数値解析法講座 2
基礎編
偏微分方程式

伊藤 剛*

1. はじめに

偏微分方程式の数値解法には体系づけられた方法がなく，とくに非線形の方程式——これがわれわれにとって一番重要なのだが——収束，安定の理論が明らかではない。

したがって，求められた数値解法が果たして真の解であるかどうか，確かめられない悩みがある。さて，その数値解法であるが，偏微分方程式の形によって全くちがう。長円形とその他の放物形，双曲形とで全くちがっている。ゆえに，偏微分方程式の形の定義から説明を始めることにする。

2. 偏微分方程式の分類

ここでは，実際にあたって最も重要な2階偏微分方程式についての分類を述べる。

(1) 線形，非線形の区別

x, y を独立変数，u を従属変数とする2階偏微分方程式は一般に次のように表わされる。

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

ここに，$a, b\sim g$ は独立変数 x, y だけを含む関数であるとき，すなわち u とその導関数については1次であるとき，式 (1) を線形であるという。

さらに，$a, b\sim g$ のなかに u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ だけは含むが，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ …… なる2階偏微分係数を含まないものを**準線形** (quasi-linear) という。

上述の特点のないものを**非線形**という。

* 正会員 工博 新潟大学教授 工学部土木工学科

(2) 偏微分方程式の形

式 (1) は，係数の関係 b^2-4ac の正負により，次のように分類される。

$$\left.\begin{array}{ll}
b^2-4ac>0 & \text{双曲形 (Hyperbolic)} \\
 & \text{例}\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\
b^2-4ac=0 & \text{放物形 (Parabolic)} \\
 & \text{例}\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\
b^2-4ac<0 & \text{長円形 (Elliptic)} \\
 & \text{例}\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0
\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

微分方程式は必ずしも式 (1) のようには表わされず，連立一次偏微分方程式の形で表わされるものがある。たとえば，流れの方程式は，次のごとく表わされる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad \text{連続式}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g\left[i-\frac{n^2u|u|}{R^{4/3}}\right] \qquad \text{運動方程式}$$

このような場合，次のように判定できる。すなわち，連立式を

$$\left.\begin{array}{l}
a_1u_x+b_1u_y+c_1v_x+d_1v_y=f_1 \\
a_2u_x+b_2u_y+c_2v_x+d_2v_y=f_2
\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

ここに，$u_x=\partial u/\partial x$, $u_y=\partial u/\partial y$, $v_x=\partial v/\partial x$, $v_y=\partial v/\partial y$ とする。この場合，式 (3) の判別式

$$(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)^2 -4(a_1c_2-a_2c_1)(b_1d_2-b_2d_1) \quad\cdots\cdots(4)$$

が

$$\left.\begin{array}{l}
>0 \text{ ならば双曲形} \\
=0 \text{ ならば放物形} \\
<0 \text{ ならば長円形}
\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

という。式 (4) の誘導は，式 (3) に全微分の関係式

$$u_xdx+u_ydy=du,\quad v_xdx+v_ydy=dv \quad\cdots\cdots(6)$$

を加えた4つの式を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{pmatrix} \quad\cdots\cdots(7)$$

とかきかえて，その行列式を0とおけば dy/dx の2次式をうる。すなわち

$$(a_1c_2-a_2c_1)dy^2-(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)dydx +(b_1d_2-b_2d_1)dx^2=0$$

これの判別式が式 (4) で，それが >0 のときは2つの実根，$=0$ のときは等根，<0 のときは2つの複素数の根があることを示す。dy/dx は特有曲線 (characteristic) の方向を意味している。

したがって，式 (2), (5) は，一面，2階偏微分方程式においては，双曲形は2つの特有曲線を，放物形は1つ

をもち，長円形には特有曲線がないことを示している。

3．放物形，双曲形方程式

これらの方程式の数値解法は，差分方程式に近似して計算を進めるのが普通である。差分近似式の形もいろいろ考案されているが，要は convergency, stability の条件が成立し，しかも accuracy がよく，計算時間の短いのが最良である。ある種の問題は，もし計算時間が多くかかり，経費がかかるならば，計算をやめて模型実験をしたほうが得だということもある。

非線形の方程式では，convergency, stability の条件が明らかでないので，最適と思われる差分近似式で計算を試み，悪いところ——stability——がみつかったならば人工粘性項を加えたり，平滑化をしたりしてだましだまし答を得るというのが普通である。そうやって出た答も，果たして真の答であるかどうかチェックを要する。だから，電子計算機は計算時間が早く万能であるというのは，まだまださきのことで，最適の差分式をみつけるのに3年ぐらいかかることすらある。

その原因は，一つに convergency, stablity の問題にかかっている。

（1） 放物，双曲形偏微分方程式の差分近似 —Explicit

まず，放物形の代表例として，次のような拡散方程式の初期値問題を取り上げる。初期値問題とは，初期条件と境界条件が与えられて，解を求める問題である。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots\cdots (8)$$

初期条件として

$$t=0: u=f(x) \cdots\cdots (9)$$

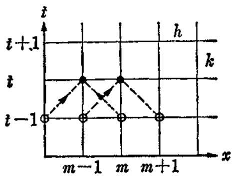
境界条件として

$$x=0: u=g(x),\ x=1: u=h(x) \cdots\cdots (10)$$

が与えられているとする。h を距離 x のきざみ幅，k を時間 t のきざみ幅とし，$u(x+h)$, $u(x-h)$ を x につきテーラー展開して差引きすれば次式をうる。

$$u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)$$
$$=h^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{h^4}{12}\cdot\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \cdots\cdots (11)$$

一方，次式を t についてテーラー展開すれば



図—1

$$u(x,t+k)-u(x,t)=k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$
$$+\frac{k^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} \cdots\cdots (12)$$

いま

$$r=k\frac{c^2}{h^2} \cdots\cdots (13)$$

とおき，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^4\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，……の関係を利用すれば次式をうる。

$$u(x,t+k)=ru(x+h,t)+(1-2r)u(x,t)$$
$$+ru(x-h,t)+\frac{rh^4}{12}(6r-1)\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$$
$$+\frac{r^3h^6}{6}\cdot\frac{\partial^6 u(x,t)}{\partial x^6}-\frac{rh^6}{360}\cdot\frac{\partial^6 u(x,t)}{\partial x^6}$$
$$\cdots\cdots (14)$$

式 (14) は，式 (11) に $r=kc^2/h^2$ を乗じて，式(12)から引くと得られる。

式 (14) をみると，$t=t$ 上の各 x における $u(x,t)$ の値がわかると，時間が k だけ進んだ $u(x,t+k)$ が求められることを示している。実際の数値計算には，式(14)の第4項以下を切捨てて（truncation error が生ずる）

$$u(x,t+k)=ru(x+h,t)+(1-2r)u(x,t)$$
$$+ru(x-h,t) \cdots\cdots (15)$$

とする。この式により，初期値すなわち $t=0$ のときの x の各値を知れば，t が k だけ進んだときの $u(x,k)$ の値を求めることができる。順次 t を k ずつ進めてゆき欲する時刻まで全部 u を求めることができる。この計算で，$x=0$ における各時間の u の値が与えられていなければならない。このことは図—1 をみればわかる。この図は○印の値がわかれば●のところの値が求められることを示す。図によれば三角形の scheme であるからはじの u の値は式 (15) からは出てこない。

なお，差分式 式 (15) において，$r\left(=k\dfrac{c^2}{h^2}\right)$ は convergency, stability の関係から次の条件が必要である。その理由は本講座の応用編のところで述べる。

$$r<\frac{1}{2} \cdots\cdots (16)$$

次に，双曲形の代表例として一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots\cdots (17)$$

の初期値問題を取り上げる。c は波動の伝ぱ速度である。

初期条件として

$$t=0 \text{ のとき } u=f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=g(x)\ (0<x<1)$$
$$\cdots\cdots (18)$$

境界条件として

$x=0$ で $u=a(t)$, $x=1$ で $u=b(t)$ ……………(19)

前と同様にして式 (17) を差分式におきかえると

$$u_{m,n+1}-2u_{m,n}+u_{m,n-1}=\lambda^2(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n}) \quad \cdots\cdots(20)$$

ただし，式中の m, n なる記号は，たとえば

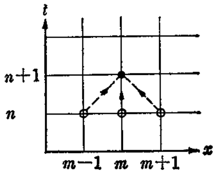
$u_{m,n+1}$ は $x=mh$, $t=(n+1)k$ における u の値を示す。

また $\lambda=kc/h$ とする。

式 (20) に対応する差分スキーム (scheme) を**図—2**に示す。**図—1** と同様に，○印のところの u の値から，●印の u の値が求められる。この場合

$$\lambda \leqq 1 \quad \cdots\cdots(21)$$

でないと収束 (converge) しない。その理由は，やはり応用編のところで述べる。



図—2

(2) 非線形の双曲形偏微分方程式の差分近似 —Explicit

上記2つの例は，いずれも線形の方程式であった。非線形になると，convergency, stability それに accuracy について明確な理論が確立されていない。ゆえに，いろいろくふうして試算してみて適否を決めている現状である。ここでは，例として不定流の流れの方程式を取り上げる。

連　続　式：$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \quad \cdots\cdots(22)$$

運動方程式：$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}-i+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

式中の記号は次のとおりである。

ω：流積，Q：流量，q：∂x 区間の流入量，h：水位，α：1 に近い係数，n：粗度係数，R：径深

まず，微分方程式を conservation form にかきなおす。conservation form とは U をあるベクトルとしたとき

$$\frac{\partial}{\partial t}U+\frac{\partial}{\partial x}F(U)=0 \quad \cdots\cdots(24)$$

の形で表わした式をいう。

さて，微分方程式を conservation form にかきなおす理由であるが，この形が質量や運動量の保存則を表わす上において正確であるからである。というのは，流れが bore や hydraulic jump のような不連続現象を生ずる場合，その場所でいわゆる "Rankine-Hugoniot" の関係を満足しなければならない。式 (24) の形になっていると，その差分近似式がちょうどこの関係を満足している。

理論の説明をぬきにしていうと

式 (24) の weak solution は，Rankine-Hugoniot の関係

$$S[U]=[F(U)] \quad \cdots\cdots(25)$$

を満足する。ここに

$[F(U)]$ は $F(U(x+0))-F(U(x-0))$ を，S は不連続点が動く速度を表わすものとする。

この辺の理論については，文献[1),2)] を参照されたい。

さて，流れの運動方程式を conservation form にかき直すと[1)]，

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(P/\rho)_b+\frac{Q^2}{\omega}\right]=g\,\omega\left[i-\frac{n^2-Q|Q|}{\omega^2R^{4/3}}\right] \quad \cdots\cdots(26)$$

式中，
$$\left\{\begin{array}{l} P/\rho=gb\dfrac{H^2}{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(P/\rho)_b：\text{幅 } b \text{ を const. として } x \text{ につき微分} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(P/\rho)_b=gbH\dfrac{\partial H}{\partial x}=g\,\omega\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{array}\right. \quad \cdots\cdots(27)$$

ここで，式 (22)，(23) を Modified Two-Step Lax-Wendroff 法で差分化する例を上げる。詳細は文献 1) 参照。

この差分法の精度 (accuracy) は 2 で他の式よりよく安定条件は次のようである。

$$k \leq \frac{h}{|u|+\sqrt{gz}} \quad \cdots\cdots(28)$$

$$\frac{\omega_{n+(1/2),m\pm(1/2)}-(\omega_{n,m}+\omega_{n,m\pm1})/2}{k/2}+\frac{Q_{n,m+1}-Q_{n,m}}{h}=q_{n,m\pm(1/2)} \quad \cdots\cdots(29)$$

$$\frac{Q_{n+(1/2),m\pm(1/2)}-(Q_{n,m}+Q_{n,m\pm1})/2}{k/2}+\frac{(P/\rho)_{n,m+1}-(P/\rho)_{n,m}+(Q^2/\omega)_{n,m+1}-(Q^2/\omega)_{n,m}}{h}=g\cdot\omega_{n+(1/2),m+(1/2)}\left[i-\frac{n^2u_{n+(1/2),m\pm(1/2)}|u_{n,m+(1/2)}|}{(R_{n+(1/2),m+(1/2)})^{4/3}}\right] \quad \cdots\cdots(30)$$

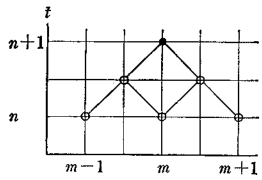
$$\frac{\omega_{n+1,m}-\omega_{n,m}}{k}+\frac{1}{h}[Q_{n+(1/2),m+(1/2)}-Q_{n+(1/2),m-(1/2)}]=0 \quad \cdots\cdots(31)$$

$$\frac{Q_{n+1,m}-Q_{n,m}}{k}+\frac{(P/\rho)_{n+(1/2),m+(1/2)}-(P/\rho)_{n+(1/2),m-(1/2)}+(Q^2/\omega)_{n+(1/2),m+(1/2)}-(Q^2/\omega)_{n+(1/2),m-(1/2)}}{h}$$

$$=g\cdot\omega_{n+1,m}\left[i-\frac{n^2u_{n+1,m}|u_{n+(1/2),m}|}{(R_{n+1,m})^{4/3}}\right]\cdots\cdots(32)$$

この式は，１ステップ進めるのに途中 1/2 ステップの中間値を計算する技巧を使い，安定度をよくしてある。また，同様な理由で，式 (30) の右辺の時間ステップを $|u|$ 以外の項だけ 1/2 ステップ進めてある。

Modified Two-step Lax-Wendroff 法で計算を進める場合，その scheme は図—3 のようになり，x 方向の両端あるいは，そのいずれかが境界条件として与えられていればよいが，そうでない場合は，多少精度はおちても他のボックス形の scheme を使って特別に計算をする。ボックス形の scheme として Friedrichs scheme を使う例を示すと，次のようになる。



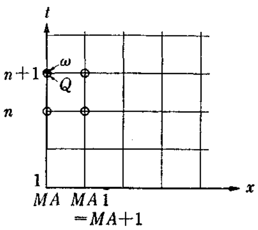
図—3

$$\frac{\omega_{n+1,MA}-\omega_{n,MA}}{k}+\frac{\omega_{n+1,MA1}-\omega_{n,MA1}}{k}$$

$$+\frac{Q_{n+1,MA1}-Q_{n+1,MA}}{h}+\frac{Q_{n,MA1}-Q_{n,MA}}{h}$$

$$=0\cdots\cdots(33)$$

この式は図—4 に示す端 MA の $\omega_{n+1,MA}$ を求める式で，$Q_{n+1,MA}$ は境界条件として与えられ，$MA\,1$ 以東の $(n+1)$ レベルの ω, Q の値は Lax-Wendroff 式から求められる。



図—4

流れの式を差分化する形として，他にもいろいろな形が使われている。モデル方程式を

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\cdots\cdots(34)$$

として，各種の差分近似式をあげてみる。u：定数

① $\dfrac{\rho_{n+1,m}-\rho_{n,m}}{k}=-\dfrac{u}{2h}(\rho_{n,m+1}-\rho_{n,m-1})\cdots\cdots(35)$

この式は不安定であるので使えない。

② Friedrichs' scheme：$\rho_{n+1,m}=(\rho_{n,m+1}+\rho_{n,m-1})/2$

$$-\frac{\mu}{2}(\rho_{n,m+1}-\rho_{n,m-1})\cdots\cdots(36)$$

ただし，$\mu=u\dfrac{k}{h}$

この式は accuracy は１で $\mu\leq 1$ のとき安定。

③ Staggered scheme：$\rho_{n+1,m}=\rho_{n,m}$

$$-\mu(\rho_{n+(1/2),m+(1/2)}-\rho_{n+(1/2),m-(1/2)})\cdots\cdots(37)$$

これは accuracy 2 で $|\mu|\leq 1$ で安定。

④ Leaf-frog 差分法：$\rho_{n+1,m}=\rho_{n-1,m}$

$$-\mu(\rho_{n,m+1}-\rho_{n,m-1})\cdots\cdots(38)$$

（3） 2 変数の偏微分方程式—Explicit

まず，次の記号を使うことにする。

$$\left.\begin{aligned}\delta y_n&=y_{n+(1/2)}-y_{n-(1/2)}\quad\text{中心差分}\\ \delta^2y_n&=\delta\,y_{n+(1/2)}-\delta y_{n-(1/2)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(39)$$

いま，例として Laplace の演算子を差分近似することを試みる。

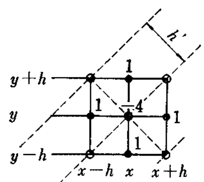
$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cdots\cdots(40)$$

において，x, y 方向の刻み幅を h とすると，Stirling の補間公式を微分したものから次の近似式が得られる。

$$\nabla^2=\frac{1}{h^2}\left[\delta^2{}_x+\delta^2{}_y-\frac{1}{12}(\delta^4{}_x+\delta^4{}_y)+\cdots\right]\cdots(41)$$

右辺（ ）内の第２項までとると，∇^2u は次のようになる。

$$\nabla^2u=\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)$$
$$+u(x,y-h)-4n(x,y)]+0(h^2)\cdots\cdots(42)$$



図—5

これを，scheme で表わすと図—5 のようになり，x，y 点における u の値の係数は，−4，他は１である。

式(42)の〔 〕内の演算子を H で表わすと，次のように表わせる。

$$\nabla^2u=Hu+0(h^2)\cdots\cdots(43)$$

H なる演算子は記号的に次のようにかける。右辺の四角は Stencil と呼ばれる記号である。

$H=$

	1	
1	−4	1
	1	

関数 u の Laplace 演算子は，座標系には関係なく成立するので，座標系を 45° 回転し，図—5 の点線のようにすると図の○印の点間の関係が得られる。ただし，この

場合，刻み幅 h' は $\sqrt{2}\,h$ となる。したがって，式(47)と同形の式をつくると

$$\nabla^2 u=\frac{1}{2h^2}[u(x-h,y+h)+u(x+h,y+h)$$
$$+u(x-h,y-h)+u(x+h,y-h)$$
$$-4u(x,y)]+0(h^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

ここに，$2h^2=h'^2$ であることに注意。

右辺の〔 〕内の演算子を $2X$ で表わすと

$$\nabla^2 u=\frac{1}{h^2}Xu+0(h^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

Stencil は

$$2X=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\ \hline & -4 & \\ \hline 1 & & 1\\ \hline\end{array}$$

前の H と X とを組み合わせると新しい演算子が得られるがこれを K とする。

$$K=4H+2X=6h^2\nabla^2+0(h^4) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

すなわち

$$K=\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 4 & \\ \hline 4 & -16 & 4\\ \hline & 4 & \\ \hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 1\\ \hline & -4 & \\ \hline 1 & & 1\\ \hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 1\\ \hline 4 & -20 & 4\\ \hline 1 & 4 & 1\\ \hline\end{array}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

K は前の H よりも精度がよくなっている。

（4） Implicit Scheme

いままでの差分式はみな未知数が左辺にあり，右辺には既知数だけしかなかった。したがって，初期値から計算をはじめ，最後まで一本調子で進むことができる。このような差分式を Explicit Scheme という。Modified Lax-Wendroff 法の差分式では，式 (31) でみるように右辺に未知数 $u_{n+1,m}$ が表われるが，整理すれば未知数は左辺にまとめることができるから，やはり explicit である。Implicit Scheme とは，右辺にも未知数が残っている形のものをいう。次の式はその一つの例で，この形を Crank-Nicholson 形という。

$$u_{m,n+1}-u_{m,n}=r[\alpha(u_{m+1,n+1}-2u_{m,n+1}+u_{m-1,n+1})$$
$$+(1-\alpha)(u_{m+1,n}-2u_{m,n}+u_{m-1,n})] \quad \cdots\cdots\cdots(48)$$

ここに，α は定数，$r=k/h$ である。

この式の安定条件は次のとおりである。

$$\left.\begin{array}{l} 0\leqq\alpha<\dfrac{1}{2}\text{のときは}\quad r\leqq\dfrac{1}{2-4\alpha}\\ \dfrac{1}{2}\leqq\alpha\leqq1\ \text{のとき}\quad\text{無条件}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(49)$$

式 (49) を解くには，連立方程式として解いてゆかねばならず，大変な労力を要する。その不便を防ぐために，各時間ステップごとに何回か繰返し計算をして，ステップごとに値を求めてゆくやり方もある。そうなれば計算方法は explicit となっている。ちょうど，常微分方程式の数値解に使う“予測子—修正子”のやり方と同様である。詳細は文献[1]を参照されたい。

（5） 特性曲線法

双曲形2階偏微分方程式には，2本の特性曲線が存在する。特性曲線の数学的理論は数学の専門書[3]にゆずりここでは特性曲線を利用して双曲形の方程式の数値解法を述べる。

まず，次のような双曲形の2階準線形偏微分方程式を考える。

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+e=0 \quad \cdots\cdots(50)$$

双曲形であるから $b^2-4ac>0$ である。式 (50) の特性曲線の方向は

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

の2つの根として与えられることは，数学書の教えるところである。そして，また特性曲線の方向に沿っては次の式が成立する。

$$a\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}+c\frac{dq}{dx}+e\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(52)$$

ただし，$p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$

これをかきかえると次式をうる。

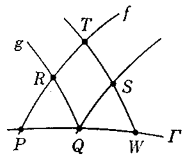
$$a\frac{dy}{dx}dp+cdq+edy=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

いま，式 (51) の2つの実根を次のようにおく。

$$\frac{dy}{dx}=f,\quad \frac{dy}{dx}=g\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

これは特性曲線の方向を与える。

図—6 において，Γ を特性曲線でない一つの曲線とする。ここで，近似的に PR, QR を勾配 f_P, g_Q をもつ直線と考えると，式 (54) は次のように近似される。



図—6

$$y_R-y_P=f_P(x_R-x_P) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

また，$y_R-y_Q=g_Q(x_R-x_Q) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$

この式では，x_R, y_R が未知数で他は既知数である。

式 (53) で，$\dfrac{dy}{dx}$ を f または g とおくことにより

$$afdp+cdq+edy=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$
$$agdp+cdq+edy=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

式 (57) は PR に沿う，式 (58) は QR に沿う関係式

であり，それぞれ次のように近似される。

$$a_{P}f_{P}(p_{R}-p_{P})+c_{P}(q_{R}-q_{P})+e_{P}(y_{R}-y_{P})=0 \quad \cdots\cdots(59)$$

$$a_{Q}g_{Q}(p_{R}-p_{Q})+c_{Q}(q_{R}-q_{Q})+e_{Q}(y_{R}-y_{Q})=0 \quad \cdots\cdots(60)$$

この2式においては，p_R, q_R が未知数である。

以上4式から，P, Q から引かれた2つの特性曲線 f, g の座標 x_R, y_R と R 点における p, q の値 p_R, q_R が求められ，一方，R 点における u の値は次の式から求められる。

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial g}dy=pdx+qdy$$

この式において p, q の値は P, Q 2点の値の平均値を使う。すなわち

$$u_R-u_P=\frac{1}{2}(p_P+p_R)(x_R-x_P)+\frac{1}{2}(q_P+q_R)(y_R-y_P) \quad \cdots\cdots(61)$$

ここに，求められた u_R の値は第一近似値ともいうべき値であるから，さらに精度をあげるために繰返し計算を行なう。すなわち，いま求められた f_R, q_R の値を使って y_R, x_R の値を求めなおす。

$$y_R-y_P=\frac{1}{2}(f_P+f_R)(x_R-x_P) \quad \cdots\cdots(62)$$

また，$y_R-y_Q=\frac{1}{2}(g_Q+g_R)(x_R-x_Q)$ $\cdots\cdots(63)$

次に，いま求めた y_R, x_R と，さきに求めた R 点における a, c, e, p, q 等の値を使い，次式により p_R, q_R の値を求めなおす。

$$\frac{1}{2}(a_P+a_R)\cdot\frac{1}{2}(f_P+f_R)(p_R-p_P)+\frac{1}{2}(c_P+c_R)(q_R-q_P)+\frac{1}{2}(e_P+e_R)(y_R-y_P)=0 \quad \cdots\cdots(64)$$

$$\frac{1}{2}(a_Q+a_R)\frac{1}{2}(g_Q+g_R)(p_R-p_Q)+\frac{1}{2}(c_Q+c_R)(q_R-q_Q)+\frac{1}{2}(e_Q+e_R)(y_R-y_Q)=0 \quad \cdots\cdots(65)$$

新しく求めた x_R, x_P, p_R, q_R を使い，式 (61) によりさらに精度の高い u_R の近似値をうる。

このようにして，図―6 の S 点の u_S を求め，順次 u_T と特性曲線の交点における値を求めてゆく。P が特性曲線である場合には，上述の議論は変えなければならないが，ここでは省略する[4]。

特性曲線による数値計算は，このように2つの特性曲線の交点上の u の値が計算される。上述の Explicit, Implicit の差分法のように，四角に区切ったメッシュ上の関数値を求めるには按分等によってもう一度計算しなおさなければならない。

4. 長円形方程式

長円形方程式を解く場合，まず境界条件の与え方が重要である。すなわち，計算をする領域の境界において，関数 u の値が与えられる“ディリクレ (Dirichlet) の問題と，境界における関数の法線方向の $\partial u/\partial n$ が与えられる”ノイマン (Neumann) の問題などがある。ここでは，例としてディリクレの問題を取り上げて説明することにする。

(1) 長円形方程式の差分近似

例として Laplace の方程式

$$\nabla^2 u=0 \quad \cdots\cdots(66)$$

を満たす u が，境界上で与えられた値 b_r ($r=1, 2, \cdots$) をとるものとする。そして，図―7 のように境界と，節点 (mesh) に番号をつける。

前の式 (46) の H を用いると次の連立方程式を得る。

$$\left.\begin{array}{ll}
4u_1-u_2\quad -u_5 & =b_1+b_{12}\\
-u_1+4u_2-u_3\quad -u_6 & =b_2\\
-u_2+4u_3\quad -u_7 & =b_3+b_4\\
4u_4-u_5 & =b_{10}+b_{11}+b_{12}\\
\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots & \\
-u_5\quad +4u_8-u_9 & =b_9+b_{10}\\
-u_6\quad -u_8+4u_9-u_{10} & =b_8\\
-u_7\quad -u_9+4u_{10} & =b_6+b_7
\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(67)$$

ここで，行列 A を考え，次のようにおく。

$$A=\begin{pmatrix}
4 & -1 & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(68)$$

式 (66) 右辺を成分とするベクトルを $\boldsymbol{b}$ とかくと，次式を得る。

$$A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u}=A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \cdots\cdots(69)$$

これを解くことになるが，それには A の逆行列 A^{-1} の計算が必要で，なかなか大変な仕事である。応用編の大行列の計算法のところで具体的なやり方を述べるが，A

なる行列の性質として次のことがあげられる。

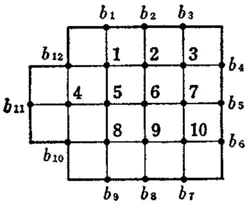
① Aは境界値には無関係である。

② Aは対称である。

③ Aは正則行列である。

（2） 弛緩法（relaxation method）

図—7 のような図をかき，各節点にまず第一近似値を与え，式 (67) を満たすよう修正を加えてゆく方法であるが，計算機むきでないので省略する。数値計算の本にはどれにでもでている。



図—7

（3） 反覆法：Liebmann 法，加速 Liebmann 法

Poisson の方程式

$$\nabla^2 u=-\rho(x, y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

を例として解いてみる。**図—7** のような図を頭において説明してゆく。式 (37) で使った演算子 H を使い，節点 (i, j) における差分方程式をかいてみる。

$$u_{i-1, j}+u_{i, j-1}+u_{i+1, j}+u_{i, j+1}-4 u_{i, j}=-h^2\rho_{i, j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(71)$$

かきなおして

$$u_{i, j}=\frac{1}{4}(u_{i-1, j}+u_{i, j-1}+u_{i+1, j}+u_{i, j+1}+h^2\rho_{i, j}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

さて，計算を始めてから次第に i, j をふやしてゆき，いま，ちょうど $u_{i,j}$ を計算する段階にきたとする。そして，式 (71) の右辺において，あらゆる点の u の値は第 k 近似値まで計算が完了し，次に $u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$ はさらに第 $(k+1)$ 近似値が求まっており，いま $u_{i,j}$ の第$(k+1)$近似値を計算する段階だとする。u の第$(k+1)$近似値を一般に $u^{(k+1)}$ とかくことにすれば，次式をうる。

$$u_{i, j}{}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(u_{i-1, j}{}^{(k+1)}+u_{i, j-1}{}^{(k+1)}+u_{i+1, j}{}^{(k)}+u_{i, j+1}{}^{(k)}+h^2\rho_{i, j}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

この計算方法は，連立一次方程式の Gauss-Seidel 法にあたっている。

この方法を Liebmann 法という。この方法でも計算量はなかなか膨大なので，ちかごろ加速 Liebmann 法というのが用いられている。

Liebmann 法では，$u_{i,j}{}^{(k+1)}$ と $u_{i,j}{}^{(k)}$ との差

$$R_{i, j}{}^{(k)}=\frac{1}{4}\left\{u_{i+1, j}{}^{(k+1)}+u_{i, j+1}{}^{(k+1)}+u_{i-1, j}{}^{(k)}+u_{i, j-1}{}^{(k)}+h^2\rho_{i, j}\right\}-u_{i, j}{}^{(k)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

をそのまま用いて

$$u_{i, j}{}^{(k+k)}=u_{i, j}{}^{(k)}+R_{i, j}{}^{(k)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(75)$$

としている。それが，式(73)であるが，加速 Liebmann 法ではある定数 α を用いてこの式を次のように修正している。すなわち

$$\begin{aligned} u_{i, j}{}^{(k+1)} &= u_{i, j}{}^{(1)}+\alpha R_{i, j}{}^{(k)} \\ &= (1-\alpha) u_{i, j}{}^{(k)}+\frac{1}{4}\alpha\left\{u_{i-1, j}{}^{(k+1)}+u_{i, j-1}{}^{(k+1)}+u_{i+1, j}{}^{(k)}+u_{i, j+1}{}^{(k)}+h^2\rho_{i, j}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(76) \end{aligned}$$

として，第 $(k+1)$ 近似値 $u_{i,j}{}^{(k+1)}$ を計算する方法である。

定数 α の取り方として

$$\alpha=2(1+\sqrt{1-\lambda^2{}_n})^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

ここに，λ_n は式 (73) を $u=Lu+1/4\, h^2\rho$ の形にかいたときの，行列 L の最大固有値である。詳細は文献[5]を参照されたい。一般に α は

$$1 \leqq \alpha \leqq 2$$

の範囲内にあり，$\alpha \fallingdotseq 2$ のときが最適といわれている。式 (77) の計算に必要な λ_n を求めるのは，これまた容易ではない。そう正確な値でなくとも，近似値でさしつかえない。

おわりに

やさしく，しかも簡単にとの主旨を体してかいてきたけれども，偏微分方程式の数値解法のところに至って少し破綻をきたしてきたようだ。常微分方程式と同様に，応用編と併続していただかないとわかりにくいのではあるまいか。また，本文中差分式の誘導を省略したので，ハンドブックのようになってしまった。なお，偏微分方程式で一番重要な，収束 (convergency)，安定 (stability)，とくに Courant-Friedrichs-Lewy の条件，精度 (accuracy) の説明を一切応用編にゆずり，そこでていねいに説明することにした。それから，双曲形方程式でよく使われる特性曲線法も，特性曲線の理論を少し思い出してから本文を読まれることをお願いしたい。

参考文献

1) 伊藤剛編：数値計算の応用と基礎，アテネ出版
2) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton : Difference Method for Initial-Value Problems
3) 犬井鉄郎偏：微分方程式とその応用，コロナ社
4) Isaacson & Keller : Analysis of Numerical Method
5) 尾崎弘・萩原宏：数値計算法，電気数学 Ⅲ