連続体力学の最近の話題──2つの国際会議の報告──

佐　武　正　雄*

筆者は，最近，下記の2つの連続体力学に関する国際会議に出席する機会をもった。

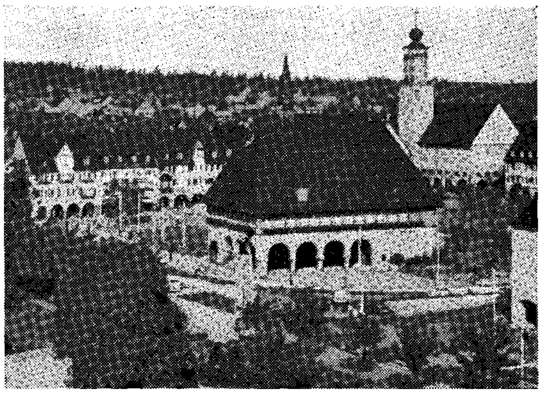
① IUTAM Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications, Freudenstadt Stuttgart, Aug. 28-Sept. 2, 1967[1)2)]

② NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon, Sept. 7-17, 1971[3)]

この2つの会議は，それぞれ異なった角度からではあるが，連続体力学について考察の行なわれた最近の代表的なものということができよう。会議の状況と，連続体力学の最近の動向・問題点などについて，以下に簡単にご報告する。

連続体力学は，固体の力学のみならず，流体力学をも包含する広大な分野であり，この2つの会議の内容に限っても，短い要約を記すことは大変むずかしいことであるが，筆者の理解の範囲で，またとくに興味をもった点を主として述べさせていただくこととする。

まず，① の会議は，すでに5年前になるが，風光の美しい西ドイツの Freudenstadt で開かれ，Kröner をはじめとして，Schaefer, Mindlin, Toupin, Rivlin, Eringen, Sedov らの著名な連続体力学の研究者が顔を揃えた。この会議のテーマは Cosserat の理論[4)補注1)]の一般化と分布転位論[補注2)]の問題に大別されているが，今日いかにしてこういう問題がこういう形で論議されるようになったかは，会議の組織委員を勤められた近藤一夫教授の講演[5)]に明瞭に述べられている。Bilby らによる分布転位に対する微分幾何学的考察[6)]は，材料の不完全性をマクロ的に微分幾何学の捩(れい)率と呼ばれる量でとらえることに着目したものであり，この会議で行なわれた転位論に関する多くの研究の端緒を開いたものである。一方，近藤教授による降伏の理論[7)]があり，座屈現象の高次元空間への類推から降伏現象の説明を試みたものである[補注3)]が，Bilby らの研究に先行し，しかも Bilby らと異なった問題から出発したものであるにもかかわらず，材料の微視的欠陥を微分幾何学的にとらえようとした点において共通していることは大変興味深い。Cosserat 兄弟による偶応力を考慮した連続体の力学は，すでに1909年に発表されたものであるが，50年間も注目されることなく経過し，ようやく1960年頃になって Mindlin[8)]らにより再認識され[a)]，以来 Cosserat 連続体の力学，さらにこれを一般化したいわゆる generalized continuum の力学の研究の隆盛をみるに至り，これが前述の微視構造の微分幾何学的研究と結びついてこの会議の開催となったものと思われる。

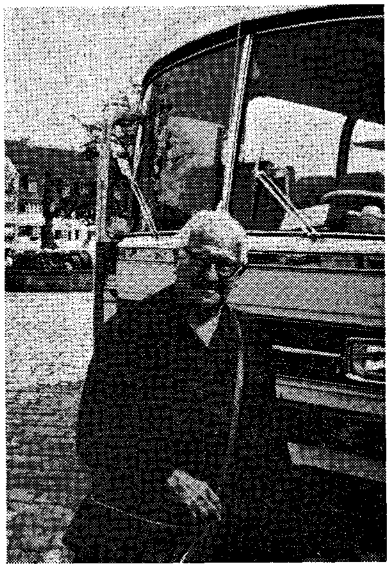


写真─1 IUTAM シンポジウムの開かれた Freudenstadt の Rathaus

力の量において偶応力を考慮することは，変形量においては（ひずみと独立な）回転ひずみ[補注4)]を考慮することに対応する[d)参照]。また，通常のひずみは適合条件を満足するが，不適合度の導入により分布転位のような材料の不完全性を表現することができる（これは曲率や捩率をもつ空間の幾何学──Riemann および非 Riemann 幾何学──の応用である）[補注2)]。力の量と変形の量との間には，エネルギーによる対応性や，量としてのアナロジーがあり[10)]，こういう観点から，最も一般化した力学体系を導入することができる。このような generalized continuum の力学に対して，従来の弾性力学は，偶応力を考慮せず，回転は変位に従属し（したがって，回転ひずみもひずみに従属する），不適合度をもたない，特殊なケースの力学であったと考えることができる。従来

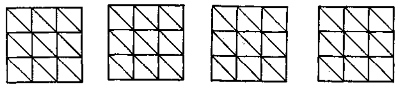
* 正会員　工博　東北大学教授　工学部土木工学科

a) Mindlin らより以前に，大島信徳助教授は，粒状体のように無限に細分化できない材料については，応力テンソルは非対称となり，平衡条件から当然偶応力の導入が必要となることを論じている[9)].



写真—2 イスラエルの Reiner 教授

の弾性力学による解析がひろく実用されてきたことも事実であるが，上述のような狭い考え方で十分とされていたゆえんは，まさしく，材料の微視的不完全性—欠陥，ないし粒状体のような細分化の有限性を無視した解析が行なわれてきたことを意味している。IUTAM 会議に老令ながら出席していたイスラエルの Reiner 教授（写真—2・レオロジーの分野で有名）が，“点とは何か”と突然発言して種々の議論を引き起こしたが，これはある意味ではこの会議の中心課題を指向していたように思われる。常識的に単純な幾何学的観点からは，点は単に空間内の位置を示すにすぎない。しかし，これがいったん material の点となると，問題は力学的思考の対象として複雑さをもってくる。点に方向ベクトル *director* を付与したり，曲率・捩率を考慮する必要性は，前述の微視的構造をもった材料の点を，なんとか数学的に表現しようとする努力にほかならない。また，材料の塑性変形や破壊の現象が，こういう概念を用いないでは論ずることができないことも明らかであると思われる。この会議では，上述のような一般化した立場から，多くの力学の基礎方程式が議論された[11]。しかし，金属の転位論への応用は別として，材料力学的立場からみた場合，それらがいかに実際の材料に適用されるかという点について，少数のもの以外，単なる抽象的議論に終ってしまったように思われるのは残念である。事実，一般化された連続体力学においては，多数の力学定数の導入が必要であるが，それらをどのようにして決定するか，どの項はどういう条件下で無視できるか，などといったような問題は，ほとんど未解決のまま今後に残されているように思われる。この方面の研究をさらに推進するためには，まず，基礎的実験に必要な測定技術の開拓が切望されているのが現状である。



NATO ASI FEM 会議のシンボルマーク

次に②の会議の話題に移る。この会議は，リスボンの LNEC（ポルトガルの国立土木研究所）で開かれ，趣意書にあるように，最近，有限要素法（以下，FEM と略記）が広く普及したにもかかわらず，その理論的基礎づけが大変遅れている，FEM が構造解析には十分応用されているが，土や岩盤力学などの分野では，ようやく利用され始めた段階であり，連続体力学への応用をさらに開拓する必要がある，といった趣旨のものであった。会議は，Zienkiewicz ら7名の講師（後述）による23題の講演と5テーマのセミナーからなる勉強会的なもので，なかなか内容も豊富で，しかもその一つ一つがかなり掘り下げた充実したものであったが，10日間にわたるかなり hard なものでもあった。これらの講演やセミナーのテーマや内容をいちいち記載することは省略するが，その概要を述べれば次のとおりである。

まず，Pister (California 大学) は連続体力学の概論と展望を述べ，Oliveira (LNEC) は Cosserat 連続体の力学の基礎方程式から出発して FEM の定式化を論じ，とくに収斂の問題についてくわしく説明した[12]。Cosserat 連続体の理論から議論をもっていったのは，古典的な弾性論ばかりでなく，一般化した連続体力学への FEM の適用をねらったものであり，会議最終日のセミナー（後述）でその意義を明らかにした。Oden (Alabama 大学) は，まず彼らの創案による conjugate projection の理論とその FEM への応用[13]を論じ，その後，各種の非線形問題[14]や流体力学の問題を取り扱った。この conjugate projection の理論は，筆者にとっては大変興味深く感じられたものである。これを簡単に説明すれば，直交関数系による広義の有限 Fourier 級数の概念をさらに一般化し，2組の conjugate な関数系による級数展開に拡張したものであり，Oden はこの手法を FEM の定式化や，FEM によって求められた変位分布と consistent な応力分布を求めるのに応用している。conjugate な関数空間として，応力とひずみの空間を対応させると，その内積はひずみエネルギーをあらわすことになる。応力差とひずみ差の内積によって，2つの変形状態の距離の概念を導入し，正解との近似度を論じるのであるが，この論法は，Oliveira も彼の収斂性の議論[12]に用いたものである。Oden は，この距離の概念から組み立てられる Banach 空間[b]の理論を用い，彼の conjugate projection の手法の FEM への応用が最良近似を与えることを説明している。de Veubeke (Liège 大学) はおもに duality

の応用を論じ，Marçal (Brown 大学) は incremental stiffness matrix を応用した大変形問題や不安定解析，粘弾性・塑性解析などを説明した。また，Clough (California 大学) は動的問題を論じ，Zienkiewicz (Swansea 大学) は，最近開発された isoparametric 要素の応用[17]と，土や岩石など一般に porous media と呼ばれる材料への FEM の応用を述べた。また，Zienkiewicz は Weighted Residual 手法[補註5] (とくに Galerkin 法) の FEM への応用についても述べ

$$\frac{\text{Galerkin}}{\text{Variational}}\equiv\frac{\text{Virtual Work}}{\text{Min. Pot.}}\geq 1$$

という式を書いて，Galerkin 法のほうが変分原理より応用上広いものであることを納得させようとしていた。上述してきたいろいろな講演は，かなり難解なものも多かったが，Oden などは，よく整理されたスライドを用いて要領よく説明し，最後には漫画を入れ "Gâteaux 微分[c] はだれにでも喰べる (理解する) ことができる" などとユーモアも加えていた。

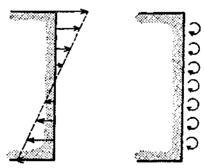
筆者にとって最も興味深かったのは，やはり会議の最後に行なわれた Miscellaneous Topics と題するセミナーであった。ここで Oliveira は，本文の前半で述べた IUTAM シンポジウムに参加した多くの人々から寄せられた "一般化された連続体力学と FEM との関連" についての議論を彼の意見も交えながら紹介し，筆者や，Eringen の弟子の Grot にも補足意見を求めた。筆者は，粒状体の連続体としてのマクロ的解析と連続体の FEM 解析がちょうど逆の手法であることを述べ，粒状体についての諸式をある条件下で極限化すれば，一般化された連続体力学におけるものと一致すること[20]などを説明した。このセミナーで，Oliveira は次のような発言を行なったが，これは大変注目すべきもののように思われた。


写真—3 Oliveira 教授 (LNEC)

"……(Neuber 教授らが指摘するように)，一般化された連続体力学においては，弾性係数の決定に大変困難がある。しかし，私にとって大きな驚きは，いままでだれもコンクリートが大きい特性長[d] をもつ材料であり，コンクリート構造物の応力集中係数を定めるのに，古典理論は役にたたないのではないかという点に着目しなかったことである。たとえば，コンクリートのクラックの研究には，古典理論より新理論 (一般化された連続体力学の理論) の適用の方が適切なのではないだろうか？云々"。これは筆者も共感させられた意見であった。こういう方面の研究は，前述したような generalized continuum の力学における理論の偏った先行性，実際の材料への適用の立ち遅れを正しい軌道にもどす指標ともなり，われわれ土木関係の研究者に課せられた役割りであるように思われたのであった。

補　　注

補注 1) 偶応力と Cosserat の理論：応力は物体の内部の截面に分布する力であり，応力を考慮することによって，物体はどんな部分についても平衡条件を満足させることができるのは周知のとおりである。しかし，さらに一般化したあるいは特殊な力学的立場にたてば，截面に分布するモーメント (偶力) を考慮することが可能であり，これを応力に対して偶応力 *couple stress* と呼ぶ，曲げを受ける断面の応力分布として，たとえば，図—1 (1)，(2) のいずれを考えることも可能であり，(2) が偶応力だけの場合である。偶応力を考慮した力学体系は，応力の非対称性などの問題を含み，これを最初に論じたのが Cosserat 兄弟で，Cosserat の理論 (または偶応力理論) と呼ばれている[4)8)]。しかし，偶応力を導入する必要性は，homogeneous な物体の平衡条件の立場からは不要と考えられ，問題を単に複雑化するだけのように思われていたようである。Cosserat の理論，さらにこれを一般化した連続体の理論は，最近になってその力学的必要性と相まって，ようやくその価値を認識されるようになってきたのである[21)25)]。


(1)　　(2)

図—1

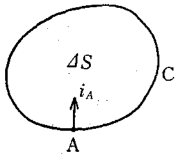
補注 2) 分布転位論と不適合度：転位 *dislocation* は規則正しい結晶構造の欠陥を意味している。これを巨視的に幾何学的にとらえようとすれば，**図—2** に示すように，物体内に微小面積 $\varDelta S$ を囲む閉曲線 C を考え，これをその上の1点 A で切断して自然状態に解放した場合の "くいちがい" を考察すればよい[10)24)25)]。

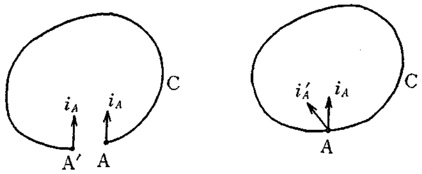
この場合，くいちがいには，代表的なものとして，**図—2** (a)，(b) に示す2種類が考えられる。(a) の場合は，解放後 C の終端点 A' が始端点 A と離れるが，A に付着させておいた方向ベクトル $\boldsymbol{i}_A$ は平行のまま変わらない場合 (遠隔平行性) であり，$\overrightarrow{AA'}=\varDelta\boldsymbol{u}_C$ は Burgers ベクトルと呼ばれている。(b) の場合は，解放後も A 点は分離しないが，終端点に付着された方向ベクトル $\boldsymbol{i}_A'$ は，$\boldsymbol{i}_A$ に対し回転を起こし，$\boldsymbol{i}_A'=\boldsymbol{i}_A\cdot\varDelta\boldsymbol{R}_C$ ($\varDelta\boldsymbol{R}_C$ は回転を示すテンソル) とおくことができる。(b) の場合は回転転位 *disclination* と呼ばれ，最近実際の結晶欠陥とし

b)　Banach 空間とは，ベクトル空間で，その各元 x にベクトルの長さに相当するノルム $\|x\|$ が与えられ，さらに x, y の距離 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ が導入されている空間 (ノルム空間) で，この距離に関して完備なものをいう[15)16)]．

c)　Gâteaux 微分とは，ノルム空間上の作用素に対する微分の一つで，作用素が汎関数である場合には，古典的な変分法における第一変分に相当する概念である．Gâteaux 微分を弱微分 (これに対し，Fréchet 微分を強微分) ともいう[14)18)19)]．

d)　特性長 *characteristic length* l は，せん断弾性係数 G と Cosserat 連続体における第二の弾性係数 $B=\mu/\kappa$ (ただし，μ は偶応力，κ は回転ひずみ) から，$l=\sqrt{B/G}$ で定義される材料固有の量である[8)21)]．l は長さのディメンションをもち，その材料のもつ微視構造のオーダーを示すものとされている[22)23)]．$l\rightarrow 0$ ならば偶応力は生ぜず，通常の弾性体となる．





（a）　　　　　　　　（b）

図—2

ても発見され[26]盛に研究されるようになってきた。一般のくいちがいの場合は，(a)，(b) の合成として表わすことができる。さて，$\Delta\boldsymbol{S}$ を2階のテンソルと考え，2重内積‥を用いて

$$\Delta\boldsymbol{u}_C=\Delta\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{T}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta\boldsymbol{R}_C=\Delta\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{K}\quad\cdots\cdots(2)$$

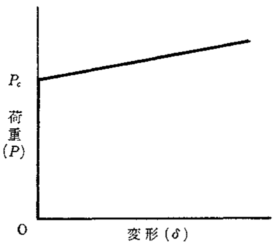
とおけば*，$\Delta\boldsymbol{S}\to 0$ の極限において，$\boldsymbol{T}$ および $\boldsymbol{K}$ は，それぞれ物体内のある点の転位と，回転転位の密度を示す量と考えることができる（$\boldsymbol{T}$ および $\boldsymbol{K}$ はそれぞれ3および4階のテンソルである)。

転位は，ミクロ的には離散して存在するのであるが，マクロ的に上述のような密度を考え，これらがある領域に分布している場合の力学を研究するのが分布転位論と呼ばれる分野である[6)25)]**。

分布転位をもつ物体は，微分幾何学的には“弯曲した空間”と考えることができ，上述の $\boldsymbol{T}(T_{\kappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu})$ および $\boldsymbol{K}(K_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu})$ をそれぞれこの空間の Schouten の捩率 *torsion* および Rieman-Christoffel の曲率 *curvature* と呼ぶ。$\boldsymbol{K}$ のみをもつ空間の研究は Riemann によって初めて系統的になされたので Riemann 幾何学と呼ばれ，Einstein によって相対性理論に応用されて有名となったのは周知のとおりである[28)]。$\boldsymbol{T}$ をももつ空間の研究は非 Riemann 幾何学と呼ばれ[29)]，塑性理論の研究に応用されている[21)24)]。

$\boldsymbol{T}$ および $\boldsymbol{K}$ をもたない空間は，“平坦な”空間すなわち Euclid 空間である。物体の変形の前後で，$\boldsymbol{T}$ または $\boldsymbol{K}$ が発生したり（または消滅したり）しない変形は適合変形と呼ばれ，はじめ Euclid 空間内にあった物体は，変形後も Euclid 空間内に連結状態の変化なしに（すべったり亀裂を生じたりすることとなしに）存在する。これに対し，$\boldsymbol{T}$ または $\boldsymbol{K}$ を発生する変形（塑性変形）は，変形後，平坦な Euclid 空間内に連結状態を変えないでは存在し得ない。こういう意味で，$\boldsymbol{T}$ や $\boldsymbol{K}$ は不適合度 *incompatibility* とも呼ばれている[10)24)]。

補注 3)　近藤教授の降伏理論：座屈は，その物体が占める空間内の荷重を受けて，その空間より一つ高い次元の空間へ曲がりこもうとする現象と考えることができる。たとえば，平板(二次元 Euclid 空間）は面内力によって，その面内の変形を起すのが本来の変形であるが，三次元 Euclid 空間内の曲った板となる変形をおこすのが，平板の座屈である。座屈は**図—3** に示すように，荷重 P がある限界荷重 P_C に達すると急激におこる現象で，数学的には微分方程式の固有値問題として捉えられる。近藤教授は降伏の現象が座屈に酷似した現象であることに着目し，降伏は本来三次元 Euclid 空間を占める物体が，ある限界荷重で四次元空間に曲がりこもうとするが，われわれの空間が三次元であるため，こういった座屈現象は起こり得ず，実際には物体の連続性が破れてすべりが起ったりする（補注 2）の不適合度が発生する）のが降伏現象であると考え，座屈と類同の方法で降伏条件式を導びかれた[5)7)24)]。



図—3

補注 4)　回転ひずみ：変位ベクトルを $\boldsymbol{u}$，回転ベクトルを $\boldsymbol{w}$ とすれば，回転ひずみ $\boldsymbol{\kappa}$ は

$$\boldsymbol{\kappa}=\nabla\boldsymbol{w}\quad\cdots\cdots(3)$$

と定義される（∇ はベクトル微分演算子)，通常の連続体では

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u}\quad\cdots\cdots(4)$$

の関係があり，通常のひずみは

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla)\quad\cdots\cdots(5)$$

で定義されるから，$\boldsymbol{\kappa}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ との間には

$$\boldsymbol{\kappa}=-\boldsymbol{\varepsilon}\times\nabla\quad\cdots\cdots(6)$$

という関係がある。しかし，一般化された連続体の力学では，回転は必らずしも変位に従属でなく，式（4）は一般に成立しない。したがって，式（6）も一般には成立せず，$\boldsymbol{\kappa}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}$ と独立なひずみ量と考えなければならない[8)9)10)]。なお，回転ひずみを曲率と称する学者もいるが，補注 2）に述べた曲率（＝不適合度……回転ひずみの微分[10)]）と混同しやすいので筆者は賛成しない。

補注 5)　Weighted Residual 手法：微分方程式の近似解を求める一般的な方法で，ある一つの微分方程式に対して，未知のパラメーターを含み，境界条件（または初期条件）を満足する近似解を設定する。この近似解を原方程式に代入した場合，正解ならば 0 になるべきであるが，近似解であるため一般に residual R を生ずる。われわれの求める最良の近似は，与えられた領域 V 全域について，R を 0 にできるだけ近づけることである。この目的で，実際に未知のパラメーターを定める方法はいろいろ考えられているが，これらを一般化して考えれば，適当な weighting function W_i を未知のパラメーターの数 n だけ選び

$$\int_V W_iRdV=0\ (i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)\quad\cdots\cdots(7)$$

を満足させるようにすれば，連立方程式（7）によって n 個の未知パラメーターを決定することができる。この方法は，Galerkin 法や最小自乗法をも含む一般的な手法と考えることができ[30)]，FEM の定式化にも応用することができる[17)]。

* 通常のテンソル記法にしたがえば，式（1），（2）はそれぞれ

$$\underset{C}{\Delta u^{\mu}}=\Delta S^{\kappa\lambda}T_{\kappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$$

$$\underset{C}{\Delta R}{}_{\mu}^{\cdot\nu}=\Delta S^{\kappa\lambda}K_{\kappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$$

ただし，

$$\underset{A}{i'^{\nu}}=\underset{C}{\Delta R}{}_{\mu}^{\cdot\nu}\,\underset{A}{i^{\mu}}$$

と記すことができる．

** 分布転位論の最近の研究の集成については文献 27) を参照．

参　考　文　献

1)　Kröner, E. (Editor) : Mechanics of Generalized Continua, Springer-Verlag, 1968.

2) 近藤一夫：IUTAM コスラ会議の印象，応用幾何学研究協会会報 No. 82, 1967, 3-6.
3) Academic Press から Proceeding の発行が予定されている.
4) Cosserat, E. & F.: Théorie des Corps Déformables, A Hermann & Fils, 1909.
5) Kondo, K. : On the Two Main Currents of Geometrical Theory of Imperfect Continua, 文献 1), 1968, 200-213.
6) Bilby, B.A., R. Bullough and E. Smith : Continuous Distribution of Dislocations (A New Application of the Method of Non-Riemannian Geometry), Proc. Roy. Soc. (A) **231**, 1185, 1955, 263-273.
7) Kondo, K. : A Proposal of a New Theory Concerning the Yielding of Materials Based on Riemannian Geometry, J. Jap. Soc. Appl. Mech. **2**, 1949, 123-128, 146-151.
8) Mindlin, R.D. and H.F. Tiersten : Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. **11**, 5, 1962, 415-448.
9) Oshima, N. : Asymmetrical Stress Tensor and its Application to a Granular Medium, Proc. 3rd Jap. Nat. Con. Appl. Mech., 1954, 77-83.
10) Satake, M. : On Mechanical Quantities in Generalized Continua, Tech. Rep. Tohoku Univ. **35**, No. 1, 1970, 15-37.
11) Kröner, E : Interrelation between Various Branches of Continuum Mechanics, 文献 1), 1968, 330-340.
12) Oliveira, E. R. A. : Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Int. J. Sol. Str. **4**, No. 10, 1968, 929-952.
13) Brauchli, H.J. and J.T. Oden : Conjugate Approximation Functions in Finite Element Analysis, Q. Appl. Math. **29**, No. 3, 1971, 65-90.
14) Oden, J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.
15) たとえば，竹之内 脩：函数解析，近代数学講座 **13**，朝倉書店，1968, 160-227.
16) ソーヤー（芹沢正三訳）：現代数学への小道，岩波書店，1968, 204-242.
17) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.
18) Vainberg, M.M. (translated and supplemented by A. Feinstein) : Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day, 1964, 35-43.
19) コルモゴロフ，フォミーン（山崎三郎訳）：函数解析の基礎，第2版，岩波書店，1971, 453-465.
20) Satake, M. : Mechanical Quantities and their Relations in Continuum and Discrete Materials, Rev. Roum. Sci. Tech., Série Méc. Appl. **16**, No. 6, 1971, 1235-1251.
21) Schaefer, H. : Das Cosserat-Kontinuum, Zeit. Ang. Math. Mech. **47**, Heft 8, 1967, 485-498.
22) Mindlin, R.D. : Influence of Couple-Stresses on Stress Concentration, Exp. Mech. **3**, 1963, 1-7.
23) Kröner, E. : On the Physical Reality of Torque Stresses in Continuum Mechanics, Int. J. Eng. Sci. **1**, 1963, 261-278.
24) 近藤一夫：変形の幾何学，岩波講座現代応用数学 **7**-2, 1957.
25) 近藤一夫：連続転位分布理論一不完全連続体の幾何学一，日本金属学会会報 第 10 巻 第 12 号，1971, 787-793.
26) Anthony, K., U. Essmann, A. Seeger and H. Trüuble : Disclinations and the Cosserat Continuum with Incompatible Rotations, 文献 1), 1968, 355-358.
27) Simmons, J.A., R. deWit, and R. Bullough (Editors) : Fundamental Aspects of Dislocation Theory, NBS Spec. Pub. 317 Ⅰ, Ⅱ, U.S. Gov. Print. Offic., 1970.
28) リーマン，リッチ，レビチビタ，アインシュタイン，マイヤー（矢野健太郎訳・解説）：リーマン幾何とその応用，現代数学の系譜 **10**，共立出版，1971.
29) たとえば，矢野健太郎：接続の幾何学，数学ライブラリー **4**，森北出版，1968.
30) Crandall, S.H. : Engineering Analysis, McGraw-Hill, 1956, 147-153.