号をつけかえる作業

る結合点番号のつけかえ、日程計算、配員計算、費用計算の例を示す。

(2) 適用してみて

実際の工事に適用した場合、工事の内容に応じて PERT, CPM 系の手法を使い分ける必要がある。

a) トンネル工事

限られた空間で、掘削機械や労務者などの最適な割りつけがねらいであろうが、多くの場合、掘削土砂の輸送問題を OR の問題として取り扱う。

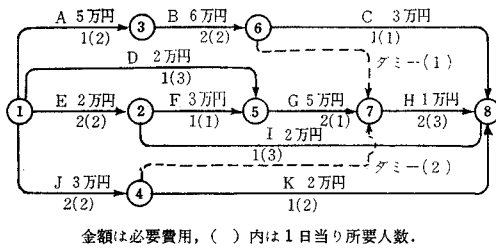
b) 超高層ビル

多職種の連続的繰返し工程になり、作業数が多いうえで各作業に対する気象条件をも考慮する必要がある。とくに、資源について、適切な時期に、適切な資材、労務者を配置する揚重計画の成否が鍵になる。

c) 橋梁下部工

いくつかの橋脚がある場合、どのような順序で作業を

(1) 価格を示す矢線図

(2) 最早結合点時刻 (T_i^E)開始結合点 $S=1$

$$\begin{aligned}
 T_1^E &= 0 \\
 T_2^E &= \max(T_1^E + 2) = 2 \\
 T_3^E &= \max(T_1^E + 1) = 1 \\
 T_4^E &= \max(T_1^E + 2) = 2 \\
 T_5^E &= \max(T_2^E + 1) = 3 \\
 T_6^E &= \max(T_3^E + 2) = 3
 \end{aligned}$$

$$T_7^E = \max \begin{Bmatrix} T_1^E + 1 \\ T_4^E + 0 \\ T_5^E + 2 \\ T_6^E + 0 \end{Bmatrix} = 5$$

$$T_8^E = \max \begin{Bmatrix} T_7^E + 1 \\ T_4^E + 1 \\ T_6^E + 1 \\ T_7^E + 2 \end{Bmatrix} = 7$$

(3) 最遅結合点時刻 (T_i^L)終了結合点 $F=8$

$$\begin{aligned}
 T_8^L &= T_8^E = 7 \\
 T_7^L &= \min(T_8^L - 2) = 5
 \end{aligned}$$

$$T_6^L = \min \begin{Bmatrix} T_7^L - 1 \\ T_7^L - 0 \end{Bmatrix} = 5$$

$$T_5^L = \min(T_7^L - 2) = 3$$

$$T_4^L = \min \begin{Bmatrix} T_7^L - 1 \\ T_7^L - 0 \end{Bmatrix} = 5$$

$$T_3^L = \min(T_6^L - 2) = 3$$

$$T_2^L = \min \begin{Bmatrix} T_5^L - 1 \\ T_5^L - 0 \end{Bmatrix} = 2$$

$$T_1^L = \min \begin{Bmatrix} T_2^L - 1 \\ T_3^L - 1 \\ T_3^L - 2 \end{Bmatrix} = 0$$

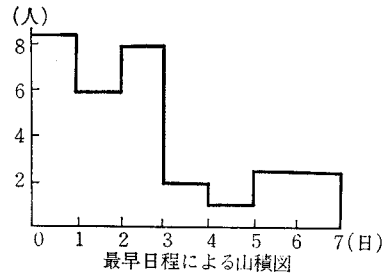
(4) 作業時刻と余裕

No.	作業名	j	i	所要日数	ES	EF	LS	LF	TF	FF	クリティカルパス
1	E	1	2	2	0	2	0	2	0	0	*
2	A	1	3	1	0	1	2	3	2	0	
3	J	1	4	2	0	2	3	5	3	0	
4	D	1	7	1	0	1	4	5	4	4	
5	F	2	5	1	2	3	2	3	0	0	*
6	I	2	8	1	2	3	6	7	4	4	
7	B	3	6	2	1	3	3	5	2	0	
8	ダミー (2)	4	7	0	2	2	3	5	3	3	
9	K	4	8	1	2	3	6	7	4	4	
10	G	5	7	2	3	5	3	5	0	0	*
11	ダミー (1)	6	7	0	3	3	5	5	2	2	
12	C	6	8	1	3	4	6	7	3	3	
13	H	7	8	2	5	7	5	7	0	0	*

例-2 日 程 計 算

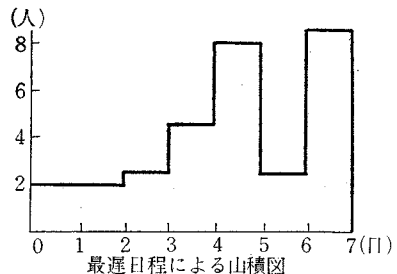
(1) 最早日程による山積計算

時刻	実行作業 (W_t)	$M(t)$
$t=0$	A, D, E, J	9
$t=1$	B, E, J	6
$t=2$	B, F, I, K	8
$t=3$	C, G	2
$t=4$	G	1
$t=5$	H	3
$t=6$	H	3



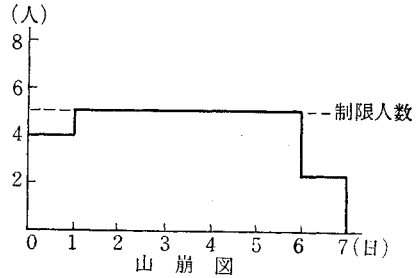
(2) 最遅日程による山崩計算

実行作業 (W_t)	$M(t)$
E	2
E	2
A, F	3
B, G, J	5
B, D, G, J	8
H	3
C, H, I, K	9



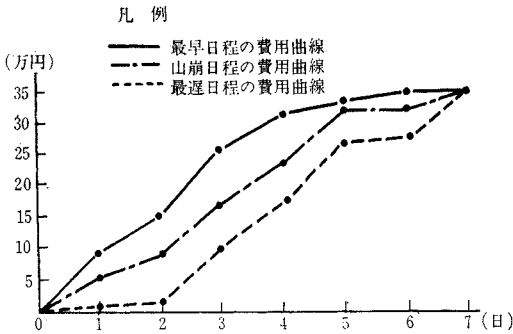
(3) 山崩計算(手持人員を5人とする)

時刻	実行の可能な作業 (W _t)	待ち作業 (W _t *)	M(t)	優先判定
t=0	A, D, E, J	D, J	4	TFの小さいものを優先
t=1	B, D, E, J	B, J	5	遊び資源の小さい組合せ
t=2	B, F, I, J	I	5	TFの小さいものを優先
t=3	B, G, I, J	I	5	TFの小さいものを優先
t=4	C, G, I, K	K	5	TFの小さいものを優先
t=5	H, K	—	3	
t=6	H	—	3	



例-3 配員計算

区分 時刻	最早日程のとき		最遅日程のとき		山崩じされた日程	
	遂行作業	C(t) (万円)	遂行作業	C(t) (万円)	遂行作業	C(t) (万円)
t=0		0		0		0
t=1	A, D, E, J	9.5	E	1.0	A, E	6.0
t=2	B, E, J	15.0	E	2.0	D, E	9.0
t=3	B, F, I, K	25.0	A, F	10.0	B, F, J	16.5
t=4	C, G	30.5	B, G, J	17.0	B, G, J	23.5
t=5	G	33.0	B, D, G, J	26.0	C, G, I	31.0
t=6	H	33.5	H	26.5	H, K	32.5
t=7	H	34.0	C, H, I, K	34.0	H, K	34.0



(注: 上表と合わせて見ること)

例-4 費用計算

すすめるか、杭打機や海上工事のさいのクレーン船の転用をどのようにするかなどの順序づけ問題について、施工条件にそった何ケースかの計算を行ない、そのそれぞれについて具体的に検討することができる。

d) 宅地造成工事

凹凸のある地形を設計仕様合う形に造成していく場合、切土盛土のバランス計算、土砂輸送計画などを、OR問題として解いてから、具体的な施工作业をPERT系手法で検討していく。これはブルドーザ、ショベル、ダンプトラックなどの機械が工程の中心となり、気象条件も含めた重機計画の最適化問題になる。

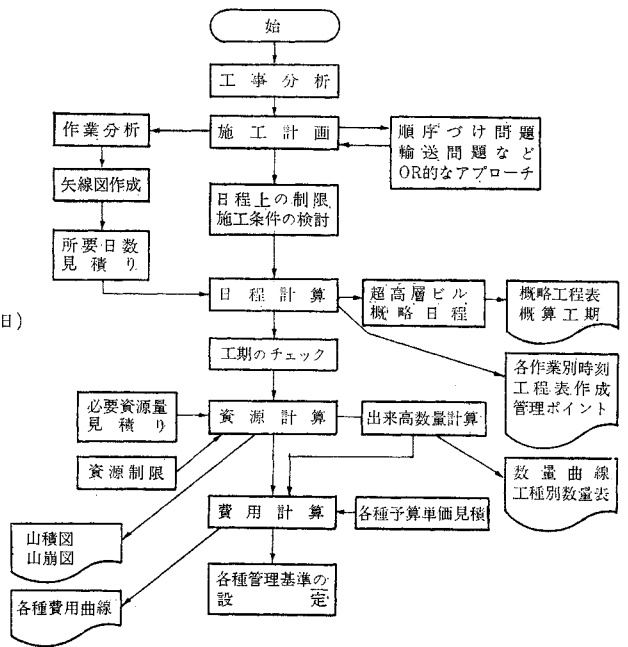


図-11 適用の流れ

参考文献

- 1) 庄子幹雄: わかりやすい PERT, CPM, 鹿島出版会, 1968年初版.
- 2) A.J. ウォルドロン: 新しい工程管理, 鹿島出版会, 1964年初版.
- 3) 刀根薫監修: PERT 講座, Vol. 1~4, 東洋経済新報社, 1966年初版.