

# 講座

## ベルヌーイの定理 The Bernoulli's Theorem その歴史と今後の応用方向 その2 ハンター・ラウス\* Hunter Rouse

### 1. 前回のあらまし

本講座の“その1”では、ベルヌーイの定理の発見にまつわる歴史的な話題に続いて、非圧縮性流体の定常流れに対するオイラーの運動方程式より、ベルヌーイの定理、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} V^2 + \Omega + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

が導かれることを示した。ここに、 $V$  は流線方向の流速、 $\Omega$  は重力ポテンシャル、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $s$  は流線方向の座標である。

式(1)のカッコ内の和をベルヌーイの和といい、 $B$  で表わすと、流れが非回転である場合には、ベルヌーイの和  $B$  は常に一定である。しかし、実際の流れでは、流れが非回転ではなく、このような場合には、流線上の任意の2点間でのベルヌーイの和は、この2点間で生じるベルヌーイの和の変化量  $\Delta B$  を考えると、

$$B_1 = B_2 + \Delta B \dots\dots\dots(2)$$

となる。上式中の  $\Delta B$  は、2点間でのエネルギー損失を表わすとは必ずしもいえず、今回の講座では  $\Delta B$  がどのような量に関係するかを明らかにしてゆく。

### 2. ベルヌーイの和の変化量 $\Delta B$ について

ベルヌーイの和の変化量  $\Delta B$  を検討するために、オイラーの運動方程式を用いる代わりに、ナーヴィエ・ストークス (Navier-Stokes) またはレイノルズ (Reynolds) の運動方程式を用いて行なわれるが、本講座では最も一般的な流体の運動方程式といえるサン・ブナン (Saint-Venant) の方程式を用いる。



サン・ブナンの方程式は、オイラーの運動方程式に、垂直応力と

\* アイオワ大学工学部長、アメリカ工学会アカデミー会員

せん断応力の項を加えた式(3)で与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $u$  は流速、 $\tau$  はせん断応力、 $t$  は時間、 $x$  は座標、 $i, j=1, 2, 3$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向に対応する。

サン・ブナンの式は、ナーヴィエ・ストークスの式に比べて一般的な式であって、流体の粘性すなわち流体の変形によるせん断応力は式(4)、流体の乱れによるせん断応力は式(5)で表わされる。

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots(4)$$

および

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $\mu$  は流体の粘性係数、 $u'$  は流れの乱れによる流速変動成分、一は時間平均を表わす。

式(3)は、テンソルで表わした加速度の方程式で、式(3)の  $x, y, z$  の方向に関する式に、各速度成分を乗じて相加えると、エネルギーに関する式(6)をうる。

$$a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = -u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{a_i}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $V^2 = \sum a_i^2$

式(6)で、 $x$  軸を流線の接線と一致させると、 $x$  方向以外の流速はゼロとなり、流線方向  $s$  に関するエネルギー式(7)をうる。

$$\overline{V} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = -\overline{V} \frac{\partial}{\partial s} \left( \Omega + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\overline{a_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \dots\dots\dots(7)$$

式(7)を流線上の2点、 $s_1, s_2$  間に関して積分すると

$$\int_{s_1}^{s_2} d \left( \frac{1}{2} V^2 + \Omega + \frac{p}{\rho} \right) - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\overline{a_i}}{\rho \overline{V}} \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} ds = 0 \dots\dots(8)$$

よって、2点間のベルヌーイの関係として

$$B_1 = B_2 - \frac{1}{\rho} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\overline{a_i}}{\overline{V}} \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} ds \dots\dots\dots(9)$$

をうる。

式(9)のベルヌーイの関係から、流線上の任意の点  $s_1$  におけるベルヌーイの和は、他の点  $s_2$  におけるベルヌーイの和と、2点間の距離に関する積分項との差に等しいことがわかる。式(9)右辺の負号のついた積分項は、式(2)の  $+\Delta B$  で表わしたものに相当する項である。式(9)右辺の積分項の値は、正または負の値となり、必ずしもエネルギー損失を表わす項ではなく、エネルギーの保存を表わす項 (conservative energy term) といえるものである。

式(9)右辺の第2項、すなわち  $\Delta B$  に相当する項に、次のような方法によって、エネルギー損失を表わす項を導入することができる。すなわち、式(9)右辺第

2項を書き直すと、

$$-\frac{1}{\rho} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\bar{u}_i}{V} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} ds = -\frac{1}{\rho} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{V} \frac{\partial (\bar{u}_i \tau_{ij})}{\partial x_j} ds + \frac{1}{\rho} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\tau_{ij}}{V} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} ds \dots \dots \dots (10)$$

式(10)の左辺は、流線上の2点間で、流体のせん断力によってなされた単位時間あたりの仕事を、また式(10)の右辺第1項は、流線上の2点間でなされた単位時間あたりの全仕事、第2項は2点間での単位時間あたりのエネルギー損失を表わしている<sup>2)</sup>。

式(10)を式(8)に代入すると、ベルヌーイの和は、運動エネルギーの項  $K$ 、ポテンシャルエネルギーと圧力エネルギーの和である測圧管エネルギーの項  $P$ 、周囲の流体より伝達されるエネルギー伝達の項  $T$ 、および損失エネルギーの項  $L$  の4個の項からなっていることがわかる。すなわち

$$B = K + P + T + L = \text{const.} \dots \dots \dots (11)$$

ベルヌーイの和は、エネルギーの損失と周囲の流体へのエネルギーの伝達の2つの事柄によって変化する。流線上でのエネルギーの増減は、エネルギーの損失より伝達されるエネルギーが大きいか、伝達エネルギーより損失エネルギーが大きいかに関係する。

テンソル形式で書かれた式(10)の、伝達エネルギーと損失エネルギーを直角座標を用いて書き直すと

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{V} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}u'^2 + \bar{v}v'^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}u'v' + \bar{v}v'u') \right] ds \dots \dots \dots (12)$$

$$L = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{V} \left[ u'^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v'^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u}'v' \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] ds \dots \dots \dots (13)$$

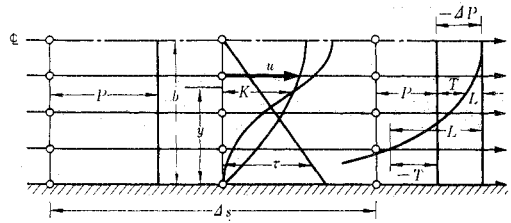
となる。ここに、 $u, v$  はそれぞれ、 $x, y$  方向の流速、 $\bar{u}$  は平均流速成分、 $'$  は乱れによる変動流速成分をあらわす。

伝達エネルギー  $T$  と損失エネルギー  $L$  は、式(12)と(13)とに示されるように非常にその表示が複雑となり、それらの項の大きさを検討するためには、流速分布、圧力分布、乱れの分布に関して十分なデータが必要となる。そこで、アイオワ大学では、この十数年間にわたり、種々の流れを対象に、実験による測定や計算によって、 $T$  と  $L$  の項に対する検討を行ってきた。それにもかかわらず、実験による測定結果なしでは、今日でも計算のみで、これらの項を求めることはできない。

### 3. 実験によるベルヌーイの和に関する検討

1本の流線上のすべての点では、式(11)で与えられるように、ベルヌーイの和は一定であると

図-1 2平行境界面間の層流のベルヌーイの和の各項の分布



いうことに基づいて、以下に示す4種類の流れについて、ベルヌーイの和の各項の大きさと、その分布を検討する。

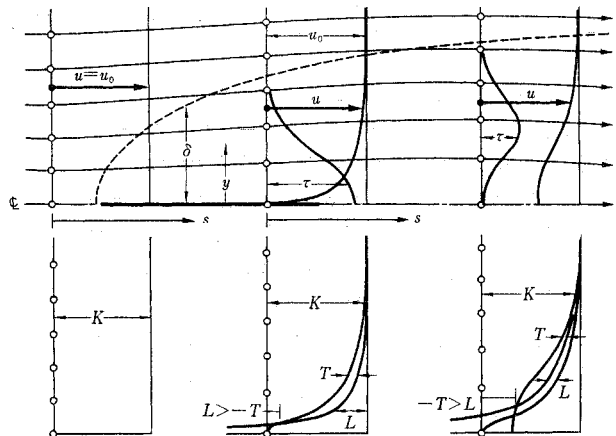
#### (1) 平行境界面間の層流の場合<sup>3)</sup>

図-1は、平行な境界面間を流れる、定常・等流の層流の場合で、このような流れは2境界面の中心線に関して対称となる。この流れの流速分布は、図-1に示すように、水深方向に関して放物線形であり、各流線ごとに流速と運動エネルギーの大きさは異なるが、流れ方向に対しては、流れが等流であることから、流速分布は変化しない<sup>4)</sup>。

測圧管エネルギー項  $P$  は、流れ方向の距離  $4S$  間で生ずる損失のため、下流に向うに従って図-1に示すように減小する。また、 $4S$  間の損失は各流線ごとにその大きさは異なる。流れの中心線と一致する流線上では、エネルギー損失は生じないが、境界面に最も近い流線では、エネルギー損失は最大となる。

ベルヌーイの和の変化量  $\Delta B$  は、すべての流線に関して同一である。このことは、測圧管エネルギーの減小  $\Delta P$  は、すべての流線にとって同一であるから、エネルギー損失の少ない中心線付近の流線より、エネルギー損失の大きい境界面付近の流線にエネルギーの伝達が生じる。そして、このような流れの中のエネルギーの伝達・

図-2 平板上の乱流と、その後流内のベルヌーイの和の各項の分布



損失の機構によって、ベルヌーイの和が、すべての断面に関して一定となる。

### (2) 平板に沿う境界層流れとその後流の場合<sup>3)</sup>

流れの状態が乱流の場合について考える。この場合、乱れは十分発達しており、流れの中に存在する層流部分の効果は無視しうほどの小さく、乱れによるエネルギー損失のみを考えることにする。

図-2 は、薄い短い平板が存在する場合の流れ、すなわち一つの境界層流れの場合である。同図においては、鉛直方向寸法は誇張して描かれている。平板付近ではエネルギー損失が生じるため、平板のある区間では、エネルギーの伝達が平板方向に向かって生じる。このことは、図-1 の層流の場合と同じで、異なる点は粘性によらず、乱れによってエネルギー伝達が生じることである。

平板上の流速はゼロであり、流れの外部に向って流速は増大している。平板の区間を流れが通過すると、平板後方の流れは後流 (wake) となり、外側の流れの流速欠損領域は下流に向って従って拡大するが、流れの中心線 (平板を含む線) 付近の流速は増大してゆく。このような後流では、速度欠損を生じている領域に向って、エネルギー損失を補償するために、外側の流れよりエネルギーの伝達がある。また、流速が増大する中心線付近では流れの加速のため必要とするエネルギーが外部から補給される。このような場合には、先に述べたように、ベルヌーイの和の変化量  $\Delta B$  は、明らかに正の量ではなくて負の量である。

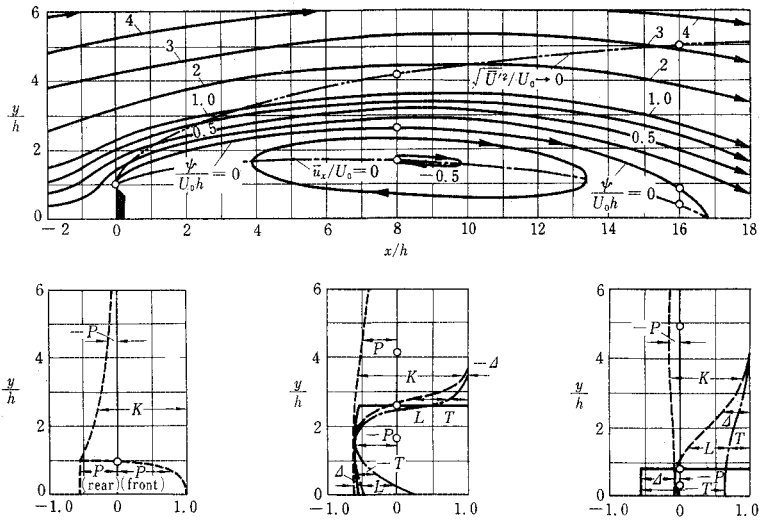
### (3) はく離流線の生ずる場合

次に示す測定結果 (図-3) は、水路面上に立てられた直立板背後の流れの場合である。この測定は、北海道大学の有江幹男教授がアイオワ大学に留学中になされたものである。

直立板背後の流れは、今まで述べてきた流れの場合と異なり、直立板よりのはく離流線と渦領域がある。そして、この渦領域内でのエネルギーの伝達・損失は、非常に興味のある問題でもある。

直立板背後に生じる渦領域へは、流れのはく離面を通して、渦の外側の流れよりせん断力によってエネルギーの補給が行なわれる。図-3 の直立板背後3地点にお

図-3 直立板背後に生ずる流れのはく離領域内のベルヌーイの和の各項の分布 (図中の  $\Delta$  は  $\Delta B$  の略記である)



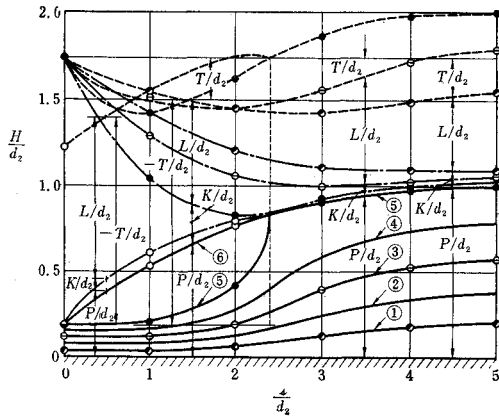
る各流線に対するベルヌーイの和の各項の分布図に示されるように、直立板背後の乱流拡散層外 (図-3 中の  $\sqrt{u^2}/U_0 \rightarrow 0$  より上方の流れの領域) では、ベルヌーイの和の式 (11) の  $K+P$  は一定で、ベルヌーイの和の変化量  $\Delta B = T+L$  は、無視しうほどの小さい。渦領域外の乱流拡散層 (図-3 中の  $\sqrt{u^2}/U_0 \rightarrow 0$  と  $\Psi/U_0 h = 0$  との領域) では、 $L$  と  $T$  はいずれも正の値で、ベルヌーイの和はエネルギー伝達と乱れの生成のために、各流線に沿って減少するが、この領域のすべての点では式 (11) の const. は変わらない。直立板背後の渦領域内では渦周辺の流れに比べてベルヌーイの和は小さく、負の値にまで低下している。このことは、渦領域内でのベルヌーイの和は、流線がすべて  $u_x/U_0 = 0$  の点を通過することから、この点の圧力によって支配される。そして、この領域へは外側の流れからのエネルギーの伝達のため、 $T$  は負の量となる。渦領域内の流線は、それぞれ閉じているから、各流線に沿ってのベルヌーイの和は一定値となる。これは、渦領域の上半分の部分では、乱れの生成を経て失われるエネルギー量より大きいエネルギー伝達があり、渦の下半分の部分では、この様相は逆転する。

### (4) 跳水の場合

図-4 は水平水路床上の跳水に関する研究結果である。跳水の場合も水平渦を生じ、渦の中では流体は回転運動を行なっている。そして、この水平渦の中では、各流線ごとに、それぞれベルヌーイの和の値は連続に変化している。

跳水での流れは全く非一様で、各流線ごとのベルヌーイの関係が異なっているため、図-4 をうるためには、

図-4 水平水路床の上の跳水でのベルヌーイの和の各項の分布



実験による測定と、それに基づく計算を行なわねばならなかった。図-4に示される、跳水中の各流線に対する、 $K, P, T, L$  の分布は、①の流線に対しては、 $s/d_2$  の値の4と5の間に、③の流線に対しては3と4の間に、⑤の流線に対しては1と2の間に、水平渦表面の流線⑥に対しては0と1の間にそれぞれ記してある。ここに、記号  $d_2$  は下流水深を表わす。

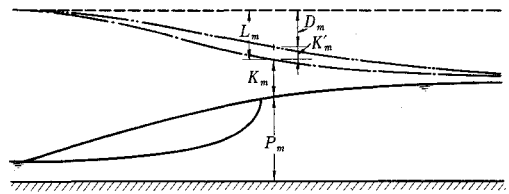
図-4で、水路床に最も近い①の流線に関する、ベルヌーイの和の各項の分布は、全く普通の分布を示しているが、水路床より比較的離れた流線、たとえば③の流線に関しては、流れの下流部でエネルギー伝達の方法が変わって、下方からエネルギーが補給されている。この傾向は、跳水の主流の水面と一致する流線⑥では顕著で、この場合には、水平渦下流端に生じる淀み点より下流では、下方の流線からエネルギーが補給されている。この流れの下方より補給されるエネルギーは、この部分の流速を跳水下流での平均流速にまで加速することに役立っている。

跳水の水平渦の領域は、その中で失うエネルギーを補うため、下方の流れからエネルギーの伝達を受けねばならない。また、水平渦内の流線は閉曲線であり、これらの各流線に対するベルヌーイの和は一定でなければならない。

跳水の水平渦の最上流端では、跳水の主流と水平渦の流線は同一のものとなり、その点での  $P, K, L$  の大きさは等しくなる。水平渦の最上流端は、水平渦表面と一致する流線にとっては淀み点であり、その全水頭は、 $(H_0)_v = P_0$ 、主流のこの点での全水頭は  $H_0 = P_0 + K_0$  で、両方のエネルギーレベルの差に対応したエネルギー伝達が生じる。

読者の皆さんは、“ベルヌーイの定理を複雑化して、何の役に立つのか”と考えるであろうが、流れの中の現象を細部にわたって知ろうとするなら、ベルヌーイの定

図-5 跳水の主流に対して平均化したベルヌーイの関係



理を複雑なものとしなければならない。

他方、式(11)で与えられるベルヌーイの関係を流線と直角方向に積分すると、エネルギー伝達の項がゼロとなり、より簡単なベルヌーイの関係をうる。そして、もし流れの境界面が静止している場合には、境界面より流体へのエネルギーの伝達がないことから

$$B_m = K_m + P_m + L_m = \text{const.} \dots\dots\dots (14)$$

図-5<sup>9)</sup>は、図-4の水平水路床の上の跳水の場合について式(14)の関係を示したもので、この式(14)の関係は、流れ全体に適用される、よく知られているベルヌーイの関係と同じものである。

もし、流れの中の状態、特にエネルギー損失の機構をより明らかにしようとする、損失エネルギーの平均流に対する損失と乱れの生成に寄与するエネルギーとなる。

乱れのエネルギーは最終的に熱となって消散し、任意断面での平均流に対するエネルギー損失項は、乱れのエネルギーと、熱に変換してゆくエネルギーからなっている。

もし、上述のエネルギー損失の機構を、ベルヌーイの関係に取り入れるるとすると、図-4からもっと複雑なベルヌーイの和の各項の分布を明らかにする必要がある。

流体の乱れは、乱れのエネルギーを失うと同時に、乱れが場所的に移動するため、これまで述べてきたベルヌーイの定理に関する事柄は、平均流にのみ適用しうるものであることがわかる。

乱流成分に関する諸量の測定と、これら諸量間の相関についての数値結果に関しては、今なお不十分な点があり、またベルヌーイの関係の乱流成分に関する部分について一般的な解が完全には求められていないが、乱れに関する研究は、現在大きな進歩をとげている。

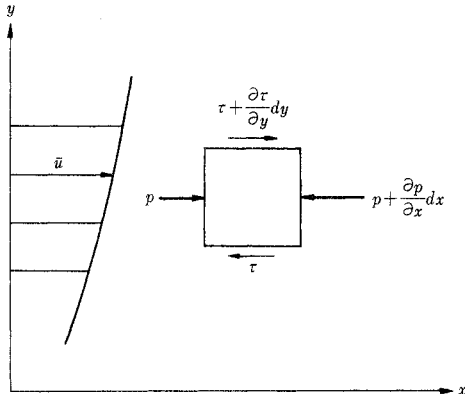
ベルヌーイの定理は、オイラーによって約220年以前に、最も簡単な形式で発見され、現在ではベルヌーイの定理を、乱れの影響を考慮して平均流に適用しうる段階まで、ベルヌーイの定理に関する研究が進められてきた。そして、これからのベルヌーイの定理に関する研究は、実際の流体運動内に含まれている種々の成分を、完全に計算しうるまで、研究を押し進める必要があるところまで来ている。

記者による注記

1) ハンター・ラウス：ベルヌーイの定理—その歴史と将来の方向—，土木学会誌，Vol. 55, No. 10, pp. 65~68.

2) 図-6 に示されるような，平均流の流速が  $y$  方向のみ変化する，2次元せん断流れの場に微小六面体  $dx \cdot dy \cdot dz$  を考える。この微小六面体の  $dx \cdot dz$  面を通じて，せん断力による単位時間あたり

図-6 微小六面体  $dx \cdot dy \cdot dz$  に働く力



$$\left[ \bar{u} \tau + \frac{\partial(\bar{u} \tau)}{\partial y} dy \right] dx dz - \bar{u} \tau dx dz = \frac{\partial(\bar{u} \tau)}{\partial y} dx dy dz$$

$$= \left[ \bar{u} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] dx dy dz \dots (15)$$

のエネルギーが微小六面体内に残る。また， $dydz$  面から圧力によってなされる，単位時間あたりの仕事の結果

$$\left[ \bar{u} p - \bar{u} \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = -\bar{u} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \dots (16)$$

のエネルギーが，単位時間あたり微小六面体内に残る。したがって，全体としては

$$\left[ \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \dots (17)$$

の単位時間あたりのエネルギーが，微小六面体内に注入されることになる。

一方，微小六面体の力のつりあいを考え，せん断力と圧力との和が，その方向の加速度となることから

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz = \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dy dz = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{u}^2}{2} \right) dx dy dz \dots (18)$$

上式の両辺に  $\bar{u}$  を乗ずると，微小六面体内を流れる流体に，単位時間あたり運動エネルギーとして付加されるエネルギーを表わす式 (19) をうる。

$$\bar{u} \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz = \rho \bar{u} dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{u}^2}{2} \right) dx \dots (19)$$

したがって，式 (17) と (19) との差は，微小六面体内で消費される，単位時間あたりの損失エネルギー， $\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dx dy dz$  であり，単位時間，単位体積あたりの損失エネルギー  $E_l$  は

$$E_l = \tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \dots (20)$$

となる。

3) この部分は，Rouse, H.: Work-energy equation for streamline, Proc. of ASCE., Vol. 96, No. HY 5, 1970, pp. 1179~1190 を参考として補足した。

4) 図-1 のような流れの流速分布は

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial s} (2by - y^2) \dots (21)$$

また， $v=0$ ， $\partial v / \partial y=0$ ， $\partial u / \partial x=0$ ， $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  から

$$T = -\nu \int_s \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds \dots (22)$$

$$L = \nu \int_s \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} ds \dots (23)$$

5) 直立板背後の流れに関する部分は，Rouse, H.: Energy transformation in zones of separation, General Lecture at 9th Convention of I.A.H.R., Proc. of 9th Convention of I.A.H.R., pp. 1291~1302., 跳水に関する部分は 3) を参考して補足した。

6) 図-5 中の  $K_m'$  は，乱れの平均運動エネルギー， $D_m$  は平均消散エネルギーで，この2つのエネルギーの和が平均エネルギー損失となる。(抄訳・中央大学理工学部 服部昌太郎)

次回講座予告・土木技術者のための法律講座

回	巻号	法 律	内 容
1.	56巻1号	総 論	法律の仕組み，法律・政令・省令・条令等の関係について解説を行なう。個々の事業に関連する法律名等について具体的な例示を行なう。
2.	2号	会計法・予決算	公共事業の執行に係わる基本法令として一般的解説を行なう。
3.	3号	建設業法・標準契約やっかん	建設業の基本法および標準契約やっかんの一般的解説を行なう。
4.	4号	公害関係法令	① 公害対策基本法 } の一般的解説を行なう。 ② 騒音規制法 } ③ 公共用水域の水質の保全に関する法律 } の概説を行なう。 ④ 大気汚染防止法 }
5.	5号	労働基準法および関係法令	労働基準法及び労働安全規則，クレーン等安全規則等の関連法令で工事施工に特に関係の深い条項に関して解説を行なう。
6.	6号	火薬取締法及び市街地土木工事公衆災害防止対策要綱	工事施工に特に関係の深い条項に関して解説を行なう。
7.	7号	土地収用法 道路交通関係法令	土地収用法及び公共用地の取得に関する特別措置法。 道路交通法，車両制限令等について工事施工に關係の深い条項の解説。
8.	8号	河川関係法令 港湾関係法令	河川法，砂防法，急傾斜地の崩壊による災害の防止に関する法律，公有水面埋立法。 港則法等について特に工事の施工に關係の深い条項に関して解説を行なう。
9.	9号	都市計画法	工事实施に特に關係の深い条項に関して解説を行なう。
10.	10号	水道法 建築基準法	工事实施に特に關係の深い条項に関して解説を行なう。 土木施工に關係すると思われるので一般的解説を行なう。
11.	11号	宅地造成等規制法 中小企業近代化促進法	土木施工に關係すると思われるので一般的解説を行なう。 中小企業団体の組織に関する法律，中小企業等協同組合法等に関する一般的解説を行なう。