数値解析法講座 4
基礎編
有限要素法

飯田隆一*

1. 有限要素法の特徴

最近の電子計算機の発達により，数値計算法の分野でも著しい進歩がみられ，新しい数値解法が数多く開発されているが，そのうちで，現在最も注目されているのが有限要素法である。

この有限要素法は，元来，変分原理とマトリックス解法とを組み合せることにより，線形問題の解析方法として開発されたものであるが，部分的に材料の性質が異なっている場合に容易に適用しうるのみならず，反復計算を行なうことにより，非線形問題・非定常問題にも適用しうるので，今後，幅広い利用と著しい発展とが期待される方法である。

有限要素の説明を行なうにあたって，まず，有限要素法が従来の数値計算法に対して，どのような特徴を持っているか，またどのように位置づけられるかについて，弾性理論を例にとって説明を加えよう。

(1) 弾性理論

2次元問題を例にとって説明すると，まず必要となるのは，平衡方程式である。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\rho X=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\rho Y=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで注目すべきことは，未知数が $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の3つに対し，方程式の数は2つであるので，そのままでは解が得られない。そこで，ひずみと変位との関係

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\quad(2)$$

から，適合条件式を導入し

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

応力とひずみとの関係式を与えれば，3つの未知数に対して，式 (1)，(3) の3つの方程式が得られ，解が得られる形となる。弾性理論の場合には，Hooke の法則が仮定される。すなわち，平面ひずみの場合には

$$\left.\begin{aligned}&2G\varepsilon_x=\sigma_x-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\\&2G\varepsilon_y=\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\\&G\gamma_{xy}=\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

が仮定される。式 (1) に式 (4)，(2) を代入して，u，v に関する方程式を立てると

$$\left.\begin{aligned}&G\left[\nabla^2u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\\&\qquad+\rho X=0\\&G\left[\nabla^2v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\\&\qquad+\rho Y=0\end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

が得られ，これから

$$2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\rho\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=0$$

なる関係が得られる。したがって，重力の場では

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0\qquad \nabla^2X=\nabla^2Y=0$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\nabla^2(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=0\\&\nabla^4u=\nabla^4v=0\\&\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0\\&\nabla^4\sigma_x=\nabla^4\sigma_y=\nabla^4\tau_{xy}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

となり，弾性理論では

① 直ひずみの和 $\varepsilon_x+\varepsilon_y$; 直応力の和 $\sigma_x+\sigma_y$ は調和関数である。

② ひずみ ε_x, ε_y, γ_{xy}, 応力 σ_x, σ_y; τ_{xy} は重調和関数である。

以上から，弾性問題における解析は境界条件に適合した重調和関数を求めることになる。

(2) 弾性問題における従来の解析方法，

電子計算機がない時代においては，数値解析は理論解析に比して多大の労力と時間を要するものであった。したがって，できるだけ理論的に進め，数値解析による部分を少なくするという配慮が払われた。

理論的には座標面と境界面とが一致し，境界条件が簡単に表わされるときは，重調和関数の解は得られるので種々の理論解が試みられた。しかし，実際に現われる問題は上記の条件を満足する場合は少ないので，いくつかの数値解法が開発された。以下簡単にふれると，

① 直接重調和関数の数値解析を行なう方法[1]：この方法は，原理的には当然最初に考えられる方法であるが計算労力が著しいため実際に行なわれた例は少ない。

* 正会員 建設省土木研究所ダム構造研究室長

② 平板問題との相似性を利用する方法：平板の面外曲げ問題において，面外荷重が0で，境界においてのみ曲げ荷重が作用するときは，面外変位は重調和関数となり，Airy の応力関数と相似関係にあることになる。この関係を利用して，平板を格子構造として数値計算を行なえば，解析可能である。

この方法は，Boulder Dam の2次元断面の解析[2)] に用いられている。

③ 光弾性実験：これは厳密な意味では数値解析法とはいえないが，式 (6) の性質を利用した数値解析と組み合せて行なわれるので，ここで述べることにする。

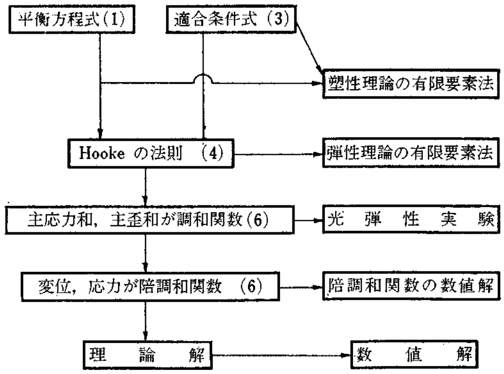
光弾性実験では，主応力差 $(\sigma_1-\sigma_2)$ と主応力の方向が求められる。一方，式 (6) から，主応力和 $(\sigma_1+\sigma_2)$ は調和関数であるから，調和関数の数値計算を行なうことにより解析可能となる。調和関数の数値計算は比較的簡単なので，電子計算機が利用される以前から，かなり行なわれていた。

以上は電子計算機が利用されていた数値計算法のおもだったものであるが，これらの方法は，いずれも数値計算の労力を減らすことを目的として，できるだけ理論的に取り扱いを進め，理論的な取り扱いがそれ以上不可能となった時点から，数値計算を進めるという方法であった。このため，応力・変位の連続的変化は数値計算の段階でも前提とされ，その精度は高いが，式 (6) は弾性的性質が異なる材料にまたがっては成立しないので，弾性的性質が場所によって異なる場合には，きわめて復雑な手順が必要となり，このような問題に対しては，実際上解を求めることは，きわめてまれであった。

電子計算機の利用とともに，数値計算は容易となり，電子計算機により適合した数値計算法もいくつか開発された。しかし，式 (6) から出発した方法は，理論的な制約が多く，適用範囲が狭いため，式 (1)，(2)，(4) から出発した，理論的制約が少ない方法が次第に脚光をあびだしてきた。その代表的なものが有限要素法であるといいうる。

(3) 有限要素法の位置づけ

有限要素法は弾性体を有限な大きさを持ついくつかの要素に分割し，そのおのおのの要素内の変位または応力などの分布を適当に仮定し，各要素の頂点に設けた節点での平衡関係を満足するように解を求める方法である。このため，変位・応力の連続的な変化は前提とされないので，精度の点ではやや劣るが，平衡方程式・適合条件式・Hooke の法則から出発し，式 (6) を用いないので，部分的に弾性的性質が異なっても，単一要素内で異なっていなければさしつかえなく，適用範囲の広いものである。



図―1 有限要素法の位置づけ

これを弾性理論の体系と関連させて，従来の解法と対比して位置づけると，図―1 のようである。この図において，理論解の数値解析はその理論解固有のものであって，他の問題には適用できないし，重調和関数・調和解析は一様な性質を持つ弾性体にのみ適用しうる方法である。したがって，図―1 で下のほうに示されている数値解析方法ほど理論的制約が多く，かつ適用範囲が狭く，上のほうに示されている方法ほど理論的制約が少なく，適用範囲が広い。以上のことから，有限要素法の特徴はできるだけ早い時点で理論から離れ，理論的制約を少なくしようとしている点であるといいうる。

(4) 有限要素法の方法論的特徴

以上，有限要素法の利用面からみた特徴を述べ，位置づけを行なった。ついで，方法論的な特徴について述べると，有限要素法とはマトリックス解析と変分原理を用いて，最後に大型連立方程式を解いて，解を求める手法であるといえる。

そこで章を改め，変分原理と有限要素法の組み立て方について，概略の説明を加えよう。

2. 変分原理

(1) 質点の仮想仕事の原理

質点が平衡状態にあるとき，この質点に作用する力を X, Y とすると

$$X=0,\ Y=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

となる。さて，この質点に任意の仮想の変位 $\delta x, \delta y$ を与えたとすると，式 (7) から当然

$$X\delta x+Y\delta y=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

が成立する。これを仮想仕事の原理という。

逆に式 (8) が任意の仮想の変位に対して成立しているとすると

$\delta x \neq 0,\ \delta y=0$

のときも成立しなければならないから $X=0$ となる。

同様に，$Y=0$ とならなければならず，式 (8) が任意の仮想の変位に対して成立するときは，式 (8) と式 (7) は全く同等の意味を持つことになる。このように，未知数 (X, Y) の数と平衡方程式の数とが同一のときは，平衡方程式と仮想仕事の原理とは，なんら異ならないものとなる。

次に，この質点になんらかの拘束があった場合について考察しよう。例として，質点が曲線

$f(x, y)=0$

の上になめらかに拘束された場合について検討を加えてみる。この場合に，拘束力はこの曲線に垂直である。いま，この質点に作用する拘束力を含まない外力を X, Y とし，拘束力を X', Y' とすると，

$$X \neq 0,\ Y \neq 0 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$X+X'=0,\ Y+Y'=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

となる。これから，式 (8) と同様に

$$(X+X')\delta x+(Y+Y')\delta y=0$$

が得られる。ところが，前述したように拘束力は曲線に垂直であり，質点に許しうる仮想変位 $\delta x, \delta y$ は曲線上になければならないから，拘束力と仮想変位とは直交し，拘束力のなす仮想仕事は 0 となる。

$$X'\delta x+Y'\delta y=0$$

$$\therefore\ X\delta x+Y\delta y=0 \quad \cdots\cdots(11)$$

式 (9) と式 (11) との関係は，式 (7) と式 (8) との関係と異なったものとなってくる。

この質点は，仮想の変位を与えたのちもこの曲線上になければならないから

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y)=0$$

がなければならない。これを Taylor 展開すると

$$f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\delta x)^2+\cdots\right\}+\cdots=0$$

となり，$\delta x, \delta y$ が十分小さく，2次以上の項は無視しうるとすると

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y=0 \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。式 (11)，(12) から

$$\left(X-\frac{\partial f}{\partial x}\lambda\right)\delta x+\left(Y-\frac{\partial f}{\partial y}\lambda\right)\delta y=0 \cdots\cdots (13)$$

が成立し

$$Y-\frac{\partial f}{\partial y}\lambda=0$$

になるように λ を定めると，式 (12) を満足する任意の $\delta x, \delta y$ に対して式 (13) は成立しなければならないから

$$X-\frac{\partial f}{\partial x}\lambda=0$$

も成立しなければならない。すなわち

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{\partial f}{\partial x}\lambda=0 \\ Y-\frac{\partial f}{\partial y}\lambda=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(14)$$

となり，外力の x, y 方向成分は曲線の法線の方向余弦に比例し，外力は曲線に垂直となる。

ここで注意すべきことは，未知数は X, Y の2個であるのに対して，式 (9) は不等式で示されているために，方程式の形になっていない。このため，未知数の数と平衡方程式の数とは一致しないことになるが，式 (11) の仮想仕事の原理と，拘束条件式・式 (12) とを組み合せることにより，式 (14) のような関係式が導かれる。

(2) 連続体における仮想仕事の原理

連続体においては，平衡方程式として式 (1) が成立するが，この中には，未知数として $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の3つが含まれ，未知数の数は平衡方程式の数より多いことはすでに述べた。このために，ひずみと変位との関係を示す式 (2) または適合条件式の式が (3) 制約条件として加えられる。したがって，曲線上に拘束された質点の仮想仕事の原理と同様に，連続体における仮想仕事の原理は，平衡方程式と少し異なった形のものとなる。式 (1) を式 (7) と同等のものとみなし，式 (8) と同形の仮想の変位のなす仕事をつくり，これを連続体全体に積分して，連続体内の仮想仕事の合計したものを求めると

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\rho X\right)\delta u +\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\rho Y\right)\delta v\right]dxdy=0 \cdots(15)$$

の形で仮想仕事の原理が現わされることになる。ここに仮想の変位 $\delta u, \delta v$ は制約条件としてのひずみと変位との関係式を満足していなければならないので

$$\delta\varepsilon_x=\frac{\partial}{\partial x}(\delta u),\quad \delta\varepsilon_y=\frac{\partial}{\partial y}(\delta v),$$

$$\delta\gamma_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}(\delta v)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)$$

が成立していなければならない。この関係を用いて式 (15) を変形すると

$$\begin{aligned}&\int[\{\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)\}\delta u \\ &\quad+\{\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)\}\delta v]ds \\ &\quad+\iint\rho[X\delta u+Y\delta v]dxdy \\ &\quad-\iint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdy=0\end{aligned}$$

となる。いま

$$\begin{aligned}\delta_e W=&\int[\{\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)\}\delta u \\ &+\{\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)\}\delta v]ds \\ &+\iint\rho[X\delta u+Y\delta v]dxdy\end{aligned}$$

$$\delta_\varepsilon V=\iint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdy$$

とすると，$\delta_\varepsilon W$ は仮想変位により外力のなす仕事であり，$\delta_\varepsilon V$ は仮想変位により連続体内に蓄積されるひずみエネルギーで，式 (15) は

$$\delta_\varepsilon W=\delta_\varepsilon V \quad\cdots\cdots(16)$$

の形で表わされることになる。すなわち，仮想変位により外力がなす仕事は，仮想変位により連続体内に蓄積される，ひずみエネルギーに等しいと表現され，熱力学第一法則の一形態となる。

（3） 連続体における最小仕事の原理

仮想仕事の原理では変位の変分を考えたが，ここでは応力の変分について考察してみよう。

いま，$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$; u, v は式 (1)，(2) を満足し，$\sigma_x+\delta\sigma_x$, $\sigma_y+\delta\sigma_y$, $\tau_{xy}+\delta_{xy}$ は，式 (1) を満足しているが，$\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x$, $\varepsilon_y+\delta\varepsilon_y$, $\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy}$; $u+\delta u$, $v+\delta v$ は式 (2) を満足していないとする。しかるとき，

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta\sigma_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta\tau_{xy})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(\delta\sigma_y)=0$$

が成立する。これは仮想の力の変化に対する平衡方程式であるが，これと変位との積により，仮想の力の変化による仕事が得られる。すなわち

$$\iint\left[\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\delta\sigma_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta\tau_{xy})\right]u+\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\delta\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(\delta\sigma_y)\right\}v\right]dxdy=0 \quad\cdots\cdots(17)$$

が得られる。これを変形して

$$\int[\{\delta\sigma_x\cos(x,n)+\delta\tau_{xy}\cos(y,n)\}u+\{\delta\tau_{xy}\cos(x,n)+\delta\sigma_y\cos(y,n\}v]ds-\iint[\delta\sigma_x\cdot\varepsilon_x+\delta\sigma_y\cdot\varepsilon_y+\delta\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy}]dxdy=0$$

いま

$$\delta_\sigma W=\int[\{\delta\sigma_x\cos(x,n)+\delta\tau_{xy}\cos(y,n)\}u+\{\delta\tau_{xy}\cos(x,n)+\delta\sigma_y\cos(y,n)\}v]ds$$

$$\delta_\sigma V=\iint[\delta\sigma_x\cdot\varepsilon_x+\delta\sigma_y\cdot\varepsilon_y+\delta\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy}]dxdy$$

とすると，$\delta_\sigma W$ は仮想の外力のなす仕事であり，$\delta_\sigma V$ は仮想の応力の変化により内部に蓄積されるひずみエネルギーであり，式 (17) は

$$\delta_\sigma W-\delta_\sigma V=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

と表わされる。ここで境界条件が応力で与えられているときは，境界上では $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$ は0であるから

$$\delta_\sigma W=0$$

となり，また変位で与えられているときも，固定されているときは $u=v=0$ であるから

$$\delta_\sigma W=0$$

となる。このような場合は

$$\delta_\sigma V=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

となる。これが最小仕事の原理である。

（4） 変分原理に対する考察

以上，質点および連続体の静力学における変分原理について述べてきた。これらの力学に用いられる変分原理について包括的な考察を加えてみよう。

一般に，力学に用いられる変分原理は仮想または応力の変化を与え，これと外力または変位との積により仮想の仕事をつくり，真の解が持つ特性を仕事の変分の形で表わしたものといいうる。

しかし，一般に平衡方程式または運動方程式に含まれた未知数の数が方程式の数と同じときは，変分原理を適用して得られた式，平衡方程式または運動方程式となんら異ならない反面，未知数の数が方程式の数より多いときは異なった意味を持ってくる。このような場合には，平衡方程式または運動方程式のほかに拘束条件式が必要となってきて，両者を合せた方程式の数は未知数の数と一致しなければならない。

このような場合に，一般に解の唯一性は成り立ち，平衡方程式または運動方程式を同時に満足する唯一の真の解が存在することになる。この真の解に微小量異なった解を考えた場合に，当然解の唯一性から，この解は平衡方程式または運動方程式と拘束条件式を同時に満足することはできない。そこで，いずれか一方を満足し，他方を満足しない解を考え，仮想の仕事をつくり，真の解が持つ特性を表現したものが，力学に用いる変分原理であるといいうる。

変分原理をこのようにみなすと，次のような分類が可能となる。

① 拘束条件式を満足し，運動方程式を満足しない変分を与え，真の解の特性をとらえる方法

② 運動方程式を満足し，拘束条件式を満足しない変分を与え，真の解の特性をとらえる方法

前者に属するものとしては，質点，質点系，連続体における仮想仕事の原理，Hamilton の原理などがあり，後者に属するものとしては最小仕事の原理がある。

いずれの方法も数学的には可能であり，後述する有限要素法で，いずれを用いるかは手順によるといいうる。

3．有限要素法の構成

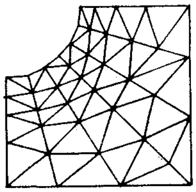
大型電子計算機の利用により，マトリックス演算・多元連立方程式の解法の進歩は目をみはるものがある，したがって，数値解析を行なうにあたって，これらの手法を利用しうるようにしたならば，きわめて有利である。

一方，連続体の運動ないし平衡方程式をたてる場合，

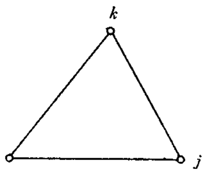
一般に微小体の運動ないし平衡関係から出発するため偏微分方程式の形をとり，これをそのまま数値解析しようとするならば，微分方程式の解法となり，電子計算機の利用により最も進歩の著しい線形プログラムの利用ができなくなる。そこで振動問題においては，古くから連続体の問題において連続体としての解析が困難な場合に，近似的に質点系として取り扱い，線形化することが行なわれてきた。これと同様に，連続体の力学をなんらかの静定化により，質点系の力学または，それに類似した方法にすることができれば，電子計算機による解析を行なううえで,きわめて有利であることは容易に想像される。

このような試みはいくつか行なわれたが[3]， これらのうち有限要素法が最も注目されるのは，連続体としての性質を最も忠実に表現しうる点にある。

一般に，質点系の力学では，質点と質点との間に拘束力（以後これを内力という）を考え，一つの質点に作用する内力と外力の和が，その質点の運動または平衡を規定するとして取り扱かっている。これに対し，有限要素法では，**図―2** に示すように，連続体をいくつかの要素に分割し，その要素の頂点に節点（質点に対応するもの



図―2　連続体の分割例



（3節点法）

図―3　三角形要素

と考えてよい）を設け，要素内に適当な変位分布を仮定して，この変位分布に対応した節点力（一種の内力）を求めることにより，質点系の力学に類似した取り扱いに持ち込んでいる。いいかえれば質点系の力学では，質点間での内力を考えるに対して，有限要素法では要素内の変位分布に対応した内力を考えており，この点でより連続体の特性が加味されている。すなわち，数値解析上は有限要素は質点系の力学とほぼ類似のものであるが，物理的性質の表現のうえからは，より連続体としての特性を加味しており，連続体の力学と質点系の力学の中間に位するものであるといいうる。

以上，有限要素法の解析上の特徴を説明したが，これを弾性問題を例にとって具体的に説明してみよう。

いま， 三角形要素 ijk をとり， 各節点の座標をそれぞれ (x_i, y_i)，(x_j, y_j)，(x_k, y_k) とする。また， この要素内の変位分布を

$$\left.\begin{array}{l} u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \\ v=\alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

と仮定する。これをマトリックスで表わすと

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=[u]=\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$=[B]\ [\alpha]$$

と書き表わされる。これから，i, j, k 点の変位は

$$[U]=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ v_j \\ u_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$=[A]\ [\alpha]$$

と書き表わされる。これから， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_6$ は節点変位により表わされる。

$$[\alpha]=[A^{-1}][U]$$

次に

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha_2,\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha_6$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha_3+\alpha_5$$

となるから

$$[\varepsilon_x]=\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}[\alpha]$$

$$=[C][\alpha]=[C][A^{-1}][U]$$

と書き表わされる。また，平面ひずみの状態では

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$=[D][\varepsilon]$$

と表わされる。これから

$$[\sigma]=[D][C][A^{-1}][U]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

の形で仮定した変位に対応した弾性応力を節点変位で表現しうる。 この応力と静的に平衡を保つ節点力を S_{xi}，S_{yi}，S_{xj}，S_{yj}，S_{xk}，S_{yk} とする。この $[S]$ を変分原理を用いて求めてみる。さて，仮定した変位分布に対応した応力分布を求める過程において，すでに変位とひずみの関係を用いている。そこで，ここで用いるべき変分原理は，適合条件式を満足し，平衡条件式を満足しない変分を用いる仮想仕事の原理である。いま，仮想の節点変位を $[\bar{U}]$ とし，これに対応した仮想のひずみを $[\bar{\varepsilon}]$ とすると，仮想仕事の原理は

$$[\bar{U}]^T[S]=\iint[\bar{\varepsilon}]^T[\sigma]dxdy$$

と表わされる。

$$[\bar{U}]^T[S]=\iint[\bar{U}]^T[A^{-1}]^T[C]^T[D][C][A^{-1}][U]dxdy$$

$[A^{-1}]$，$[C]$，$[D]$ には x, y は含まれていないから

$\iint dxdy=\Delta$

とすると

$$[S]=\Delta[A^{-1}]^T[C]^T[D][C][A^{-1}][U]$$

となる。いま

$$[S]=[K][U] \quad \cdots\cdots(22)$$

とおくと

$$[K]=\Delta[A^{-1}]^T[C]^T[D][C][A^{-1}] \quad \cdots\cdots(23)$$

となる。この $[K]$ は剛性マトリックス (Stiffness Matrix) と名づけられる。

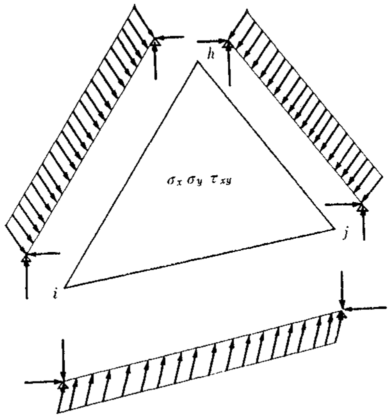
以上，節点力という新しい概念が持ち込まれ，その誘導を簡単に示した。しかし，この考え方はかなり抽象的で理解しにくいと思われるので，その力学的な意味以下に述べる。図—4 に示すよう要素内に仮定した変位分布に対応した応力分布により，辺 ij, jk, ki に表面力が生ずる。この表面力を分布荷重として，ij, jk, ki を単純ばりとしたときの支点反力を求める。ここに，各節点ごとに合計したものが，節点力である。

この節点力という概念が有限要素法の特徴である。

このように，要素内に仮定した変位分布に対応した応力分布に，静的に平衡を保つ節点力を節点変位で表わしうると，以後は質点系の力学と同様に，各節点に働く節点力の合計は，その節点に作用する外力に等しいとして弾性体全体の平衡方程式をたてることができる。

いま，各節点に働く外力を $[R]$ で表わすと，各節点に働く節点力は各要素ごとに式 (22) の形で節点変位で表わされるから

$$[R]=[F][U] \quad \cdots\cdots(24)$$



図—4

の形で表わされる。節点変位は未知数であるが，外力は一般に既知であるから（境界上では逆なこともあるが）

$$[U]=[F^{-1}][R] \quad \cdots\cdots(25)$$

として，各節点の変位が求められる。これから各要素の応力・ひずみが求められる。

以上が有限要素法のおおよその構成である。

参 考 文 献

1) 日高孝次：数値積分法，p. 127.
2) Stress Analysis on Boulder Dam, Boulder Canyon Project., U.S.B.R.
3) M.J. Turner; R.W. Clough; H.C. Martin, and L.J. Topp : Stiffness and deflection analysis of Complex structures, J. Aero. Sci., 23, p. 805, 1953.