精密計算とは何であろうか

前田幸雄*

1. まえがき

筆者がかつてアメリカのスキッドモア設計会社のシカゴ事務所で設計訓練を受けていたとき，23 階のビル鉄骨のラーメン計算の際，5～6 回の繰返し計算で連立方程式を正確に解いて技師長に提出したところ，「材料の寸法・強度にばらつきがあるのに数学式を正確に解く必要はない，3 サイクルで十分である。会社はかかる精密計算に要した時間に対して金を払うつもりはない。また，電動計算機でなく計算尺による 3～4 桁の有効数字で十分である」と，大変叱られたことを思い出す。事実，アメリカでは日本のように計算書を清書して提出する必要がなく，なまの計算書で十分であって，技師長は図面に重点をおいて，その経験から図面の照査によって計算上の誤りを見出す方法をとっている。また，逆に国内の橋梁会社に勤務していたとき，計算書を発注者に提出した際，作用応力 1 305 kg/cm² が許容応力 1 300 kg/cm² を超過している点を指摘されて，計算の一部やり直しを命ぜられたことがある。われわれが大学の土木工学科で最初に学ぶ測量学の演習の際，角の大きさや辺長の観測を行なって三角網の調整計算に入るが，5～7 桁の対数表を用いて精度何万分の一といった演算を行なった経験をもっている。と同時に，最小自乗法とか誤差論も学んだはずであるが，測量計算の経験がついてまわり，設計で桁数を多く計算するほど，精密でかつ安全な設計を行なったような錯覚をおこしがちである。

ここで以下に，計算に含まれる誤差について論じ，次に計算数値の不確かさについて論じ，その結果，設計計算にあたり注意すべきことを述べ，最後に計算不能の場合，どのような心がまえを持つべきかについてふれてみたい。

2. 計算の精度

ここでは，有効数字・数学数・四捨五入など数値についての知識が十分に理解されているものとする。

（1） 精密度

実用上の精密度として，いま数値 x に含まれると思われる誤差を u_x とし，比較誤差 $\varepsilon=u_x/x$ を算出し，これを x の精密度と呼ぶ。誤差 u_x は推差・平均 2 乗誤差，標準偏差をとるか，または x の最終桁に最大 0.5 の誤差があると考え，$u_x=0.5$ にとる。前者は主として観測結果の精密度を示すに用いられ，後者は計算上入る誤差を論ずる際に用いられる。

（2） 小数点の効用

X に誤差 u があるとして，$X+u=(x+u_x)10^a$ とおくと $X=x\,10^a$，$u=u_x\,10^a$，したがって $u/X=u_x/x=\varepsilon$ となり，x と X の精密度はあい等しい。すなわち，数値の精密度は有効数字に支配されるもので，小数点の位置に関係しない。小数点の役目は数の大きさの程度を示すことである。「小数位の桁数が多いほど数値が精密である」と考えるのは一般に誤りである。したがって，「有効数字何桁を正しく求めよ」と指定するのが正しい。

（3） 四捨五入の誤差

最終有効数字に 0.5 の誤差があると仮定して種々の x に対する精密度を求めると表—1 のようである。一般に有効数字 n 桁が正しいとし，その第 1 有効数字を k とすると，精密度は $\varepsilon\leqq(5/k)10^{-n}$ で，$k\geqq5$ ならば $\varepsilon\leqq1\times10^{-n}$，逆に $\varepsilon<0.5\times10^{-n}$ ならば，その数は第 n 有効数字まで確実に正しいといえる。たいていの実用数の精密度は 1% か，せいぜい 0.1% 程度と考えて，さしつかえない。

（4） 計算誤差

計算材料として与えられる実用数は，最終桁に誤差があると一般に考えられ，これは計算方法に関係なく存在する。さらに計算手続のよしあしからくる誤差がある。演算中，有効数字を切捨てすぎた場合に生ずるもので，計算誤差と呼ばれる。これはその性質上，桁数を十分多く保留すれば除かれるが，そうすると桁数を増大したために演算が非常に面倒になることや，計算材料

表—1 四捨五入に対する精密度

有効数字	x	精密度（%，分数）
1 桁	5	10%
2 桁	50	1%
3 桁	500	0.1%
4 桁	5 000	1/1 万
5 桁	5×10^4	1/10 万
6 桁	5×10^5	1/100 万

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

表—2 計算桁数 n の値

容の精密度 1×10^{-s}	s の値	2	3	4	5	6	7	8	9
	通　称	1 %	0.1 %	1/1 万	1/10 万	1/100 万	1/1 000 万	—	—
計算桁数 n	$m<5$	3	4	5	6	7	8	9	10
	$m>6$	4	5	6	7	8	9	10	11
	$m>60$	5	6	7	8	9	10	11	12

に誤差がありうる以上，計算結果も正しい桁数に限りがある，といった不利な点がある。

（5） 実用計算

計算材料からみて答にある精度が期待される場合と，計算目的から答に一定精度を要求する場合がある。前者では計算誤差を考えに入れて答の桁数を決める。後者では，答としての正しい桁数に計算誤差の余裕を見込み，逆に計算材料の桁数を推定する。いずれにしても，答として正確な桁数は，計算誤差に影響されない部分に限られるので，次の関係が成立しなければならない。

（計算に必要な桁数）＝（答として正確な桁数）＋（α 桁）

この $\alpha(>0)$ の取り方については近似的に 2 を用いることもあるが，次のように考えるのがよい。

いま m：計算を構成する項および因数の総数，n：計算に必要な桁数，s：答の精密度を 1×10^{-s} としたときの S とすれば，$m=0.2\times10^{n-s}$ の関係がある。m は掛算と割算では因数の個数を，たし算とひき算では項の個数を，整数べきでは指数の絶対値の和をそれぞれとる。小数べきでは各指数を 1 とみてよい。四則の組合せには総和をとる。種々の m に対して $(n-s)$ を求め，さらに種々の s に対して n を計算すると**表—2** のような結果を得る。これによると，たとえば答の精密度 1 %，項数 10 個ならば有効数字 4 桁を用い，精密度 1/100 万，因数 100 個ならば計算には 9 桁を用いるべきことがわかる。

【例題—1】 半径 $r=5.1144$，高さ $h=22.3355$ なる直円筒の体積 V を $V=\pi r^2h$ によって精密度 1%で求める。因数 $m=4$，$s=2$，したがって $n=3$，有効数字 3 桁をとる。

$$V_3=3.14\times5.11^2\times22.3=3.14\times26.1\times22.3$$
$$=3.14\times582=1\,830$$

試みに有効数字 5 桁とって計算すると $V_5=1\,835.4$ となる。$V_5-V_3=5$，V_5 の 1 %は 18，したがって有効数字はやはり 3 桁でよかった。演算 1 段階ごとに頭から 3 桁だけ保存したことも正しかった。途中で 5 桁も 6 桁もならべることは無駄である。

【例題—2】 体重 55.2 kg の人の肩へ重さ 0.885 g の蝿が 1 匹とまった。合せていくらか。この解答として

55 200 g＋0.885 g＝55 200.885 g

としたら誤りである。体重 55.2 kg は最悪の場合，55.15～55.24 の間にある，g の桁は真に 0 かどうかわからない。まして，g の小数 3 位まで確定的だと考えるのは妥当でない。正しい答は「重さは事実上変わらない」である。

【例題—3】 引張材の設計 $A=P/f_t$，ある引張材へ張力 $P=2\,800$ kg 作用することが計算上わかった。鋼材の許容応力 $f_t=1\,200$ kg/cm² のときの断面積を求めよ。

（解）は

$$A=2\,800\div1\,200=23\ \mathrm{cm}^2$$

である。材料の極限強さは有効数字 2 桁あたりまで信用できる。したがって，許容応力はせいぜい 2 桁の数である。設計荷重も大体同程度であるとすると，$P=2\,833.55$ kg，$A=23.612\,9$ cm² のように桁数を多く出すことはまったく無駄である。

以上一般に計算材料としてわれわれが扱う実用数の精密度は 1 %ぐらいと考えて，桁数も 3 桁か 4 桁に限って桁数の処理をすればよいことになる。

2．計算材料の変動性

設計計算に用いられる数値材料は，一般に，ある確定値ではなく，本質的に統計的な値の分布によって表わされるべき性質のものである。従来からの通常の設計方法は最悪な場合の解析の一種であって，正しくは信頼性を考えた確率論的手法によらなければならない。したがって，通常の設計計算に用いる設計パラメーター自身が正しく現実を反映していないために，いかに桁数を多くして精密計算をしたといっても，それが部材または構造物の挙動を正しく表わす数値とはいえない。いま，Haugen の著書[1]から引用した次のような例題を考える。スパン l なる単純支持のはりが等分布活荷重 q を担うものとし，支持条件は正しく理論上の仮定を満足しているとき，与えられた数値のもとに断面寸法を計算する。

【例題—1】 従来の計算法では $l=12$ ft.，$q=300$ lb/ft，はりの材料は木材でその許容曲げ応力 $f_b=1\,200$ psi，はりの断面は矩形で高さ d は幅の 2 倍とする。

最大曲げモーメント $M=ql^2/8=64\,800$ lb.-in.，所要断面係数 $W=M/f_b=54$ in²，また，$W=d^3/12$ であるから $d=8.65$ in. したがって，$b=4.32$ in. を得る。

この例では安全の点から荷重は最大値をとり，f_b には最小の保証値をとっているが，荷重・応力・寸法は実際変動量であって，正規分布を仮定すると，いずれも平均値と標準偏差によって表わされるべき性質のものである。

【例題—2】 上記の例題を必要な確率パラメーターを用

いて，必要な断面を計算する。$q=(255\pm45)$lb./ft. $3s_q=45$ lb./ft. を仮定すると

荷重確率変数は $(\bar{q}, s_q)=(255, 15)$lb./ft.,

スパンの確率変数は $(\bar{l}, s_l)=(12, 0.5)$ft.,

材料の許容曲げ応力は $f_b=(1\,350\pm150)$psi, $3s_{fb}=150$ psi を仮定すると $(\bar{f}_b, s_{fb})=(1\,350, 50)$psi,

幅と高さの公差は等しいと仮定し，公差 $\Delta=b/12$ とおくと，標準偏差推定量は $s_b=\bar{b}/36$ となる。さらに信頼性，すなわち作用応力が許容応力よりも小さい確率を 0.998 と仮定すると，$\bar{b}=5.46$ in. $\bar{d}=10.92$ in. 公差=0.36 in. を得る。したがって $d=11.28\sim10.58$ in. であって，［例題—1］の答がいかに現実を正しく把握していないかが理解できる。

スペインの生んだ当代まれにみる偉大な構造技術者である Torroja はその著書[2] の中で「通常の構造物では10%が全体で許容される誤差の限界である。多くの不確実さや不正確さの源や，計算理論に含まれる仮定を考えてみるならば，それ以上，精密であることはむずかしいし，無駄なことでさえある」といっている。計算自身の中に入ってくる避けられない 1%程度の誤差・変化量を決定論的に扱うことによって入ってくる 3～7% 程度の誤差，これと計算上の仮定から生ずる誤差を考えると，Torroja の推定 10%は妥当なものといえよう。したがって，設計計算値について 10% 以内の正確さを議論することは，現実に対する厳密性の点で，まったく意味のないことである。

3. 設計計算上の注意

① 計算は必ず経験のある者によって設計者とは別に照査して，安全性や経済性に影響するような大きな誤りを見つけ出すようにすること。

② 計算の中に誤りがなかったとしても，そのことは誤りがないことの保証にならない。数学的論証という閉じられた目でみるのではなく，経験と観念と数学的論証が真にかつ全体的に相互関連を持つようにすること。

③ 計算が問題の現実の基本的条件を満足しているならば，結果は妥当と考えてよい。誤りは決して正確な数学的根拠の中にあるのではなく，仮定の中にあることを忘れないこと。計算の正確さを過信してはならない。

④ 構造解析のある方法が，ただ優美な数学的手法であるがために，また，ただそれを使ってみたいという欲望のために適用されてはならない。仮定に含まれた誤差を考慮すべきである。

⑤ 標準化された公式や参考文献は大きな助けになるが，それがいまの問題に適切かどうかを決定する必要があり，その判断力と知識を欠くならば，それ以上の計算はすべて無駄である。

⑥ 数学は単に設計者が彼のアイデアを一つの構造物という現実性に運ぶための便利な道具であり，考えている構造物の形状・寸法や細部を決定するのに使用される道具にすぎない。大切なのは構造計算の数学的操作の段階に入る前に，基本的な構造概念に注意を向けることである。

4. 計算不能のものをどのようにしてつくるか

計算不能というのは，① 計算のための資料入手が困難な場合と，② 解析を含む数学的計算ができない場合がある。

(1) 資料入手が困難な場合

不確定要素が数多くあって，設計計算ができない場合に，重要でない簡単な構造物であれば既存の類似構造物から推測した値を用いて計算なしに経験的に施工できるが，もしも，重要な構造物の場合ではこのような態度は許されない。このような場合，われわれは通常安全率を高めて破壊の確率をへらす方法をとるが，それによって工費が増大しても，事故の危険を減少することになるなら，このことは正当化されてよい。しかし，どの程度の安全率をとるかは，まったく経験工学的な問題であって合理性をかくことになる。荷重の根源・大きさ・変動・方向・作用点の調査，地盤の土質学的・地質学的調査，これらに対応する材料の特性について十分な調査を行なって，確実な資料を用意すべきである。このために予定の建設がおくれても，それによって生ずる事故に比べるなら問題にならない。むしろ，調査技術が現在よりももっと進歩すべきである。とかくわれわれには自然現象をあまりに単純化し公式化して考える嫌いがある。調査はいかにしすぎても，すぎることはないはずである。

(2) 数学的計算が困難な場合

特殊な構造物の場合，問題が解析的方法で解けないときには実験的方法または解析・実験的方法によってかなりの複雑な構造物の問題でも，解きうることを忘れてはならない。とくに非常に複雑な境界をもつ三次元構造物の場合には，これらの方法が最も効果的である。正しい安全率が採用されているならば，実験結果の換算の不正確さと適用される単純化された方法の中の不正確さに基づいて生ずる誤差の限界は許容されてよい。

あとがき

以上論じてきたことは，各設計者の中に経験として積

み重ねられてきたもので，従来，経験工学の一つとして各設計者の判断にまかせられることが多かった。設計計算が電子計算機によることが多い現在，経験工学の立場から離れて，もっと科学的な原則にたって，バランスのとれた精度をもった計算が行なわれるようにすべきである。そのためには荷重，材料寸法・強度のばらつき，施工の誤差，理論仮定と実際の差異，などについての統計資料が一日も早く整備される必要がある。

参 考 文 献

1) Haugen, E.B. : "Probabilistic Approaches to Design". John Wiley & Sons, 1968.
2) Torroja, E. : "Philosophy of Structures", Univ. of California Press, 1958.