構造物の最適設計

片　山　恒　雄*

1．最適設計の考え方

一つの設計を規定するために必要な要素を**設計変数**と呼ぶ。構造形式，使用材料，部材断面の諸寸法，製作・架設方法などが設計変数であり，設計変数のすべてが決定されてはじめて一つの設計ができる。設計された構造物に対しては，固有周期を計算したり，力が作用したときの変形や応力を求めることができる。このように構造物の挙動を示す量を**状態変数**という。設計変数と状態変数はいろいろな制約を受ける。最小板厚の規定，応力や変形量を規定量以下にするという制約などである。これら**制約条件**は設計変数を含む不等式の形をとることが多い。すべての制約条件を同時に満たす設計変数の組合せの集合が**許容領域**で，その中には無限に多くの可能な設計があり，設計の良否を判定する規準が必要である。たとえば，建造費と耐用年限内の必要経費の和を最小にする設計とか，重量を最小にする設計とかが目標とされる。この場合，費用や重量を設計変数によって量的に表わした関数を**目的関数**と名づける。従来の設計では，主として経験に基づいて設計変数を仮定し，それらが制約条件を満たしていなければ，適当な修正をほどこす。すべての制約条件を満たす設計が得られたら目的関数の値を計算する。いくつかの設計を比較して一つを選ぶ。この過程の一部が電子計算機にゆだねられてはいるが，今日でも大部分の設計の手順は変っていない。

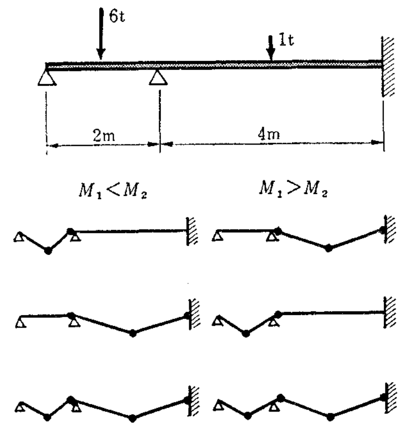
このような手さぐりの設計にかわって，制約条件を満足しながら，目的関数を最小にするような設計を確実にしかも論理的に求めようとするのが最適設計の考えである。もちろん，この考え方自身は古い。しかし，数理計画法，骨組や連続体の有限要素計算法，高速で大型な電子計算機が開発され発達してはじめて，最適設計の考え方がある程度の実用性を帯びてきたのである。これは，過去 15 年程度のことである。

2．簡単な例題

きわめて単純化された２つの例題を示そう。

* 正会員　工博(Ph. D)　東京大学助教授 生産技術研究所

単純塑性理論で**図—1** に示す２径間のはりを設計することを考える。各径間では一定断面とし塑性モーメントを M_1, M_2 とする。はりの重量を最小にするような M_1 と M_2 を求めることが問題である。M_1 と M_2 の大小によって**図—1** に示す６つの崩壊機構が考えられる。おのおのの崩壊機構において



左側のはりの塑性モーメント＝M_1
右側のはりの塑性モーメント＝M_2

図—1　単純塑性理論による最適設計の例題

（仮想変位による内部仕事）≧（外力による仕事）

が成立していなければならないから，制約条件は

$$2M_2\geq1,\quad M_1\geq2$$
$$2M_1+5M_2\geq8,\quad 4M_1+3M_2\geq8$$
$$2M_1+M_2\geq6,\quad M_1+3M_2\geq2$$

となる。部材の単位長さあたり重量は塑性モーメントにほぼ比例すると考えられ，最小重量を求めることは，目的関数

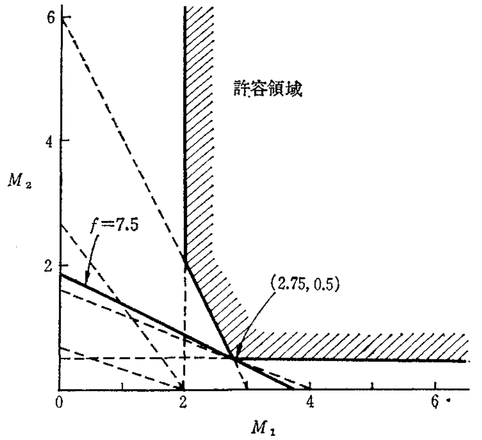
$$f=2M_1+4M_2$$

を最小にすることに帰着する。これは線形計画法の問題である。この簡単な問題の場合は，**図—2** から

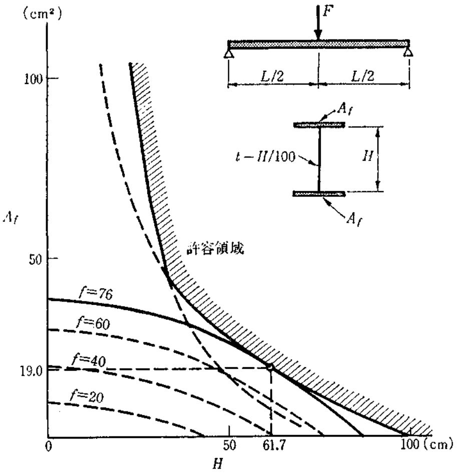
$$M_1=2.75\ \mathrm{t\cdot m},\ M_2=0.5\ \mathrm{t\cdot m}$$

のとき最小重量が得られることがわかる。

次に **図—3** の単純ばりを考えてみる。ウェブの厚さは $H/100$ とし，設計変数は H と A_f の２つとする。最大曲げ応力を σ_0 以下，最大たわみを δ_0 以下にする最小断面を求める。フランジ厚が H に比べて十分小さい



図—2 塑性設計の例題の解



図—3 単純ばりの最適設計の例題

ものとすれば，制約条件は

$$\sigma_{\max}=\frac{FL/4}{H^3/600+A_f\cdot H}\leq\sigma_0$$

$$\delta_{\max}=\frac{FL^3}{48\,E(H^4/1\,200+A_fH^2/2)}\leq\delta_0$$

となる。目的関数は

$$f=2\,A_f+H^2/100$$

である。制約条件も目的関数も非線形である。$F=10$ t, $L=10$ m, $\sigma_0=1\,600$ kg/cm², $\delta_0=L/250$, $E=2\times10^6$ kg/cm² とすると，図—3 から $H=61.7$ cm, $A_f=19.0$ cm² で最小断面 76 cm² が得られることがわかる。

3．問題の数学的表示と非線形計画法

最適設計問題は，一般に次のように数学的に表現できる。

「制約条件 $g_i(\boldsymbol{x})\geq0$, $i=1, 2\cdots, m$ のもとで，目的関数 $f=f(\boldsymbol{x})$ を最小にする設計変数の組 $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots,\bar{x}_n)$ を求めよ」

すべての制約条件と目的関数が設計変数の線形関数となることはきわめてまれで，最適設計問題は非線形計画法の問題となる。また，多種多様な設計変数のすべてを考慮することは不可能であり，これまでの研究の大部分は，構造形式，部材の幾何学的配置，材料の種類があたえられているときに，部材断面などの比較的簡単な設計変数だけを考えて非線形計画法で最適解を求める問題を扱っている。

非線形計画法による解法は原則的には次のように考えられる。まず許容領域内に初期点を求め，そこで目的関数を最も大きく減少させると思われる方向を求める。この直線の上をたどって目的関数を最小にする設計変数の値の組を求める。この新しい点で，ふたたび上記の手順を繰り返す。もちろん，探索の途中の各点で応力やたわみなどの状態変数を計算しながら，すべての制約条件が満足されていることを確認しなければならない。

非線形計画法には，線形計画法におけるシンプレックス法のように唯一の卓越した解法はない。基本的には，あたえられた問題を制約条件を含んだままの形で解く方法と，これを制約条件のない問題に変換して解く方法とがある。後者は SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) といわれるもので，その原理は，つぎの簡単な例題から理解できよう。制約条件

$$g_1=2\,100-600/x_1^2x_2\geq0$$

$$g_2=0.2-1/52.5\,x_1^3x_2\geq0$$

$$g_3=x_2-0.6\geq0$$

のもとで目的関数

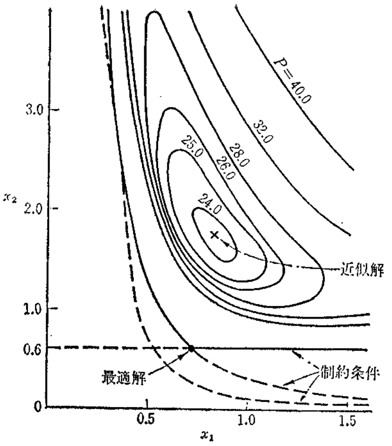
$$f=10\,x_1x_2$$

を最小にしたい。この問題は $f=10\,x_1x_2$, $x_2=0.6$ で最小値 4.14 を有する。いま r を正の定数として

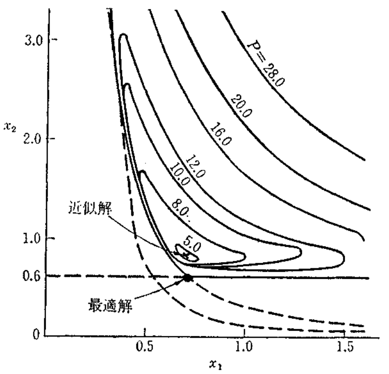
$$P(x_1,\ x_2,\ r)=10\,x_1x_2+r\ (1/g_1+1/g_2+1/g_3)$$

なる関数を定義する。図—4 に $r=10$ および $r=0.01$ とした場合の P の等高線を示す。右辺第 2 項は設計点が許容領域の内側から制約条件で定められる境界面に近づくと無限大となり，関数 P も無限大となる。したがって，この関数はそれ自身の中に制約条件を包含したような性格をもっている。そのうえ，図—4 から推測されるように，r を小さくすれば関数 P の最小点は目的関数 f の最小点へ無限に近づいてゆく。ところが，r の値が非常に小さいと，関数 P が表わす曲面は一般に非常に深い曲がった谷をもち，数値的探索の収束や安定の点でいろいろな問題が生じてくる。そこで，適当に大きな r の値を仮定して最小点を求め，順次 r を減少させながら解の近似度を高めてゆくのである。

制約条件付最小化に用いられる探索法には，種々の Feasible Direction を用いる方法[3]と SLP[4] (Sequential Linear Programming) がある。SLP は各設計点にお



（1） R=10.0 の場合



（2） R=0.01 の場合

図—4 SUMT 変換された関数の性質

いて非線形の制約条件と目的関数を級数展開によって線形化し，線形計画法を適用してその段階での最適値の近似解を求め，次々に設計点を修正して最終的な最適解を得ようとする方法であり，線形計画法のすぐれたアルゴリズムを援用できる点が有利である。

制約条件のない最適化問題を扱う探索法は二つにわけられる[5]。一つは目的関数の偏微係数を用いるものである。二次の偏微係数を必要とする Newton-Raphson 法は有力な手法であるが，複雑な問題では実用上の難点がある。一次の偏微係数を用いる手法は多いが，最も有効な手法は共役方向の性質を利用した Variable Metric Method であろう。これらの方法に対し，目的関数の値だけから得られる情報を使って探索の方向を定める方法があり，その中では Powell の直接探索法が有効であると言われている。

4．最適設計の問題点

設計変数が適切に選ばれ，目的関数と制約条件が正しく定式化されれば，非線形計画法を用いて最適解を求めることは原理的に可能である。

しかし，今日のところ，問題の規模には計算能力のうえから制限がある。また，設計変数の中には，その影響を定量的にとらえることがむずかしいものも多い。目的関数を設計変数で表わすために必要な資料を，使える形に蓄積・整理してゆくという地道な作業が必要である。

一方，可能な範囲では，積極的に実際面への応用を考えるべきである。このためには，問題を実際に提示する人，設計を行なう人，数学的手法の可能性と限界を知る人の緊密な協力が不可欠である。

大規模な問題をいかに解析可能な問題へ還元してゆくかを検討することも重要であろう。いくつかの部分にわけて，直列または並列に各部分での最適化を進めながら全体としての最適化をはかるという考え方を研究する必要がある。比較的小規模な問題として，部材をまず最適化しておき，その情報を用いて構造系を最適化するという方法は実用性の面から，とくに注目される[7]。

非線形計画法の問題として定式化された最適設計問題では，目的関数の値のみが評価規準であり，最適な設計はどのようなものか，という予備的な情報は必要とされない。与えられた条件から最適解が自動的に出てくる。これは長所であると同時に，設計者の経験や直観を生かしにくいという点では欠点でもある。数値的探索ばかりにこだわらず，最適な設計とは何かということを検討する必要が感じられる[6]。

本稿では，構造物の最適設計を中心に述べてきたが，最適化の考えはさらに大きなシステムに関して，より重要な意味をもつものであろう。また，外力・構造物の挙動・強度などすべての面で，不確定な要素をいかに評価するかが重要視されている中で，「最適」という語はあたかも確定的なものがあるかのような印象を与えるが，設計思想の合理化のための有力な考え方として理解すべきであり，その可能性についてあまり早計に悲観的な結論をくだすことは避けたいものである。

参考文献

1) Wasiutynski, Z. ほか：The Present State of Knowledge in the Field of Optmum Design of Structures, Applied Mechanics Reviews, Vol. 16, No. 5, 1963.
2) Sheu, C.Y. ほか：Recent Developments in Optimal Structural Design, Applied Mechanics Reviews, Vol. 21, No. 10, 1968
3) Zoutendijk, G.：Methods of Feasible Directions, Elsevier Publ. Co., 1960.
4) 成岡昌夫監修：骨組構造物の最適設計（No. 1～No. 10），日本鋼構造協会誌，Vol. 7, No. 63～ Vol. 8, No. 77.
5) 山本善之ほか訳：非線形最適化問題，培風館，1970
6) Prager, W. ほか：Optimality Criteria in Structural Design, AFFDL-TR-70-166.
7) 大久保禎二：トラス構造物の最適設計法に関する研究，土木学会論文報告集，No. 177, 1970. 5.