

# 数値解析法講座 7

## 応用編

### 変形応力解析 (I)

大地羊三\*

#### 1. はりの問題と常微分方程式

##### (1) 軸力を受けるはり

軸力を受けるはりの釣合条件式は

$$\frac{dN}{dx} = -p_u(x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

であり、変形条件式は

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし、 $N$  は軸力、 $u$  は軸方向の変位、 $p_u(x)$  は軸方向を向く分布荷重、 $A$  は断面積、 $E$  はヤング係数とする。式 (1)、(2) から  $N$  を消却すると、軸力を受けるはりの微分方程式が次のように得られる。

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = -p_u(x) \quad \dots\dots\dots (3)$$

とくに等断面のはりの場合、上式の解は

$$\begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x/EA \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ N_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0(x) \\ N_0(x) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ただし、 $u_a, N_a$  ははりの左端 ( $a$  端と呼ぶことにする) の軸方向変位および軸力であり、 $u_0(x), N_0(x)$  は次式で計算される量である。

$$u_0(x) = \frac{-1}{EA} \int_0^x (x-\xi) p_u(\xi) d\xi,$$

$$N_0(x) = - \int_0^x p_u(\xi) d\xi$$

##### (2) 横荷重を受けるはり

釣合条件式は

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p_v(x) \quad \dots\dots\dots (5)$$

変形条件式は

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。ただし、 $M$  は曲げモーメント、 $v$  ははり軸に

直角方向の変位、 $p_v(x)$  は  $v$  方向を向く分布荷重、 $I$  は断面二次モーメントとする。式 (5)、(6) から  $M$  を消却すると、横荷重を受けるはりの微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = -p_v(x) \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。とくに等断面の場合、上式の解は

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -x^2/2EI & -x^3/6EI \\ 0 & 1 & -x/EI & -x^2/2EI \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ \theta_a \\ M_a \\ S_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0(x) \\ \theta_0(x) \\ M_0(x) \\ S_0(x) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、 $v_a, \theta_a, M_a, S_a$  は  $a$  端のたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力であり、 $v_0(x) \sim S_0(x)$  は次式で計算される量である。

$$v_0(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6EI} p_v(\xi) d\xi,$$

$$\theta_0(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2EI} p_v(\xi) d\xi$$

$$M_0(x) = - \int_0^x (x-\xi) p_v(\xi) d\xi$$

$$S_0(x) = - \int_0^x p_v(\xi) d\xi$$

##### (3) ねじり荷重を受けるはり

釣合条件式は

$$\frac{dT}{dx} = -m_u(x) \quad \dots\dots\dots (9)$$

変形条件式は

$$T = GJ \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx} \left( EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。ただし、 $T$  はねじりモーメント、 $\varphi$  はねじり角、 $m_u(x)$  はねじり荷重、 $J$  はねじり定数、 $C_w$  は曲げねじり定数、 $G$  はせん断弾性係数とする。式 (10) は次のように分けて取扱うほうが便利なることもある。

$$T_s = GJ \frac{d\varphi}{dx} \quad T_w = - \frac{d}{dx} \left( EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$T_s$  はサンバナン(St. Venant)のねじりモーメント、 $T_w$  はワグナーのねじりモーメント(あるいは二次ねじりモーメント)と呼ばれており、これらの和が全ねじりモーメントになる ( $T = T_s + T_w$ )。

式 (9)、(10) から  $T$  を消却すると

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EC_w \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\varphi}{dx} \right) = m_u(x) \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られ、等断面の場合の上式の解は、 $\beta^2 \equiv GJ/EC_w$  とすると、次のようになる。

\* 正会員 工博 法政大学教授 工学部土木工学科

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ T_s \\ M_w \\ T_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x/GJ & -(Ch\beta x - 1)/GJ & -(Sh\beta x - \beta x)/\beta GJ \\ 0 & 1 & -\beta Sh\beta x & -(Ch\beta x - 1) \\ 0 & 0 & Ch\beta x & Sh\beta x/\beta \\ 0 & 0 & \beta Sh\beta x & Ch\beta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ T_{s0}(x) \\ M_{w0}(x) \\ T_{w0}(x) \end{pmatrix} + \dots \dots \dots (13)$$

ただし、 $M_w$  は曲げねじりモーメント ( $M_w = -EC_w d^2 \varphi / dx^2$ )

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= -l \int_0^x \frac{Sh\beta\xi - \beta\xi}{\beta l GJ} m_u(x-\xi) d\xi & T_{s0} &= \int_0^x (Ch\beta\xi - 1) m_u(x-\xi) d\xi \\ M_{w0}(x) &= -l \int_0^x \frac{Sh\beta\xi}{\beta l} m_u(x-\xi) d\xi & T_{w0} &= - \int_0^x Ch\beta\xi m_u(x-\xi) d\xi \end{aligned}$$

式 (13) は  $T = T_s + T_w$ ,  $\varphi' = T_s/GJ$  なる関係を用いて、次のように変形したほうが都合がよい。

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ M_w \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Sh\beta x/\beta & -(Ch\beta x - 1)/GJ & -(Sh\beta x - \beta x)/\beta GJ \\ 0 & Ch\beta x & -\beta Sh\beta x/GJ & -(Ch\beta x - 1)/GJ \\ 0 & -GJSh\beta x/\beta & Ch\beta x & Sh\beta x/\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi'_a \\ M_{wa} \\ T_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi'_0(x) \\ M_{w0}(x) \\ T_0(x) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

## 2. 剛性マトリックスによるはりの解法

### (1) 部材の剛性マトリックス

前節では、等断面のはりに種々の荷重が作用した場合の解を求めた。不等断面のはりの場合は、これを 図-1 のように等断面とみなせる範囲に分け、それぞれの区間

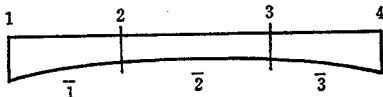


図-1 不等断面を等断面に分割する

を 1 本のはりとみなして解き、節点でつなぎ合わせればよい。節点でつなぎ合わせる方法としては、いろいろな方法が考えられる。その第一は、前節で求めた解 (式 (4), (8), (14)) をそのままの形で利用するリダクション法であり、ドイツでよく使われている。第二は節点で断面力の釣合条件式をつくり、これと三連モーメントの定理を併用する方法である。しかし、これらは本文の主流からそれるので省略し、第三の方法について説明する。

式 (8) で  $x=l$  とおいたものを、断面力について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_a \\ M_a \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ \theta_a \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ -6EI/l^2 & 2EI/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_b \\ \theta_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{fa} \\ M_{fa} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S_b \\ M_b \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} -12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 2EI/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ \theta_a \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_b \\ \theta_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{fb} \\ M_{fb} \end{pmatrix} \end{aligned} \dots \dots \dots (15)$$

が得られる。右辺の変形ベクトル ( $v_a, \theta_a$  等) の前にある行列を部材の剛性マトリックス (stiffness matrix) と呼んでいる。上式の誘導にあたって  $S_a$  と  $M_b$  の符号

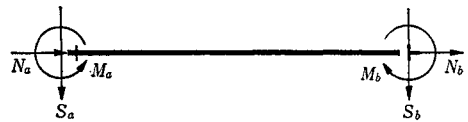


図-2 式 (15) を誘導するにあたって変えた符号と正の方向

を変え、図-2 の方向を正にした。これはたわみ角法の曲げモーメントでも採用されている符号の定義であり、変形法に特有なものと考えられる。断面力の正の方向をこのように定義することによって、節点の釣合条件式が簡単になる。また、 $S_{fa}, M_{fa} : S_{fb}, M_{fb}$  は、区間の両端を固定したとき中間に作用する荷重によって両端 ( $a, b$  端) に生ずる固定端断面力であり、次式で計算される。もちろん、正の方向は図-2 の定義に従うものとする。

$$\begin{aligned} S_{fa} &= - \int_0^l \frac{(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3} p_v(\xi) d\xi \\ S_{fb} &= - \int_0^l \frac{\xi^2(3l-2\xi)}{l^3} p_v(\xi) d\xi \\ M_{fa} &= -l \int_0^l \frac{(l-\xi)^2\xi}{l^3} p_v(\xi) d\xi \\ M_{fb} &= l \int_0^l \frac{\xi^2(l-\xi)}{l^3} p_v(\xi) d\xi \end{aligned}$$

式 (15) を簡単に次のように書くことにしよう。

$$\begin{aligned} f_a &= k_{aa} u_a + k_{ab} u_b + f_{fa} \\ f_b &= k_{ba} u_a + k_{bb} u_b + f_{fb} \end{aligned} \dots \dots \dots (15')$$

以上は横荷重を受けるはりの場合であるが、その他の荷重の場合も同じように処理できる。たとえば、軸力を受けるはりの場合は、式 (4) で  $x=l$  とおいたものを  $N_a, N_b$  について解けばよい。

$$\left. \begin{aligned} N_a &= \frac{EA}{l} u_a - \frac{EA}{l} u_b + N_{fa} \\ N_b &= -\frac{EA}{l} u_a + \frac{EA}{l} u_b + N_{fb} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

ただし

$$N_{fa} = \int_0^l \frac{l-\xi}{l} p_u(\xi) d\xi \quad N_{fb} = - \int_0^l \frac{\xi}{l} p_u(\xi) d\xi$$

軸力の正の方向は、図-2 に従うものとする。

また、ねじり荷重を受けるはりの場合は、式(14)で  $x=l$  とおいたものを  $T_a, M_{wa}, T_b, M_{wb}$  について解けばよい。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_a \\ M_{wa} \end{bmatrix} &= \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & al^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_a' \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & bl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_a' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{fa} \\ M_{wfa} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_b \\ M_{wb} \end{bmatrix} &= - \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & bl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_a' \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & al^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_b \\ \varphi_b' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{fb} \\ M_{wfb} \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし

$$\beta^2 = \frac{GJ}{EC_w}, \quad \lambda = \frac{1 - Ch\beta l}{\beta l Sh\beta l}, \quad a = \frac{1}{\beta l} \left( \frac{Ch\beta l}{Sh\beta l} - \frac{1}{\beta l} \right),$$

$$b = \frac{1}{\beta l} \left( \frac{1}{\beta l} - \frac{1}{Sh\beta l} \right)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{fa} \\ M_{wfa} \end{bmatrix} &= \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & bl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0(l) \\ \varphi_0'(l) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T_{fb} \\ M_{wfb} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_0(l) \\ -M_{w0}(l) \end{bmatrix} - \frac{GJ}{l(1+2\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda l \\ \lambda l & al^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0(l) \\ \varphi_0'(l) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式の誘導にあたって  $T_a, \varphi_a' = T_{sa}/GJ, M_{wa}, M_{wb}$  の符号が変えられている。

2種類以上の荷重が同時に作用する場合は、式(15)~(17)を適当に組合わせればよい。式(16),(17)は形式的には式(15)'の形にまとめられる。したがって、次項で説明することは、式(15)~(17)あるいはこれらを組合わせたものの、いずれにも適用できることである。

### (2) 全体の剛性マトリックス

節点での釣合条件式および変形条件式は、図-1を参照すると次のように書ける。

$$f_{bi-1} = f_{ai} = p_{pi}, \quad u_{bi-1} = u_{ai} = u_{pi} \dots\dots\dots(18)$$

ただし、 $p_{pi}, u_{pi}$  は、それぞれ  $i$  節点に作用する荷重および  $i$  節点の変形を表すベクトルである。

すべての節点で式(18)の第1式をつくり、その結果に式(15)'を代入し、上の第2式を考慮して  $a, b$  端の変形を節点の変形でおきかえると

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} k_{aa}^{(1)} & k_{ab}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{ba}^{(1)} & k_{bb}^{(1)} + k_{aa}^{(2)} & k_{ab}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{ba}^{(2)} & k_{bb}^{(2)} + k_{aa}^{(3)} & k_{ab}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{ba}^{(3)} & k_{bb}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{fa}^{(1)} + 0 \\ f_{fa}^{(2)} + f_{fb}^{(1)} \\ f_{fa}^{(3)} + f_{fb}^{(2)} \\ 0 + f_{fb}^{(3)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

が得られる。左辺の係数行列が全体の剛性マトリックスと呼ばれるものである。上式を解いて節点の変形  $u_1 \sim u_4$  が求めれば、式(18)の第2式から部材端の変形が、式(15)'から部材端の断面力が求められる。

### (3) 支点の処理および特殊な荷重項

式(19)はこのままでは解けない。その理由は、支点についての処理がなされていないからである。支点反力も節点に作用する外力の1つであるから、節点でたてた釣合条件式(式(18)の第1式)の荷重項  $p_1 \sim p_4$  の中に入っている。反力は、計算の初めには、未知数であるから、取り除く必要がある。くわしい方法については、紙面の都合で省略する。参考文献を参照されたい。

また、式(19)は作用外力を荷重項にしてつくられている。構造力学にでてくる問題は、外力が与えられる場合ばかりとは限らない。支点沈下の問題のように、与えられた変形に対する解を求めなければならない場合もある。この場合は、変形  $u_1 \sim u_4$  のうちのいずれかが既知である。既知な変形に関する項を右辺に回して解けばよい。また、温度変化やクリープ等のように内力が与えられる問題もある。この場合は、区間ごとに両端を固定して、内力による固定端断面力を求め、その値を  $f_{fa}, f_{fb}$  として用いればよい。

## 3. たわみ角法

### (1) たわみ角法の基本式

前節の剛性マトリックスによるはりの解法を骨組構造物に拡張するためには、解決しなければならない問題が2つある。その第一は節点と部材の結合状態を指示する手法の開発であり、第二は断面力および変形のベクトルの座標変換の問題である。後者は次節で説明することにし、本節では第一の問題について、一般によく知られている、たわみ角法を例に取って説明する。

はりの場合には、節点も部材も左から順番に番号をつけることにすると、どの部材がどの節点につながっているかということは一目して明らかである。任意形状をした骨組構造物の場合は、節点と部材の接続状態が簡単ではない。これをどのような表わすかということが本節の主題である。

主題に入る前にたわみ角の基本式を求めておこう。前節の式(15)で曲げモーメントに関係する式を拾いだすと、 $R = (v_b - v_a)/l$  において

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{4EI}{l} \theta_a + \frac{2EI}{l} \theta_b - \frac{6EI}{l} R + M_{fa} \\ M_b &= \frac{2EI}{l} \theta_a + \frac{4EI}{l} \theta_b - \frac{6EI}{l} R + M_{fb} \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

が得られる。これは記号こそ異なっているが、たわみ角法の基本式そのものである。剛性マトリックスを用いる方法、すなわち変形法では、部材角  $R$  を用いなくて  $v_a, v_b$  を使い、これに見合うものとして  $S_a, S_b$  の式をつくり、これらを  $M_a, M_b$  と同列に扱って表わした。これに対して、たわみ角法は、 $M_a, M_b$  だけを特別扱っているので  $v_a, v_b$  がじゃまになり、これに代わるものとして部材角  $R$  を定義したわけである。部材角  $R$  が 0 の場合を考えると、式 (20) は式 (15)、あるいは式 (15') の特別な場合と解釈できる。

## (2) 節点方程式

骨組構造物を構成している、すべての部材について式 (20) をつくり、ひとまとめにして行列の形で書く

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & K \\ K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3K \\ 3K \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} M_{fa} \\ M_{fb} \end{bmatrix} \dots (21)$$

が得られる。 $M_a, M_b, \theta_a, \theta_b, R, M_{fa}, M_{fb}$  は各部材の  $M_a \sim M_{fb}$  を任意につけた部材番号順に縦に並べたベクトルであり、 $K$  は各部材ごとにつくった  $2EI/l$  を部材番号順に対角線上に並べた対角行列である。

式 (21) のままでは全部材を束にしただけで、骨組構造物としての機能は果たしていない。骨組構造物としてまとめるには、各節点でそれに接続する部材の材端モーメントが釣合っていなければならないし、また、各節点の変形とそれに接続する部材の材端の変形が等しくなければならない。すなわち、節点の釣合条件式

$$\sum_{(m)} \alpha_{jm} (M_a)_m + \sum_{(m)} \beta_{jm} (M_b)_m = (m_p)_j \quad (j=1 \sim n_p) \dots (22a)$$

および節点の変形条件式

$$(\theta_a)_m = \sum_{(j)} \alpha_{jm} (\theta_p)_j, \quad (\theta_b)_m = \sum_{(j)} \beta_{jm} (\theta_p)_j \quad (m=1 \sim n_m) \dots (22b)$$

を満足しなければならない。 $(m_p)_j$  は  $j$  節点に作用するモーメント荷重、 $(\theta_p)_j$  は  $j$  節のたわみ角、 $\alpha_{jm} (\beta_{jm})$  は  $m$  部材の  $a$  端 ( $b$  端) が  $j$  節点に接続しているとき 1、その他の場合は 0 となる符号である。また  $n_p, n_m$  は、それぞれ節点および部材の数とする。

式 (22) を要領よくまとめるには、 $\alpha_{jm}, \beta_{jm}$  を行列で表わすのがよい。図-3 のラーメンを例に取って説明しよう。まず部材と節点に番号をつける。つけ方は任意でよい。また、各部材には  $a, b$  端の区別をつけ、 $a$  端を左、 $b$  端を右にしたとき上から下に向う荷重を正とする。図では  $a$  端に + の記号をつけて、 $b$  端と区別することにした。この構造物の  $\alpha_{jm}, \beta_{jm}$  を行列の形で書くと表-1, 2 のようになる。 $\alpha, \beta$  は 0 と 1 だけでできている行列なので、欧米では Boolean matrix と呼ばれているが、構造物の形状をあらわす行列であるから形状行列と呼ぶほうがよい。

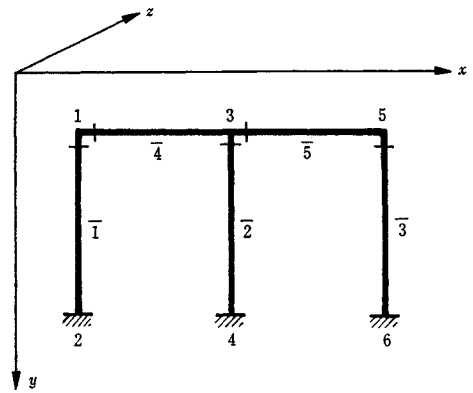


図-3 ラーメンの一例

表-1  $\alpha_{jm}$  の行列 ( $\alpha$ )

$\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	1			1	
2					
3		1			1
4					
5			1		
6					

表-2  $\beta_{jm}$  の行列 ( $\beta$ )

$\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1					
2	1				
3				1	
4		1			
5					1
6			1		

以上のように定義した形状行列  $\alpha, \beta$  を用いると、式 (22) は次のように表わされる。

$$\alpha M_a + \beta M_b = m_p \dots (22'a)$$

$$\theta_a = \alpha^T \theta_p, \quad \theta_b = \beta^T \theta_p \dots (22'b)$$

式 (22'a) の左辺は、各節点に集まる部材の材端曲げモーメントを集計しており、式 (22'b) の右辺は  $\theta_p$  の中から各部材の  $a, b$  端が接続している節点のたわみ角を選び出している。

式 (22'a) の  $M_a, M_b$  に式 (21) を代入し、式 (22'b) を考慮すると

$$[\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} 2K & K \\ K & 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \theta_p + [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} 3K \\ 3K \end{bmatrix} R = m_p - [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} M_{fa} \\ M_{fb} \end{bmatrix} \dots (23)$$

が得られる。これでたわみ角法の節点方程式ができた。実際の計算では、形状行列  $\alpha, \beta$  をつくる必要はない。各部材の  $a, b$  端がどの節点につながっているかを示す表 (表-3) があれば十分である。

## (3) 層方程式

式 (23) は  $\theta_p$  と  $R$  を未知数として含んでいるので、方程式の数がたりない。この不足分を補うために層方程式

表-3

部材	a 端	b 端
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	1	3
5	3	5

式が必要である。層方程式をつくるという考え方は、たわみ角法独特のものであるから、変形法だけに興味のある方はこの項を読み飛ばしてもさしつかえない。

図-4 に示すように、与えられた構造物に適当な切断

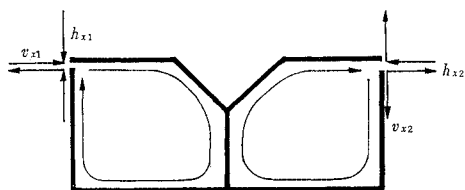


図-4 与えられた構造物に適当に切断面を入れて静定基本形式をつくる

面を入れて静定基本形式をつくる。この静定基本形式から切り出された部材(図-5)の両端に作用する断面力は、作

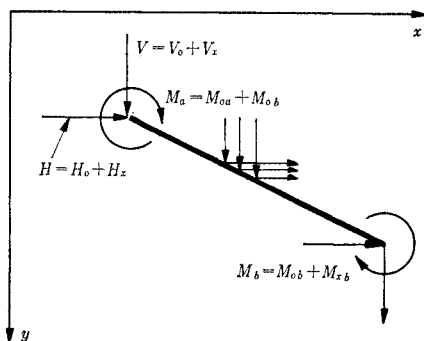


図-5 静定基本形式から切り出された部材

用外力によるもの(サフィックス0をつける)と不静定力によるもの(サフィックスxをつける)の和になっている。1本の部材のモーメントについての釣合条件式のうち、不静定力によるものは

$$M_{xa} + M_{xb} + YH_x - XV_x = 0$$

となる。実際の曲げモーメントが  $M_0$  と  $M_x$  の和であり、 $H_x$ 、 $V_x$  が不静定力  $h_x$ 、 $v_x$  で表わされることを考慮すると、すべての部材のモーメントについての釣合条件式は、次のように表わされることがわかる。

$$M_a + M_b + Y \epsilon^T h_x - X \epsilon^T v_x = M_{0a} + M_{0b} \dots (24)$$

$\epsilon$  は切断面の数だけの行と部材の数だけの列を持つ行列であり、その  $i$  行目は  $i$  断面の片側から出て反対側に至るループに含まれる部材に対応する要素が1、その他の要素が0になっているものである。式(24)の  $M_a$ 、 $M_b$

$$\begin{Bmatrix} N_a \\ S_{va} \\ M_{wa} \end{Bmatrix} = \frac{EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} AI^2/I_w & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_{wa} \end{Bmatrix} + \frac{EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} -AI^2/I_w & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{wb} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{fa} \\ S_{vfa} \\ M_{wfa} \end{Bmatrix} \dots (29)$$

$$\begin{Bmatrix} N_b \\ S_{vb} \\ M_{wb} \end{Bmatrix} = \frac{EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} -AI^2/I_w & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_{wa} \end{Bmatrix} + \frac{EI_w}{l^3} \begin{bmatrix} AI^2/I_w & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{wb} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{fb} \\ S_{vfb} \\ M_{wfb} \end{Bmatrix}$$

に式(21)を代入すると次式が得られる。

$$[3K, 3K] \begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{Bmatrix} \theta_p - 6KR + [Y \epsilon^T, X \epsilon^T] \begin{Bmatrix} h_x \\ -v_x \end{Bmatrix} = (M_{0a} + M_{0b}) - (M_{fa} + M_{fb}) \dots (25)$$

また、静定基本形の切断面は閉じていなければならないという条件から

$$\begin{Bmatrix} \epsilon Y \\ \epsilon X \end{Bmatrix} R + \begin{bmatrix} A_{hh} & A_{hv} \\ A_{vh} & A_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (26)$$

が得られる。上式の左辺の第2項は、 $H$ 、 $V$  による部材の伸び量を表わしているものであるが、たわみ角法ではこの項を省略するのが普通である。

もし  $\begin{Bmatrix} \epsilon Y \\ \epsilon X \end{Bmatrix} \delta^T = 0$  を満足する行列  $\delta$  を求めることができるならば、式(26)で左辺の第2項を省略した式の解は

$$R = \delta^T r \dots (27)$$

となる。式(25)の  $R$  に式(27)を用い、左から  $\delta$  をかけると

$$\delta [3K, 3K] \begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{Bmatrix} \theta_p - 6\delta K \delta^T r = \delta (M_{0a} + M_{0b}) - \delta (M_{fa} + M_{fb}) \dots (28)$$

が得られるが、これがたわみ角法の層方程式である。節点方程式(23)に含まれる  $R$  も式(27)を用いて変形し、これと式(28)を連立させて  $\theta_p$  と  $r$  について解けばよい。

#### 4. 変形法による骨組構造物の解法

##### (1) 平面構造物

1平面内につくられている構造物が、その構造物がつくられている平面内で変形する場合を平面構造物と呼び同じ構造物が面外に変形する場合、すなわち格子構造物と区別されている。このように平面構造物と格子構造物の区別は、構造物の形式によるのではなく、作用荷重の種類によって分けられていることに注意しなければならない。

$x$ 、 $y$  面内につくられた構造物が同じ  $x$ 、 $y$  面内に変形する場合、各部材に生ずる断面力は軸力、 $x$ 、 $y$  面内のせん断力および軸まわりの曲げモーメントである。部材端のこれらの断面力と変形の関係式は式(16)と(15)をひとまとめにしたものになる。



なものである。したがって、 $M_w$  は空間の一般力の6成分に含めることはできない。部材と節点が広がりをもって結合している場合に初めて材端の  $M_w$  が意味を持ち、その大きさは結合の状態が変わってくる。そこで、材端では  $M_w$  が  $\varphi'$  に比例するものとし

$$M_{wa} = -\frac{GJl}{1+2\lambda} \mu_a \theta_a', \quad M_{wb} = -\frac{GJl}{1+2\lambda} \mu_b \theta_b'$$

式 (17) から  $M_w$  と  $\theta'$  を消却すると右欄に示す式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} T_a \\ M_{va} \\ S_{wa} \end{bmatrix} &= \frac{EI_v}{l^3} \begin{bmatrix} GJ/EI_v & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & -6l \\ 0 & -6l & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \theta_{va} \\ w_a \end{bmatrix} + \frac{EI_v}{l^3} \begin{bmatrix} -GJl^2/EI_v & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2 & 6l \\ 0 & -6l & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_b \\ \theta_{vb} \\ w_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T}_{fa} \\ M_{vfa} \\ S_{wfa} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_b \\ M_{vb} \\ S_{wb} \end{bmatrix} &= \frac{EI_v}{l^3} \begin{bmatrix} -GJl^2/EI_v & 0 & 0 \\ 0 & 2l^2 & -6l \\ 0 & 6l & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \theta_{va} \\ w_a \end{bmatrix} + \frac{EI_v}{l^3} \begin{bmatrix} GJl^2/EI_v & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & 6l \\ 0 & 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_b \\ \theta_{vb} \\ w_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T}_{fb} \\ M_{vfb} \\ S_{wfb} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (37)$$

上式で曲げ変形は  $v$  方向ではなく  $w$  方向であることに注意しなければならない。この場合でも断面力および変形の正の方向は、右手系の座標方向と一致させる必要があるので、 $M_v$  と  $\theta_v$  の符号は式 (15) の場合の逆になっている。

一方、断面力および変形の座標変換は次のようにすればよい。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{xa} \\ M_{ya} \\ S_{za} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X/l & -Y/l & 0 \\ Y/l & X/l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ M_{va} \\ S_{wa} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \theta_{va} \\ w_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X/l & Y/l & 0 \\ -Y/l & X/l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xa} \\ \theta_{ya} \\ z_a \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

式 (37), (38) を簡単に式 (15'), (30') とおけば、あとは平面構造物の場合とまったく同じようにして節点方程式 (35) をつくり出すことができる。

### (3) 立体構造物

$x, y$  平面内につくられた構造物に、面内変形を起こす荷重と面外変形を起こす荷重が同時に作用する場合は、式 (29), (37) をひとまとめにした式を用いればよい。座標変換の式も、式 (30), (38) がそのまま利用できる。ただし、ベクトルの成分のならばは次のように変えたほうがよい。

断面力の場合： $(N, S_v, S_w, T, M_v, M_w)$

変形の場合： $(u, v, w, \varphi, \theta_v, \theta_w)$

部材が  $x, y$  平面から  $z$  軸方向にはみ出し、立体構造物の部材となった場合でも、式 (29), (37) をひとまとめにした式は、部材座標方向の成分でつくられているものであるから変更の必要はない。しかし、式 (30), (38) は平面ベクトルの座標変換を表わす式であるから、構造

$$\begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ/l & -GJ/l \\ -GJ/l & GJ/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T}_{fa} \\ \bar{T}_{fb} \end{bmatrix} \dots (36)$$

ただし、

$$J = \frac{J}{1+2\lambda} \left\{ 1 - \frac{2(a-b) + (\mu_a + \mu_b)\lambda^2}{(a+\mu_a)(a+\mu_b) - b^2} \right\}$$

$$\bar{T}_{fa} = T_{fa} - \bar{T}, \quad \bar{T}_{fb} = T_{fb} + \bar{T}$$

$$\bar{T} = \frac{\lambda/l}{(a+\mu_a)(b+\mu_b) - b^2} \{ (a-b+\mu_b)M_{wfa} - (a-b+\mu_a)M_{wfb} \}$$

式 (17) の代わりに上式を用い、これと式 (15) をひとまとめにすると次式が得られる。

物が立体になった場合は、これを立体ベクトルの座標変換を表わす式に変更する必要がある。

立体ベクトルの座標変換はオイラー角を使って表わすことができる。しかし角度は図面から拾いにくいので、部材長  $l$  およびその  $x, y, z$  軸への射影長  $X, Y, Z$  を使って表わすほうがよい。紙面のつごうで具体的な式を書くことは省略する。参考文献を参照されたい。

## 5. エネルギーの原理を用いる方法

### (1) 弾性体の微分方程式

一般に弾性体の釣合条件式と変形条件式は、行列を用いると次のように書くことができる。

$$\text{釣合条件式} \quad (d+e)\sigma + \bar{X} = 0 \dots (39)$$

$$\text{変形条件式} \quad \epsilon = (d^T - e^T)u \dots (40)$$

この2式に含まれる未知数は、応力  $\sigma$ 、ひずみ  $\epsilon$  および変形  $u$  であり、上記の2式だけでは方程式の数が足りない。これを補うものとして、応力とひずみの関係式が用いられる。この関係式は一般に  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ,  $\epsilon = \epsilon(\sigma)$  等と書けるが、とくに応力とひずみが比例する場合は

$$\text{応力とひずみの関係式} \quad \sigma = k \epsilon \dots (41)$$

となる。この応力とひずみの関係式を考慮し、次に述べる境界条件のもとに式 (39), (40) を解けばよい。境界条件には次の2種類がある。

$$\text{応力で与えられた境界条件} \quad f_v \equiv e \sigma = \bar{f}_v \dots (42a)$$

$$\text{変形で与えられた境界条件} \quad u = \bar{u} \dots (42b)$$

上に  $-$  がついている量は、既知量であることを示す。

面内荷重を受けるはりについて、上記の各式に現われ行列の内容を書くことと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & 0 \\ 0 & 0 & d/dx \end{bmatrix}, & \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} N \\ S_v \\ M_w \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ m_w \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{bmatrix} \epsilon_u \\ \tau \\ \rho \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta_w \end{bmatrix}, & \mathbf{k} &= \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\kappa & 0 \\ 0 & 0 & EI_w \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ただし、断面力の符号は変形法の流儀(図-7)に従うようにしてある。

## (2) エネルギーの原理

エネルギーの原理といわれるものには、いくつかの種類がある。まず全ポテンシャルエネルギーの原理から始めよう。前項で説明した変形条件式と変形で与えられた境界条件が常に満足されるものと仮定し、釣合条件式と応力で与えられた境界条件に微小変形をかけて積分すると、仮想仕事の原理が得られる。

$$\int \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} dV - \int \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}}_v dS_N = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

上式の  $\boldsymbol{\sigma}$  に式(41)を用い、さらに変形について積分をすると全ポテンシャルエネルギー

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon} dV - \int \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} dV - \int \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}}_v dS_N \quad \dots\dots\dots (44)$$

が得られる。 $dV$  は弾性体の実質部全体にわたっての積分を意味し、 $dS_N$  は応力で与えられた境界についての積分を意味する。以上の誘導からわかるように、全ポテンシャルエネルギーは変形およびひずみの関数であり、これを微分してつくった方程式は釣合条件式である。

逆に、釣合条件式と応力で与えられた境界条件が常に満足されるものと仮定し、変形条件式と変形で与えられた境界条件に微小な応力増分をかけて積分することも考えられる。このようにして得られた式

$$\int \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV - \int \delta \mathbf{f}_v^T \bar{\mathbf{u}} dS_u = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

を仮想力の原理と呼び、さらに式(41)を考慮して上式を応力および断面力について積分したもの\*

$$\left\{ \int \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & v \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & \kappa/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ v & -u & 1 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} N_a \\ S_{va} \\ M_{wa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_{wa} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{wb} \end{bmatrix} \\
 - \left\{ \int \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & v \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & \kappa/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ v & -u & 1 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} N_0(u) \\ S_0(u) \\ M_0(u) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{k}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV - \int \mathbf{f}_v^T \bar{\mathbf{u}} dS_u \quad \dots\dots\dots (46)$$

を全補足エネルギーと呼んでいる。 $dS_u$  は変形で与えられた境界についての積分を意味する。全補足エネルギーは応力の関数であり、これを微分して得られる式は変形条件式であることに注意しなければならない。

以上のほかにライスナーの原理、一般変分原理と呼ばれるものもあるが、本文では説明を省略する。

## (3) 曲線部材の剛性マトリックス

曲率のあまりきつくない任意形状をした曲線部材が面内荷重を受ける場合(図-7)、全補足エネルギーは次のように書ける。

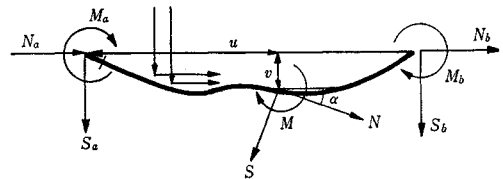


図-7 曲率のあまりきつくない任意形状をした曲線部材が面内荷重を受ける場合

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int [NS_v M_w] \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & \kappa/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ S_v \\ M_w \end{bmatrix} ds \\
 - [N_a S_{va} M_{wa}] \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_{wa} \end{bmatrix} - [N_b S_{vb} M_{wb}] \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{wb} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (47)$$

一方、力の釣合条件より任意点の断面力と \$a\$ 端の断面力の関係式を求めると

$$\begin{bmatrix} N \\ S_v \\ M_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ v & -u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a + N_0(u) \\ S_{va} + S_0(u) \\ M_{wa} + M_0(u) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (48)$$

が得られるし、全体の力の釣合条件より

$$\begin{bmatrix} N_b \\ S_b \\ M_{wb} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a + N_0(l) \\ S_{va} + S_0(l) \\ M_{wa} + M_0(l) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (49)$$

が得られる。ただし、 $N_0(u)$ 、 $S_0(u)$ 、 $M_0(u)$  は \$a\$ 点から \$u\$ 点までに作用している荷重の合力を \$a\$ 点にうつしたものである。

式(48)、(49)を式(47)に代入し、 $N_a$ 、 $S_{va}$ 、 $M_{wa}$  で微分すると、式(50)が得られる。



これを簡単に

$$\delta f_a = u_a - l u_b - \delta_0 \dots\dots\dots (50')$$

と書くことにする。上式より  $f_a$  を求めると

$$f_a = \delta^{-1} u_a - \delta^{-1} l u_b - \delta^{-1} \delta_0 \dots\dots\dots (51 a)$$

となり、これを式 (49) に代入すると

$$f_b = -l^T \delta^{-1} u_a + l^T \delta^{-1} l u_b - l^T (f_0 - \delta^{-1} \delta_0) \dots\dots (51 b)$$

が得られる。ただし、 $f_0$  は  $N_0(l)$ ,  $S_0(l)$ ,  $M_0(l)$  を縦に並べたベクトルである。式 (51) が式 (15') と同じ形をしていることは容易にわかるであろう。

本項の方法は、むろん等断面の部材、不等断面の部材あるいは面外荷重を受ける曲線部材等にも利用できる。そして、この方法の方が第 1 節の微分方程式から出発する方法よりも簡単な場合が多い。

## 6. 有限要素法

有限要素法については、本講座の変形応力解析 (II) でくわしく説明があるはずなので、ここでは変形法との関係についてだけふれることにする。

変形法では、まず骨組構造物の部材を節点で切離し、部材端の断面力と変形の関係式をつくり、次に節点の釣合条件式と変形条件式を用いて全体の節点方程式をつくりあげている。この方法を連続体に拡張したものが有限要素法であると解釈できる。変形法を連続体に拡張しようとする場合に、解決しなければならないことが二つある。一つは、骨組構造物の部材に相当する要素をどのように選ぶかということ、いま一つは、選ばれた要素の剛性マトリックスを、どのようにしてつくるかということである。

骨組構造物の場合、微分方程式から出発しても、全補足エネルギーから出発しても、正確な部材の剛性マト

リックスをつくることができた。しかし、連続体の場合は、これを支配する微分方程式は偏微分方程式なので、正確に解くことは至難のわざである。この困難さは、エネルギーから出発しても同じである。現状では近似解で満足せざるを得ない。近似解を求める方法にもいろいろあるが、最も簡単で一般的な全ポテンシャルエネルギーの原理を用いる方法について一言するにとどめる。

要素としては三角形要素を選び、その頂点で接続するものとする。まず要素内の変形を、頂点の変形の関数として次のように仮定する。

$$u = B_a u_a + B_b u_b + B_c u_c \dots\dots\dots (52)$$

全ポテンシャルエネルギーの原理を用いるわけであるから、変形が与えられれば、ひずみは次式で計算されるものでなければならない。

$$e = (d^T - e^T) u \equiv N_a u_a + N_b u_b + N_c u_c \dots\dots (53)$$

これらを式 (44) に代入し、 $u_a, u_b, u_c$  で微分すると

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} N_a^T \\ N_b^T \\ N_c^T \end{bmatrix} k [N_a N_b N_c] dV \right\} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} + \left\{ - \int \begin{bmatrix} B_a^T \\ B_b^T \\ B_c^T \end{bmatrix} X dV \right\} \dots\dots\dots (54)$$

が得られる。これが式 (15') を拡張したもの ( $u_c, f_c$  を追加したもの) であることは一目してわかるであろう。上式から全体の節点方程式をつくり上げる手法は、変形法の場合と同じである。

### 参 考 文 献

- 1) 大地：構造解析とコンピュータ，産業図書
- 2) 服部：コンピュータによる構造数値解析法，彰国社
- 3) 川股：マトリックス変位法による骨組の解析，生産研究，18-5，1966
- 4) Weaver：Computer Programs for Structural Analysis，Van Nostrand，1967；(邦訳) 山本善三訳，共立出版

コンクリート・ライブラリー 31  
PC 工法小委員会編

## OSPA 工法設計施工指針案

● B 5・106 ページ 予価 1100 円 47 年 7 月末刊行予定

コンクリート・ライブラリー 32  
PC 工法小委員会編

## OBC 工法設計施工指針案

● B 5・92 ページ 予価 1100 円 47 年 7 月末刊行予定

コンクリート・ライブラリー 33  
PC 工法小委員会編

## VSL 工法設計施工指針案

発売中

● B 5・88 ページ 定価 1000 円 会員特価 900 円 (〒 140 円)

コンクリート・ライブラリー 34  
終局強度設計方法小委員会編

## 終局強度設計方法 仮題

● B 5・158 ページ 予価 1500 円 47 年 8 月末刊行予定