

数値解析法講座 8

応用編

流体解析 (I)

拡散・高潮

和田明*・日野幹雄**

1. 拡散

最近の急速な産業の発展に伴い、水質汚濁や大気汚染が重要な問題となっている。河川、沿岸海域および大気における汚染物質の拡散の程度を知るためには、実証的な調査研究、水理および数値模型実験、個々の基礎的現象の理論解析を行なう必要がある。水理実験の手法は有効な手段と評価されるが、これを定量的に利用するには今後に残された相似則の問題点を逐次解決する必要がある。この状況のもとで、現在、数値実験の手法は水理実験の手法を補完するものとして、あるいはこれに代わるものとして用いられている¹⁾²⁾。

(1) 差分による方法

拡散現象は Fick の方程式を解いて求められる。

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$$

ここに、 C : 拡散物質の濃度、 x, y, z : 座標、 K_x, K_y, K_z : それぞれ x, y, z 方向の拡散係数、 U, V, W : 流速成分とする。

式(1)を差分方程式に置き換えるには、Explicit scheme と Implicit scheme の2つの方法がある。普通は前者を用いることが多いが、解の収束性・安定性の面から後者を用いる場合がある³⁾。

冷却水熱拡散の解析について考える。図-1 に示すように三次元空間に直交座標を考え、原点を放水口の上部中心にとる。放水口の形状は矩形断面(幅 $2B$ 、高さは H)とし、ここから温水冷却水が沿岸と直角方向に海域へ放出されるものとする。海面からの熱損失を考慮した熱拡散方程式は、式(1)において、 C のかわりに T

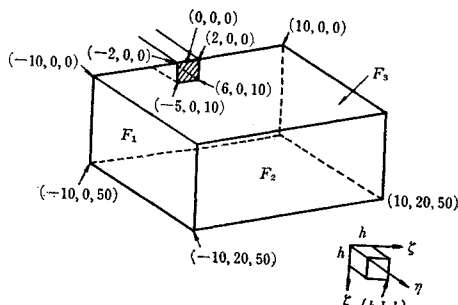


図-1 三次元熱拡散モデルにおける格子点

とおき、さらに右辺に大気と海面との熱収支項 $B_0, B_1 T / CH_w$ (ここに、 $B_0, B_1 T$: 海面での熱収支量、 C : 比熱、 H_w : 大気と海面との間でエネルギー授受が行なわれる厚さ)を加える必要がある。三次元空間における熱拡散方程式は次のように変換される。

$$\rho_0(1-\alpha T)\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha T} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + Q_0 / C \cdot H_w \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $\lambda = U / \sqrt{K_x}$ 、 $\xi = x / \sqrt{K_x}$ 、 $\eta = y / \sqrt{K_y}$ 、 $\zeta = z / \sqrt{K_z}$ 、 U : 沿岸に平行な潮流流速である。

上式中、冷却水放水に伴う移流効果は無視されている。座標変換を行なった境界条件は次のようになる。

- ① $\eta=0, -B/\sqrt{K_x} \leq \xi \leq B/\sqrt{K_x}, 0 \leq \xi \leq H/\sqrt{K_x}$ で $T=T_0$ 。
- ② $\eta=0, \xi > B/\sqrt{K_x}$ か $\xi < -B/\sqrt{K_x}$ 、すべての ζ および $\eta=0, -B/\sqrt{K_x} < \xi < B/\sqrt{K_x}, H < \zeta$ に対して $\partial T / \partial \eta = 0$ 。
- ③ 放水口より十分遠方(無限遠)においては、温度勾配は一定とする。
- ④ $\zeta=0$ で $\partial^2 T / \partial \zeta^2 = 0$ とする。
- ⑤ $\zeta = \zeta_b$ (海底)で $T=T_b$ (深層水温)が保たれているものとする。

(x, y, z) 空間を三方向を有する平行線群によって三次元格子に分割する。格子線群は $x=mh, y=nh, z=ph(m, n, p=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ である。式(2)に対する差分近似として次式を得る。

$$T(\xi, \eta, \zeta) = [F1 \cdot T(\xi+1, \eta, \zeta) + F2 \cdot T(\xi-1, \eta, \zeta) + F4 \cdot (T(\xi, \eta+1, \zeta) + T(\xi, \eta-1, \zeta) + T(\xi, \eta, \zeta+1) + T(\xi, \eta, \zeta-1)) + F5 \cdot B_0 + F6 \cdot \{ (T(\xi+1, \eta, \zeta) - T(\xi-1, \eta, \zeta))^2 + (T(\xi, \eta+1, \zeta) - T(\xi, \eta-1, \zeta))^2 + (T(\xi, \eta, \zeta+1) - T(\xi, \eta, \zeta-1))^2 \} / (1-\alpha \cdot T(\xi, \eta, \zeta))] / (1-F3) \cdot (T(\xi+1, \eta, \zeta) - T(\xi-1, \eta, \zeta)) \dots (3)$$

* 正会員 工博 電力中央研究所 技術第二研究所環境水理研究室長

** 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

ここに,

$$\begin{aligned}
 F1 &= (1. - \rho_0 \cdot \lambda \cdot h/2.) / (6. + B_0 \cdot h^2), \\
 F2 &= (1. + \rho_0 \cdot \lambda \cdot h/2.) / (6. + B_1 \cdot h^2), \\
 F3 &= (\rho_0 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot h/2.) / (6. + B_1 \cdot h^2), \\
 F4 &= 1. / (6. + B_1 \cdot h^2), \\
 F5 &= h^2 / (6. + B_1 \cdot h^2), \\
 F6 &= \alpha / 4. (6. + B_1 \cdot h^2)
 \end{aligned}$$

このような形の式が各格子点について成り立つ。各式の項数は少なく、1つの項(係数行列の主対角線となる項)が他に比べて大きく反復法が用いられる。さて、式(3)について加速 Liebmann 法を適用すると、 $T^{(k+1)}(\xi, \eta, \zeta)$ と $T^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)$ との差 $R^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)$ にある定数 A_p を乗じて新しい $(k+1)$ 近似値

$$\begin{aligned}
 T^{(k+1)}(\xi, \eta, \zeta) \\
 = T^{(k)}(\xi, \eta, \zeta) + A_p \cdot R^{(k)}(\xi, \eta, \zeta) \dots (4)
 \end{aligned}$$

をつくる。収束判定のため

$$\sum_{i', j', k'} R^2_{i', j', k'} = \sum R^2_{i, j, k} + R^2_{i, j, k}$$

を計算し、計算が終了したときこの値を調べ、所望の桁まで一致したかどうかを知るか、あるいは $|R_{\max}|$ の最大値を記憶しておいて、それが希望の値まで小さくなったかどうかをみる。

ここで、 A_p の適切な選択が問題になってくるが、本計算で $A_p=1.50$ として残差の自乗和 $\sum R^2 < 0.21 \times 10^{-8}$ 、残差の最大値 $|R|=0.97 \times 10^{-6}$ となるまでに 164 回の sweep が必要であり、 $A_p=1.80$ とすると 100 回の sweep のち、 $\sum R^2 < 0.89 \times 10^{-7}$ 、 $R=0.965 \times 10^{-6}$ になった。これらの結果は A_p の値について適当な選択をすれば、収束速度に著しい効果のあることを示している。この加速係数について、二次元・三次元の両者における結果を表-1 に示す。

SOR 法で計算する場合の手順は、たとえば図-2 のようになる。SW はプログラムのスイッチの意味で、計算段階としてまず mesh 幅の粗い場合について計算を実行し (SW=0)、その計算が収束したのち mesh 幅を半分にして計算を進める (SW=1.0)。また、収束判定のため、 $R(\xi, \eta, \zeta)$ の最大値を記憶させておいて一連の sweep が終わったのち調べて所望の桁まで収束したかどうかの判定を行ない、 $T^{(k+1)}(\xi, \eta, \zeta)$ の新しい値を出す。そして、海域内すべての節点に水温分布の初期近似値を与えれば計算が実施可能になる。

図-3, 4 および図-5 は数値計算によって求めた三次元空間における各断面での水温の拡散分布状態を示したものであって、

ちょうど夏期に相当した水温鉛直分布を境界条件のなかで考慮されている。

表-1 加速係数の結果

(1) 二次元空間				
A_p	Iterations	DEL 1	RMAX	$\sum R^2$
1.28	297 sweeps	10^{-5}	—	0.537×10^{-7}
1.50	182	10^{-5}	0.989×10^{-5}	0.533×10^{-7}
1.80	71	10^{-5}	0.965×10^{-5}	0.510×10^{-7}
(2) 三次元空間				
A_p	Iterations	DEL 1	RMAX	$\sum R^2$
1.50	164 sweeps	10^{-4}	0.970×10^{-6}	0.210×10^{-8}
1.80	100	10^{-4}	0.965×10^{-6}	0.089×10^{-8}

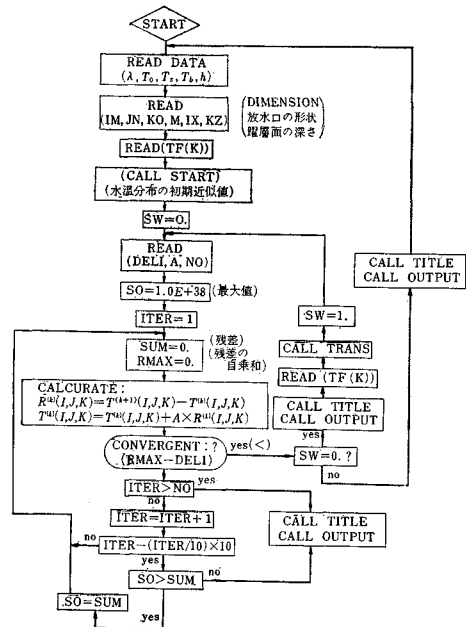


図-2 SOR 法によるフローチャート

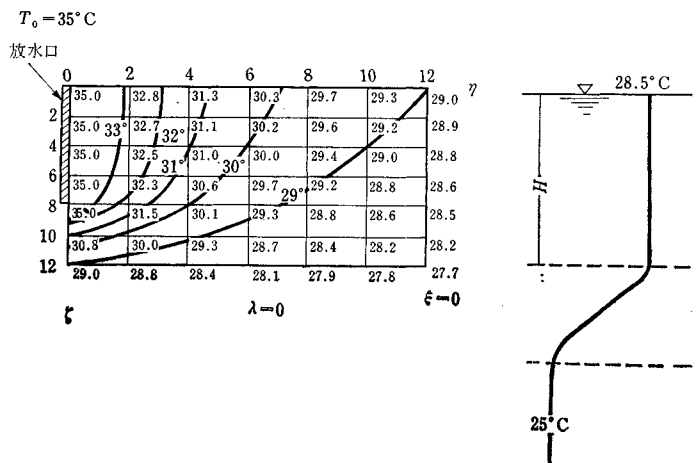


図-3 沿岸に垂直な $\eta(y)$ 軸に沿う水温の鉛直分布

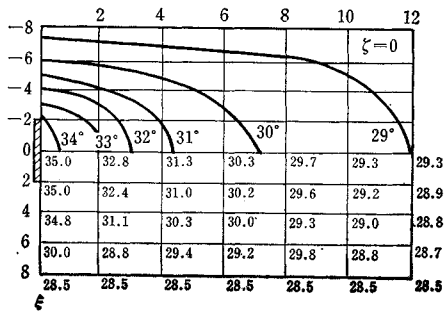


図-4 表面および $\zeta=4$ 層における水温の水平分布

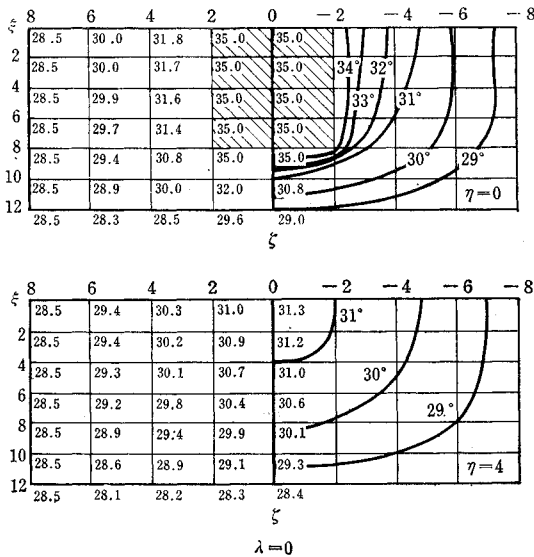


図-5 沿岸に平行した各断面での水温の鉛直分布

(2) 差分によらない方法

一様な乱流場の拡散を求めるためには、上記のようにもとの方程式を差分化して数値的に解くことが一般的であるが、差分式の計算上の安定性や収束性などの問題が生ずるし、また、流れの場のほかに乱流拡散係数を与えなければならない。この不確定さは乱流そのものをシミュレートすれば除くことができる。ここでは微分方程式

を用いず、直接流体の乱流運動をシミュレートして拡散問題を解くことを考える。乱流の問題にモンテカルロ法を応用するときには、現象が単にある確率分布に従う不規則現象であることのほかに、相関やスペクトルなどの統計的規則性の存在することを銘記すべきである。

a) 平面二次元のランダム・ウォーク⁴⁾

粒子が格子点上を1格子ずつランダムに動くとする。粒子が格子点 (i, j) にある粒子は次の時間ステップにまわりの4つの格子点 $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$ にジャンプしうる。このときの遷移の確率が、すべて同等であると仮定すると、確率はすべて $1/4$ となる。また、粒子は過去の運動の径路に無関係に次のステップを選ぶことができるものとすれば、原点 $(0, 0)$ から出発した粒子が s ステップで格子点 (i, j) に達する確率は $P_r(i, j; s)$ である。一方、 $(s+1)$ ステップで格子点 (i, j) に達するには s ステップでまわりの4つの格子点に達してはならない。そして、この4つの格子点のおのおのから点 (i, j) に到達する確率は $1/4$ であるから、次の差分方程式が成立する。

$$P(i, j; s+1) = (1/4) \{P(i+1, j; s) + P(i-1, j; s) + P(i, j+1; s) + P(i, j-1; s)\}$$

となる。これを書きかえると

$$P(i, j; s+1) - P(i, j; s) = (1/4) \{[P(i+1, j; s) - 2P(i, j; s) + P(i-1, j; s)] + [P(i, j+1; s) - 2P(i, j; s) + P(i, j-1; s)]\}$$

となり、これは $K=1/4$ とした拡散方程式

$$\partial P / \partial t = K(\partial^2 P / \partial x^2 + \partial^2 P / \partial y^2)$$

の差分式に対応している。

b) 二次元水路のなかの層流拡散⁵⁾

水路の中心線上で瞬間点源放出を行なった場合を考える。流れの場を図-6のように間隔 Δx , Δy の格子で分割する。分子のランダム運動の1行程の長さを L とすれば、流体粒子の位置座標は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + L_x + u_i \\ y_{i+1} &= y_i + L_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 u_i は中心線から y_i の距離での x 方向の流れで

$$u_i = U(1 - y_i^2 / B^2) \dots \dots \dots (6)$$

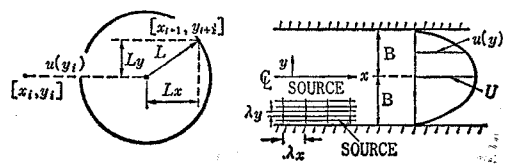


図-6 二次元水路の拡散シミュレーションの方法

である。ここに、 U :水路中心の流速,
 B :水路の半幅。

L_x, L_y は分子の不規則運動による移動の x, y 成分で、その方向性がまったくランダムであるとするれば

$$L_x = \frac{\alpha L}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}$$

$$L_y = \frac{\beta L}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}$$

と表わされる。 α, β は座標を表わす乱数である。合同式法に基づく擬似乱数を用いて -9 から $+9$ までの 19 個の整数から抽出した 360 ($=19^2-1$) 個の等しい確率をもつ組合せが考えられた。

ただし、 $\alpha=\beta=0$ の場合は除くものとする。

拡散源に $S=3000$ 個の粒子があるとき、各時間ステップごとに、これらの粒子を上述の方法で移動して粒子雲の広がり状態を求めることができる。図-7 は、 $U=3$ の場合の各格子内の粒子数 s_i を示すものである。

格子内の濃度は、粒子数を格子面積 $A_i (= \lambda_x \cdot \lambda_y = 5 \times 1)$ で割れば、求められる。

c) 乱れの一様場のなかの粒子運動のシミュレーション

運動のスケールが慣性小領域内にあることを仮定するとき(粘性の影響が無視できる)、流速分布は時間ステップと初期の速度のみによって決まることを意味する。乱れは時間的に定常・空間で一様であり、主流方向の粒子流速がその方向の平均流速 \bar{u} に関して正規分布しているものと仮定する。粒子が u と $(u+du)$ の範囲内にある確率は次式で表わされる。

$$P(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_u} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\bar{u}}{\sigma_u}\right)^2\right] du \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 σ_u : 乱流場におけるすべての粒子の流速成分の標準偏差。代表的な粒子の初期流速成分 u_0 は

$$u_0 = \bar{u} + n_0 \cdot \sigma_u \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。ここに、 n_0 は標準偏差が 1、平均値が 0 となる正規分布した 1 組の数からランダムに抽出した乱数である。また、 u_0 と (u_0+du_0) の間の初期流速をもつ粒子が時刻 τ で u_τ と $(u_\tau+du_\tau)$ の間の流速をもつ確率は $P(u_\tau, u_0) du_\tau \cdot du_0$ である。このとき、時刻 τ で粒子が u_τ と $(u_\tau+du_\tau)$ との間にある流速をもつ確率は

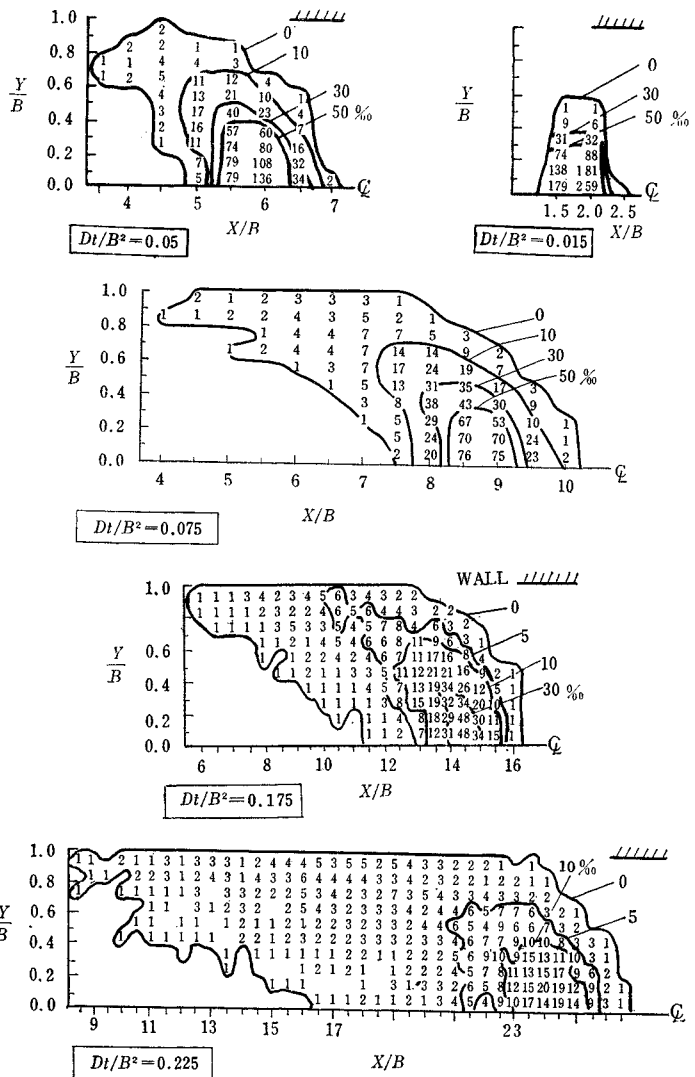


図-7 等濃度線

$$P(u_\tau, u_0) du_\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(u_0) \cdot P(u_\tau, u_0) du_0 \right] du_\tau \quad \dots\dots\dots(9)$$

と与えられる。式(9)から、 $P(u_\tau, u_0)$ は次式を満足する。

$$P(u_\tau, u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\tau} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_\tau - \{p_\tau(u_0 - \bar{u}) + \bar{u}\}}{\sigma_\tau}\right)^2\right] \quad \dots\dots\dots(10)$$

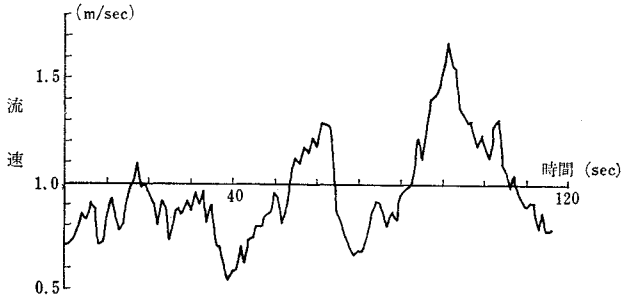
ここに、

$$p_\tau^2 = (\sigma_u^2 - \sigma_\tau^2) / \sigma_u^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

式(10)から、時刻 $i\tau$ での粒子の流速は次式から求められる。

$$u_{i\tau} = \{(1-p_\tau)\bar{u} + p_\tau u_{(i-1)\tau}\} + n_i \sigma_\tau \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $u_{i\tau}, u_{(i-1)\tau}$: それぞれ時刻 $i\tau, (i-1)\tau$ での



($\epsilon=0.01 \text{ m}^2/\text{sec}^3$, 粒子速度の平均値および標準偏差は 1.0 m/sec)

図-8 乱れ場における粒子速度の経時変化

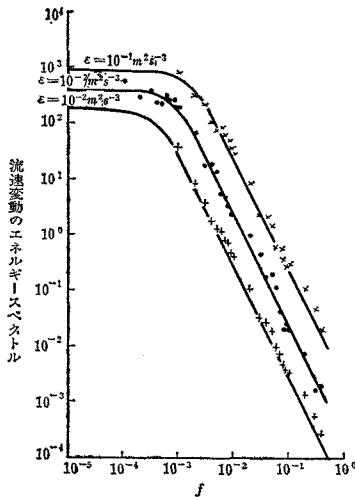


図-9 粒子運動のパワースペクトル

粒子速度, n_i : 正規分布した組からランダムに抽出した乱数である。

Jonas, P.R. らは、上述の特性をもつ乱れ場における粒子の動きの様子は式 (8), (12) によって求められることを導いた⁶⁾。ここで、 p_τ は式 (10) の関係式から

$$p_\tau = \exp(-\epsilon\tau/2\sigma_u^2) \dots\dots\dots(13)$$

で表わされることを示した。小さい τ の値に対しては、 $p_\tau \approx 1 - \epsilon\tau/2\sigma_u^2$ である。 ϵ はエネルギー逸散率を表わす。

また、 σ_τ^2 は式 (11) から

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_u^2 \{1 - \exp(-\epsilon\tau/\sigma_u^2)\} \dots\dots\dots(14)$$

となり、小さい τ の値に対して $\sigma_\tau^2 = \epsilon\tau$ である。

シミュレーション手法は、合同式法によって実施された。

図-8 は、 $u=1 \text{ m/sec}$ のときの 1 つの粒子の流速のシミュレーションの結果である。計算ステップは 1 秒である。その結果、流速のパワースペクトルは 図-9 に示すように $E(f) \propto f^{-2}$ の関係になり、一様な乱れ場における乱流理論の与える結果と一致している。

d) 乱流拡散⁷⁾

本来、未確定要素である乱流拡散の解明には、モンテカルロ法によるシミュレーションはいつそうふさわしいといえる。この場合には、1.(1) の層流拡散の場合と異なり、単純な酔歩モデルではなく、種々の周期・寿命時間の渦の集合をモデル化する必要がある。

図-10 は一様な乱流場での拡散のシミュレーションの結果の一例で、点源から放出された粒子の運動を追跡したものである。

点源の近くでは拡がり幅 σ が到達時間 t に比例し、時間がたつにつれ、 $\sigma \propto \sqrt{t}$ となっており、Taylor の乱流理論の解と一致した結果を与えることがわかる。

(和田)

2. 高 潮

(1) 水理現象のコンピューター実験

土木技術者が実際の河や海の問題にたずさわる場合、学校で学んだ水理学・河川工学・海岸工学の公式や計算式のみで設計が完了するとは限らない。実際にはいろいろとこみ入った条件が入ってきて基本方程式はたてられるが、その具体的な解を求めるのは大変だといふ場合が多いと思われる。

こうした場合には、模型実験を行なってそれに基づいて設計をするわけである。しかし、すべての問題は必ずしも模型実験で解決できるというわけではない。ある場合には相似律を十分に満たすことができないであろうし、ある場合には模型の大きさの制約上、境界条件を実物と同じようにできないであろう。模型実験には実際の現象を縮小して見ているという安心感があるが、人手・模型制作費・実験時間・場所などの制約を受ける。他

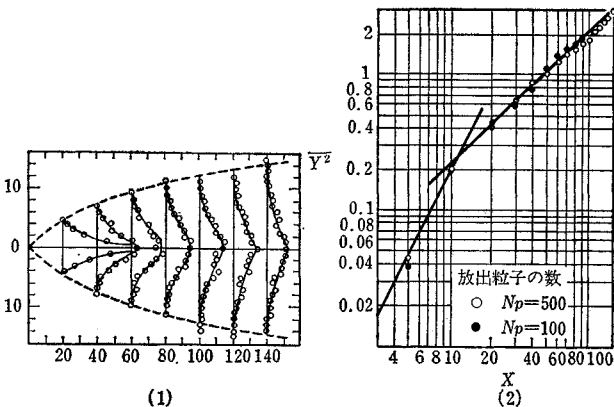


図-10 モンテカルロ法による乱流拡散の数値実験

方、コンピューターによる計算では(拡散の直接的シミュレーション<ランダムウォークの応用>などの場合のほかは)、現象を記述する方程式が確立されていることが必要であり、現象の物理的メカニズムを解明しようという場合にはコンピューターは無効である。

コンピューターによる数値実験は、もともとイギリスの気象学者リチャードソンが1930年代に模型による再現不可能な気象変化も、単純な物理法則に支配される自然現象であるとの確信に基づいて行なったのが最初である。もちろん、電子計算機ではなく、手回しの計算機で行なわれた。数値計算理論の未発達のため、彼の大変な努力にもかかわらず結果は失敗であった。しかし彼の哲学の正しさはコンピューターの驚くべき発達をみた現在、みごとに立証されている。水理現象も気象現象と同じく、物理学(流体力学)の法則に従う自然現象であり、多くの場合にコンピューターが威力を発揮する。この場合にも、流体力学の基礎方程式(Navier-Stokes方程式と連続方程式)をそのまま解くのではなく、計算機の記憶容量・計算時間・計算理論などの諸条件を考慮して、基礎方程式に適当な処理や変形を行なうのが得策である。

流体力学のコンピューター実験はディスプレイ装置の発達とあいまって、種々の問題について、みごとな成果をあげている⁹⁾。

(2) 津波の計算理論

a) 基礎方程式

運動方程式と連続の方程式を水深方向に積分し、東西方向(x)と南北方向(y)の流速成分をそれぞれ U, V とする。また、水深を $h(x, y, t)$ 、水位上昇量を $\zeta(x, y, t)$ 、海底の隆起量を ζ_0 とすれば⁹⁾

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{M}{(h+\zeta-\zeta_0)} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{N}{(h+\zeta-\zeta_0)} \frac{\partial M}{\partial y} = -g(h+\zeta-\zeta_0) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_b^{(x)}}{\rho_w} \dots (15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{M}{(h+\zeta-\zeta_0)} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{N}{(h+\zeta-\zeta_0)} \frac{\partial N}{\partial y} = -g(h+\zeta-\zeta_0) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_b^{(y)}}{\rho_w} \dots (16)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = -\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \dots (17)$$

となる。ここに、 $M=UH$ 、 $N=VH$ 、 $H=h-\zeta_0+\zeta$ 、海底摩擦応力 τ_b は

$$\vec{\tau}_b = \rho_w r_b^2 |\mathbf{V}| \mathbf{V} \dots (18)$$

ここに、 ρ_w : 水の密度、 r_b^2 : 摩擦係数、 \mathbf{V} : 流速ベクトルである。なお、流体間の水平方向の摩擦応力 $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$ は無視してある。

b) 境界条件(とくに洋上境界)

差分式を解く場合に、計算領域の境界上の M, N (あるいは ζ)の値が与えられなければならない。自然の海岸線上では

$$M=N=0 \dots (19)$$

とすればよいが、外洋境界は計算の便宜上引いたもので外的条件によりこの値を与えることができない。こうした困難さは、模型実験の場合についても同様であり、実際の現象と同じ状態が満されるよう条件式を考える必要がある。その一方法は、流速が長波の水粒子の軌道速度

$$V = \zeta \sqrt{gh} \dots (20)$$

と同じであるとして外洋境界条件を与えることである。

c) 安定な差分式

基礎方程式の解をコンピューターで求めるには、これらの方程式を差分形式に書き直す必要がある。そのため、計算領域を x, y 方向に $\Delta x, \Delta y$ の間隔で格子に区切る。時間も Δt のきざみで数えるものとし、格子番号 $(j, k) = (x/\Delta x, y/\Delta y)$ 、時間ステップ $n (=t/\Delta t)$ での変数 M, N, ζ の値をそれぞれ

$$M_{j,k}^n, N_{j,k}^n, \zeta_{j,k}^n \dots (21)$$

と記号をつける。このとき、偏微分、たとえば

$$x = j \Delta x, \quad y = k \Delta y, \quad t = n \Delta t$$

における $(\partial M/\partial x)$ は

$$\textcircled{1} (M_{j+1,k}^n - M_{j-1,k}^n)/2 \Delta x \quad (\text{中央差分})$$

$$\textcircled{2} (M_{i+1,k}^n - M_{j,k}^n)/\Delta x \quad (\text{前進差分})$$

$$\textcircled{3} (M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n)/\Delta x \quad (\text{後進差分})$$

$$\textcircled{4} [(M_{j+1,k}^{n+1} - M_{j-1,k}^{n+1}) + (M_{j+1,k}^n - M_{j-1,k}^n)]/4 \Delta x$$

など、さまざまな差分表示ができる。どのような差分表示が望ましいかは、差分表示に書直した基礎方程式の遷移行列の固有値に基づく計算安定理論の結果によらなければならない。不適当な差分表示の場合には、差分による計算が真値に収束しなかったり、振動発散現象を起してしまうので注意が必要である。この計算安定理論については参考文献にゆずることにするが、津波計算については、次のような差分式が安定であることが証明されている。

$$M_{j,k}^{n+2} = \frac{1}{\left[1 + \frac{c}{2} d(x, y) \sqrt{(M_{j,k}^n)^2 + (N_{j,k}^n)^2} \right]} \cdot \left[M_{j,k}^n - a(x, y) (\zeta_{j+1,k}^{n+1} - \zeta_{j-1,k}^{n+1}) - \frac{c}{2} d(x, y) M_{j,k}^n \cdot \sqrt{(M_{j,k}^n)^2 + (N_{j,k}^n)^2} - I_M \right] \dots (22)$$

$$N_{j,k}^{n+2} = \frac{1}{\left[1 + \frac{c}{2} d(x, y) \sqrt{(M_{j,k}^n)^2 + (N_{j,k}^n)^2} \right]}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[N_{j,k}^n - a(x,y)(\zeta_{j,k+1}^{n+1} - \zeta_{j,k-1}^{n+1}) \right. \\ & \left. - \frac{c}{2} d(x,y) N_{j,k}^n \right. \\ & \left. \cdot \sqrt{(\bar{M}_{j,k}^n)^2 + N_{j,k}^n} - I_N \right] \dots\dots (23) \\ \zeta_{j,k}^{n+3} &= \zeta_{j,k}^{n+1} - \zeta_{0j,k}^{n+3} + \zeta_{0j,k}^{n+1} \\ & + e \{ M_{j+1,k}^{n+2} - M_{j+1,k}^{n+2} + N_{j,k+1}^{n+2} - N_{j,k-1}^{n+2} \} \\ & \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} a(x,y) &= g(h + \zeta - \zeta_0) \Delta t / \Delta s, \\ c &= 2 \Delta t / \Delta s, \\ d(x,y) &= \rho_w \tau b^2 / (h + \zeta - \zeta_0)^2, \\ e &= \Delta t / \Delta s. \end{aligned}$$

また、 I_M, I_N は式(15)、(16)の非線形項

$$M \frac{\partial M}{\partial x}, N \frac{\partial N}{\partial y}, M \frac{\partial N}{\partial x}, N \frac{\partial M}{\partial y}$$

の差分形式で M, N の正負により違った式となる。

いま簡略化のために

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t) \dots\dots\dots (25)$$

を考えると、ごく単純に差分化した

$$\frac{u_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + f_i^n \dots\dots\dots (26)$$

は計算不安定となるが、 a の正負により前方差分・後方差分をとれば計算は安定である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + f_i^h \\ & \text{(前方差分, } a \geq 0) \\ \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{\Delta t} &= a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + f_i^n \\ & \text{(後方差分, } a < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

これは計算安定理論から導かれる結論であり、 I_M, I_N の形は、この結果に従って M, N の正負により式形が異なる¹⁰⁾。

d) 安定条件

前項に述べた偏微分方程式の式形の安定性の検討の際に、計算の格子間隔 ($\Delta s = \Delta x$ また Δy) と時間間隔 Δt との間にも計算を安定にすすめるための条件として

$$\Delta s / \Delta t \geq \sqrt{2gh_{\max}} \dots\dots\dots (28)$$

が出てくる (ここに、 h_{\max} : 計算領域の最大水深)。この条件は Courant-Friedrichs-Lewy の判定条件と呼ばれている。

e) 平滑化

このようにして求められた流量束 M, N , 水位上昇くには、本来連続量であるものを離散化したことにより、また、計算機の有効桁数の関係上計算誤差が集積する。そこで、格子間隔よりも波長の短い意味のない変動を数値フィルターにより切り捨て、誤差の増幅・伝播を除く

必要がある。数値フィルターとしてよく用いられるのは周囲4点との加重平均で、時間ステップ m ごとに行なう。

$$\begin{aligned} [M_{j,k}^m] &= \alpha M_{j,k}^m + \frac{1-\alpha}{4} \{ M_{j+1,k+1}^m + M_{j+1,k-1}^m \\ & + M_{j-1,k+1}^m + M_{j-1,k-1}^m \} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここに、 α は平滑化係数で $0 < \alpha \leq 1$ の間の値である。

(3) 津波計算の実際^{11), 12), 13)}

上に述べた計算理論だけを読まれた方は、おそらく計算式(22)~(24)をみて、こんな面倒なのはとても手に負えない、専門家に頼まざるを得ないと考えるのではないだろうか。しかし、実は意外に簡単で、単純なルールに従う計算の繰り返し——まさにコンピューター向きの仕事なのである。

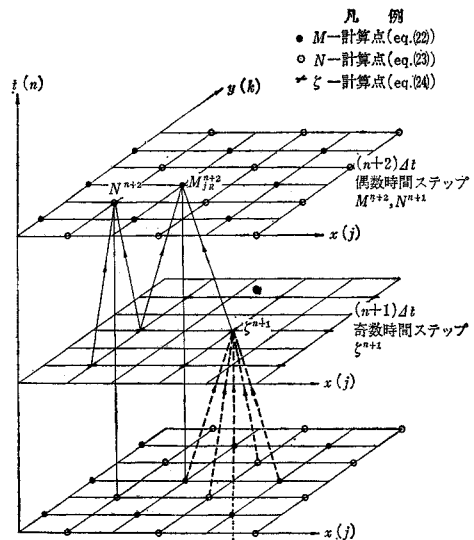


図-11 計算のすすめ方

まず、式(22)~(24)を見ると計算に必要な変数は

- ① 時間ステップ偶数 (n または $n+2$) $M_{j,k}, N_{j,k}$
- ② 時間ステップ奇数 ($n+1$ または $n+3$) $\zeta_{j,k}$

である。つまり、水位 ζ と流量束 M, N は時間的には1ステップ置きでよいのである。また、すべての時間ステップ n についての量を記憶しておく必要はなく、最新の2ステップ分だけが計算上使われるのであり、それ以前の値は水位上昇・流量束を取りだしたい地点・時間でのみ MT (磁気テープ) に書き込めばよい。したがって

$$\begin{aligned} M_{j,k}^n &\rightarrow M(J, K, 1) \\ M_{j,k}^{n+2} &\rightarrow M(J, K, 2) \\ \zeta_{j,k}^{n+1} &\rightarrow ZETA(J, K, 1) \\ \zeta_{j,k}^{n+3} &\rightarrow ZETA(J, K, 2) \end{aligned}$$

のように配列名をつければよい。

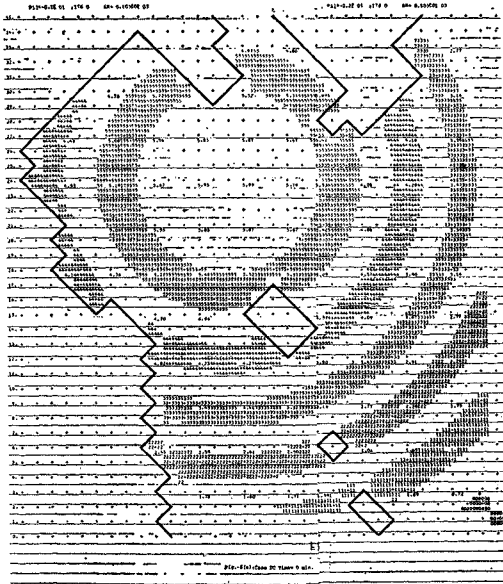
さらに、式(22)~(24)をよくみてみると (慣性項 $I_M,$

I_N を無視しうる場合には), M あるいは N についての差分は, M については j -方向のみ, N については K -方向のみである。また, κ は 1 ステップ前のその点を除く周囲 4 点の M または N の値; M (あるいは N) の計算にはやはり 1 ステップ前のその点を除く周囲 4 点の κ のみが必要である。したがって, すべての格子点で κ , M , N の値を求める必要はなく, 1 メッシュ置きに互い違いにこれらの値を——たとえば κ (あるいは M, N)

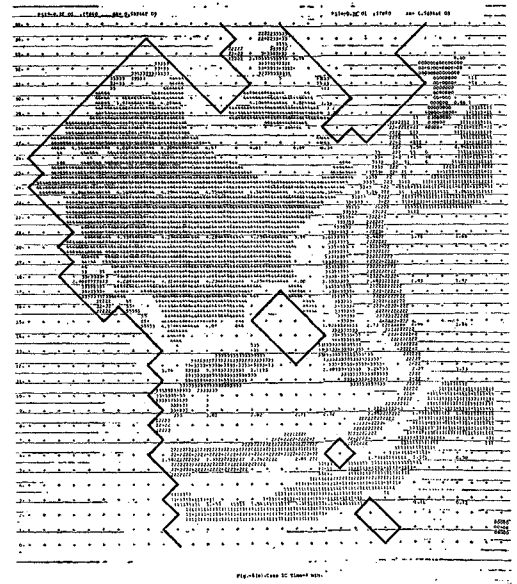
は 1 ステップ前の周囲 4 点 M, N (あるいは κ) と 2 ステップ前の κ (あるいは M, N) の値から計算すればよい (図—11)。

境界格子点では, 式(22)~(24)の代わりに, 境界条件(19)または(20)を用いればよい。

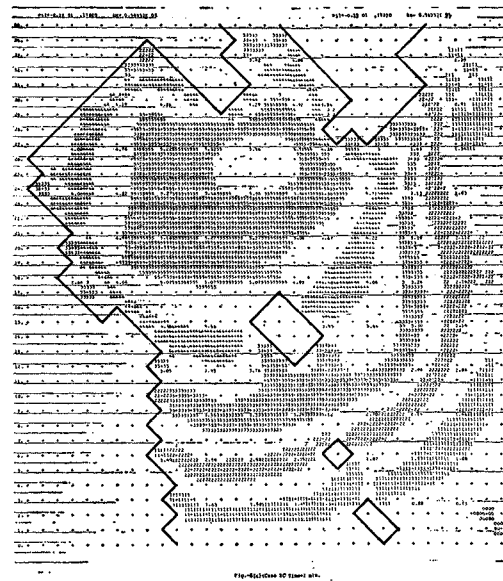
以上のことから, 津波計算の基本的骨格は, 次のような単純なプログラムとなる。



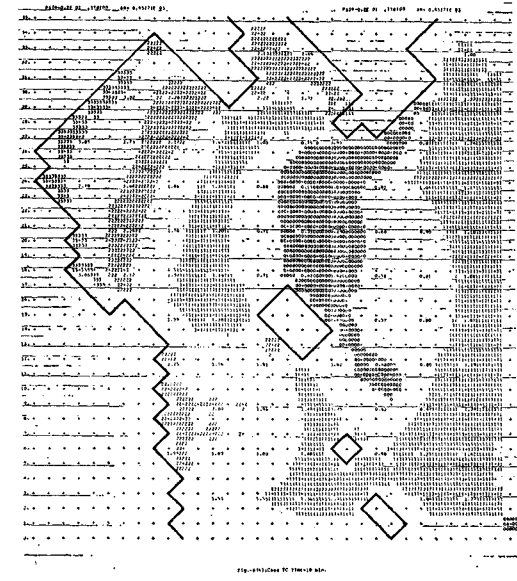
(1) 0 min.



(3) 4 min.



(2) 2 min.



(4) 10 min.

図—12 津波の変形と伝播の例

C *** COMPUTER EXPERIMENT OF
TSUNAMI-TIDE

ディメンション
(専用メモリー
確保)

定数・データの
読み込み

初期条件の計算

(奇・奇)格子点
での流量束の計
算(偶数時間ス
テップ)

(偶・偶)格子点
での水位上昇の
計算(奇数時間
ステップ)

時間ステップに
関するメモリー
の入れ替え(不
要の計算値を消
し、新しい計算
値のためのメモ
リー確保)

計算進行のチェ
ック

```

DIMENSION ZETA (50, 50, 2),
*M(50, 50, 2), N(50, 50, 2)
CÔMMÔN ZETA, M, N

CALL CONST
T=0

CALL INITIL

1 DÔ 100 J=1, JMAX, 2
DÔ 100 K=1, KMAX, 2
IF(LBD(J,K)·EQ·0)CALL BÔUND
IF(LBD(J,K)·NE·0)CALL MNCAL
100 CÔNTINUE

T=T+DT
DÔ 200 J=2, JMAX, 2
DÔ 200 K=2, KMAX, 2
IF(LBD(J,K)·NE·0)CALL ZETCAL
200 CÔNTINUE

CALL ÔUTPUT
DÔ 300 J=1, JMAX, 2
DÔ 300 K=1, KMAX, 2
M(J, K, 1)=M(J, K, 2)
N(J, K, 1)=N(J, K, 2)
ZETA(J+1, K+1, 1)
      =ZETA(J+1, K+1, 2)
300 CÔNTINUE

T=T+DT
IF(T·LT·TMAX) GÔ TÔ 1
STOP
END
    
```

ここに、LBD(J, K) : 格子点 (J, K) が境界点か否かの読み込みデータ、境界点ならば LBD(J, K) = 0
 BÔUND : 式 (19) または式 (20) により境界格子点での M, N を求めるサブルーチン
 MNCAL : 式 (22), (23) により流量束 MN を

求めるサブルーチン

ZETCAL : 式 (24) により水位上昇 ζ を求めるサブルーチン

DT : 時間差分 Δt

TMAX : 現象を追跡する最大時間。

図-12 に示す一連の図は、地震により海底が瞬間的に隆起した場合の津波の変形と伝播の計算結果である。この図は、電子計算機のライン プリンターによる作図で、等水位上昇高をそのメートル位の値で帯状に打ちだしてある。+印は格子点、+印の下の数値は適当な間隔でサンプルした点の水位上昇高を m 単位で示している。

図-12 の計算例は、神奈川県への依頼による地震津波の研究結果を利用した。ここに謝意を表する。

(日野)

参 考 文 献

<拡 散>

- 1) 日野幹雄：排煙濃度分布に関する数値解析、I-差分近似による方法、電研報告 No. 65058, 1966.
- 2) 和田 明：冷却水放水に伴う流動と熱拡散現象、電研報告 No. 66033, 1966.
- 3) 伊藤 剛：数値解析法講座、基礎編「偏微分方程式」、土木学会誌、57-2. 1972.2
- 4) 近藤次郎：応用数学(下)、丸善、1965.
- 5) Bugliarello, G. & Jackson, E.D. : Random walk study of convective diffusion, Jour. ASCE, 1964.
- 6) Jonas, P.R. & Bartlett : The numerical simulation of particle motion in a homogeneous field of turbulence, Jour. Comput. Phys. 9, 1972.
- 7) 日野幹雄：モンテ・カルロ法による乱流拡散の二、三の計算について、土木学会第9回水理講演会講演集、1965.

<高 潮>

- 8) 日野幹雄：コンピューターと流体力学、土木学会誌 56-11 1971.11
- 9) 伊藤・日野・渡辺・日野：数値模型による東京湾横断堤の防潮効果に関する研究、第11回海岸工学講演会講演集、土木学会、1964.
- 10) 伊藤・渡辺・平本・日野：高潮計算における二、三の問題点について、第8回水理講演会講演集、土木学会、1963.
- 11) 相田 勇：1923年関東地震津波の数値実験、東大・地震研究所彙報、Vol. 48, 1970.
- 12) 伊藤・日野：東京湾近海における地震にともなう津波の特性について、東京都防災会議、1970.
- 13) 伊藤・日野：相模湾の地震による津波についての数値計算、神奈川県、1972.

土木学会トンネル工学委員会・沈埋トンネル小委員会 編集

沈埋トンネル要覧

B 5 188 ページ

2 000 円 (〒 140 円)

申込先：〒 160 東京都新宿区四谷1丁目 土木学会刊行物頒布係または書店

Tel. 351-4131 (直) 振替 東京 16828

主 要 目 次

- | | | |
|-----------|------------------|--------------|
| 第1編 総論 | 1.1 水底トンネル建設工法概説 | 1.2 沈埋トンネル概説 |
| | 1.3 沈埋工法の2大方式 | |
| 第2編 計画と調査 | 2.1 予備検討 | 2.2 調査 |
| 第3編 設計 | 3.1 沈埋かんの設計 | 3.2 取付部の設計 |
| 第4編 施工 | 4.1 沈埋かんの製作 | 4.2 トレンチ |
| | 4.3 基礎工 | 4.4 沈設・接合作業 |
| | 4.5 埋戻しと内部仕上げ | |