10

土木技術者のための 新数学講座

応用マトリックス代数

その 2／小 松 定 夫*

（6） 高次固有値の計算法

振動問題においては，高次固有振動数および固有振動モードが知りたいことがある。そのようなときには，高次固有値 $\omega_j (j \geqq 2)$ を計算せねばならない。この問題については，J. Koch, H. Wielandt, H. Holelling などの研究がある。本文においては，Koch の方法について述べる。

いま任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を対称行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ の正規化された固有ベクトルで展開すると

$$\boldsymbol{x}=C_1\boldsymbol{x}_1+C_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n \quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

ここに展開係数 C_j は

$$C_j=\boldsymbol{x}_j{}^T\boldsymbol{x} \quad\cdots\cdots\cdots(3.33)$$

として与えられる。

そして，固有値の間で $|\omega_1|<|\omega_2|<|\omega_3|<\cdots$ の関係があるものとする。

そこで，次式によって $\boldsymbol{x}_1$ の項を消して $\boldsymbol{v}$ なるベクトルを導入する。

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}-C_1\boldsymbol{x}_1 \quad\cdots\cdots\cdots(3.34)$$

そして

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v} \quad\cdots\cdots\cdots(3.35)$$

を計算すると次式で正規化されたベクトル $\boldsymbol{x}$ の第2近似を得る。

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Z}/|\boldsymbol{Z}| \quad\cdots\cdots\cdots(3.36)$$

式 (3.36) を式 (3.33) に代入し，再び式 (3.34), (3.35), (3.36) の計算により $\boldsymbol{x}$ の第3近似を得る。このように，式 (3.33) から (3.36) の計算を反復すると，$\boldsymbol{z}$ はついに $\omega_2\boldsymbol{x}$ に収束することは容易にわかる。

これと同時に，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は2次固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ に収束する。したがって，2次固有値 ω_2 を知ることができる。

この場合にも，Rayleigh の商が固有値 ω_2 の良好な近似値 Θ_2 を得る。

$$\Theta_2=\frac{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{x}} \quad\cdots\cdots\cdots(3.37)$$

さらに，第 k 次固有ベクトルおよび固有値については，次式を式 (3.33)～(3.35) のかわりに使えばよい。すなわち，すでに求められた $\boldsymbol{x}_j (1\leq j\leq k-1)$ を用いて

$$C_j=\boldsymbol{x}_j{}^T\boldsymbol{x} \quad\cdots\cdots\cdots(3.38)$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}-(C_1\boldsymbol{x}_1+C_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+C_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}) \quad\cdots(3.39)$$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v} \quad\cdots\cdots\cdots(3.40)$$

を繰返し計算に用いるとよい。

（7） 行列の冪（べき）の固有ベクトルと固有値

行列 $\boldsymbol{A}$ が固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ と固有値 λ_i を有するとき，冪 $\boldsymbol{A}^p$ の固有値問題について考える。

仮定により $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ である。これに左から順次 $\boldsymbol{A}$ を乗じてゆくと，

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i{}^2\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_i=\lambda_i{}^3\boldsymbol{x}_i\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x}_i=\lambda_i{}^p\boldsymbol{x}_i\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(3.41)$$

式（a）は行列 $\boldsymbol{A}$ の冪 $\boldsymbol{A}^p$ が固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を有し，固有値 $\kappa_i=\lambda_i{}^p$ を有することを示す。行列 $\boldsymbol{A}$ が正則であれば，p が負の整数の場合にも同様のことが成立つ。

次に，行列 $\boldsymbol{A}$ の p 次多項式

$$\boldsymbol{B}_p=f_p(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots a_p\boldsymbol{A}^p \quad\cdots\cdots\cdots(3.42)$$

は $\boldsymbol{A}$ と同じ固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を有し，固有値として

$$\kappa_i=f_p(\lambda_i)=a_0+a_1\lambda_i+a_2\lambda_i{}^2+\cdots+a_p\lambda_i{}^p \quad\cdots\cdots\cdots(3.43)$$

を有することは，式 (3.40) の両辺にそれぞれ係数 a_1, a_2, $\cdots$, a_p を乗じ辺々加え合せることにより容易に証明できる。

4. 行列の級数と行列方程式

（1） 行列の冪級数

いま，行列の多項式 $\boldsymbol{B}$ において p を無限大としたとき，すなわち

$$\boldsymbol{F}=f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_p\boldsymbol{A}^p+\cdots$$
$$=\lim_{p\to\infty}\boldsymbol{B}_p \quad\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

を行列 $\boldsymbol{A}$ の冪級数という。式 (3.41) から容易に

$$\kappa_i=\lim_{p\to\infty}f_p(\lambda_i)$$

とおけば

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_i=\kappa_i\boldsymbol{x}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

したがって，$\lim_{p\to\infty}f_p(\lambda_i)$ が収束して極限値 κ_i を有するときには，行列 $\boldsymbol{A}$ の冪級数 $\boldsymbol{F}=f(\boldsymbol{A})$ は収束する。

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

そして，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を有し，その固有値は κ_i である。

また，もし行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_i が固有方程式の k 重根である場合には，$(k-1)$ 次の導関数。すなわち，$\lim_{p\to\infty} f_p^{(k-1)}(\lambda_i)$ がすべての λ_i に対して収束するとき，冪級数 $\boldsymbol{F}$ は収束する。

任意の有限値 x に対して，関数 e^x, $\cos x$, $\sin x$ などの冪級数展開は収束するので，これらと同形の行列数級は収束する。そこで，それらの級数を関数表示し

$$e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2\,!}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3\,!}\boldsymbol{A}^3+\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

$$\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{2\,!}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{4\,!}\boldsymbol{A}^4-\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4.4)$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3\,!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5\,!}\boldsymbol{A}^5-\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

とし，行列 $\boldsymbol{A}$ の**指数関数**，**余弦関数**，**正弦関数**と定義する。

また，たとえば，二項級数

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

は，領域 $|x|<1$ において収束する。すなわち，収束半径 $r=1$ の内部において収束する。したがって，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_i がすべて $|\lambda_i|<1$ ならば，行列級数

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.6)$$

は収束する。

同様にして，行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_i がすべて $-1<\lambda_i\leqq 1$ の領域にあるとき

$$\log(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^3-\cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)$$

は収束する。

一般に，x の級数 $f(x)$ の収束半径を r とすると，行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値 λ_i が $|\lambda_i|<r$ であれば，行列級数 $f(\boldsymbol{A})$ は収束する。もし，λ_i が固有多項式の k 重根であれば，$f^{(k-1)}(x)$ の収束半径 r_k として，$|\lambda_i|<r_k$ ならば $f(\boldsymbol{A})$ は収束する。

(2) 行列微分方程式

次の1階の行列微分方程式を満足する解 $\boldsymbol{z}(x)$ を求めよう。

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{g}(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.8)$$

ここに，

$$\boldsymbol{z}=\{z_1(x)\,;\,z_2(x)\,;\,\cdots\,;\,z_n(x)\}$$

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\quad n \text{ 次正方行列}$$

$$\boldsymbol{g}(x)=\{g_1(x)\,;\,g_2(x)\,;\,\cdots\,;\,g_n(x)\}\quad\cdots\cdots(4.9)$$

列ベクトル $\boldsymbol{g}$ の要素がすべて x の既知関数として与えられている場合に，微分方程式 (4.8) を満足する x の関数 $z_1(x), z_2(x), \cdots z_n(x)$ を要素とする列ベクトル $\boldsymbol{z}$ を求めるには，まず方程式 (4.8) に Laplace 変換

$$\bar{z}_i(s)=\int_0^s e^{-sx}z_i(x)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.10)$$

を施こすと

$$s\bar{\boldsymbol{z}}-\boldsymbol{z}_0=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{z}}+\bar{\boldsymbol{g}}(s)$$

ここに，

$$\bar{\boldsymbol{z}}=\{\bar{z}_1(s)\,;\,\bar{z}_2(s)\,;\,\cdots,\,\bar{z}_n(s)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

$$\boldsymbol{z}_0=\{z_1(0)\,;\,z_2(0)\,;\,\cdots\,;\,z_n(0)\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4.12)$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}(s)=\{\bar{g}_1(s)\,;\,\bar{g}_2(s)\,;\,\cdots\,;\,\bar{g}_n(s)\}\ \cdots\cdots\cdots(4.13)$$

よって

$$\bar{\boldsymbol{z}}=\frac{1}{s}\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{s}\boldsymbol{A}\right)^{-1}[\boldsymbol{z}_0+\bar{\boldsymbol{g}}(s)]$$

式 (4.6) を用いて行列級数に展開すると

$$\bar{\boldsymbol{z}}=\left(\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots\right)[\boldsymbol{z}_0+\bar{\boldsymbol{g}}(s)]$$

そこで，右辺に Convolution の定理を適用して逆変換し，さらに式 (4.3) を使えば，

$$\boldsymbol{z}=e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{z}_0+e^{\boldsymbol{A}x}\int_0^x e^{-\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{g}(\xi)d\xi\ \cdots\cdots\cdots(4.14)$$

式 (4.14) で与えられる $\boldsymbol{z}$ が行列微分方程式 (4.8) の解である。

［例］変断面ばりの強制振動

(1) 等分布強制力：強制力 $q(t)=q\sin\omega t$ が作用する区間ごとに，一定断面の変断面ばりの振動について考える。一般に，振動中のはりの状態ベクトル

$$\boldsymbol{z}=\{y\,;\,\alpha\,;\quad M\,;\,Q\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.15)$$

については方程式 (4.8) が成立っている。ただし，係数行列 $\boldsymbol{A}$ および既知項 $\boldsymbol{g}$ については，

$$\boldsymbol{A}_j=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{E_jI_j} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{W_j}{g}\omega^2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-q\end{bmatrix}\sin\omega t\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

ここに，添字 j は第 j 区間の値を表わす。

そこで，方程式 (4.8) の解 (4.14) を次のようにかける。

$$\boldsymbol{z}_j=\tilde{\boldsymbol{z}}_j\sin\omega t,\quad \boldsymbol{g}=\tilde{\boldsymbol{g}}\sin\omega t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.17)$$

として，第 j 区間の終端 j における状態ベクトルは

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_j=\boldsymbol{U}_j\tilde{\boldsymbol{z}}_{j-1}+\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{A}_j^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_j^{-1})\tilde{\boldsymbol{g}}\cdots\cdots\cdots(4.18)$$

ここに

$$\boldsymbol{U}_j=e^{\boldsymbol{A}_jl_j},$$

$$\boldsymbol{A}_j^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -g/W_j\omega^2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -E_jI_j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdots(4.19)$$

で $\boldsymbol{U}_j$ は第 j 区間の遷移行列である。l_j は第 j 区間の格間長である。

（2） 集中強制力：第 j 区間において格点 $(j-1)$ から距離 C_j の位置に集中強制力 P_j が作用する場合には，

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_j=\boldsymbol{U}_j\tilde{\boldsymbol{z}}_{j-1}+\boldsymbol{U}_je^{-\boldsymbol{A}_jC_j}\tilde{\boldsymbol{P}}_j \quad\cdots\cdots(4.20)$$

ここに，

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_j=\{0;0;0;-P_j\} \quad\cdots\cdots(4.21)$$

特に，集中荷重 P_j が格点 j に作用する場合には，$e^{-\boldsymbol{A}_jC_j}$ は $\boldsymbol{U}_j^{-1}$ となるので，

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_j=\boldsymbol{U}_j\tilde{\boldsymbol{z}}_{j-1}+\tilde{\boldsymbol{P}}_j \quad\cdots\cdots(4.22)$$

（3） 行 列 関 数

与えられた行列 $\boldsymbol{A}$ の固有方程式の s 箇の相異なる根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ とするとき，固有多項式は，

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda-\lambda s)^{\mu_s} \quad\cdots(4.23)$$

で与えられる。いま，行列 $\boldsymbol{A}$ の p 次多項式を $f_p(\boldsymbol{A})$ とするとき，$p\geqq m$ の場合には，

$$f_p(\lambda)=m(\lambda)g(\lambda)+\varphi(\lambda) \quad\cdots\cdots(4.24)$$

ここに $g(\lambda)$ は商，$\varphi(\lambda)$ は剰余で λ の $m-1$ 次以下の多項式である。

すると明らかに，$m(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$ であるから，

$$f_p(\boldsymbol{A})=\varphi(\boldsymbol{A}) \quad\cdots\cdots(4.25)$$

いま，1つの固有値 λ_j が μ_j 重根である場合には，

$$m_j(\lambda)=m(\lambda)/(\lambda-\lambda_j)^{\mu_j} \quad\cdots\cdots(4.26)$$

とおくと，$\varphi(\lambda)$ は

$$\varphi(\lambda)=\sum_{j=1}^{s}\Big\{F_j+F_j'(\lambda-\lambda_j)+\frac{1}{2\,!}F_\nu''(\lambda-\lambda_j)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{(\mu_j-1)!}F_j^{(\mu_j-1)}(\lambda-\lambda_j)^{\mu_j-1}\Big\}m_j(\lambda) \quad\cdots\cdots(4.27)$$

ここに，

$$F_j(\lambda)=\frac{f_p(\lambda)}{m_j(\lambda)} \quad\cdots\cdots(4.28)$$

$$F_j^{(\nu)}=\left[\frac{d^\nu F_j(\lambda)}{d\,\lambda^\nu}\right]_{\lambda=\lambda_j} \quad\cdots\cdots(4.29)$$

結局，式 (4.27) を式 (4.25) に代入すれば，

$$f_p(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{s}\Big\{F_j+F_j'(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})+\frac{1}{2\,!}F_\nu''(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{(\mu_j-1)!}F_j^{(\mu_j-1)}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{\mu_j-1}\Big\}$$
$$\times m_j(\boldsymbol{A}) \quad\cdots\cdots(4.30)$$

いま，行列関数 $f(\boldsymbol{A})=\lim_{p\to\infty}f_p(\boldsymbol{A})$ については，$f(\lambda)=\lim_{p\to\infty}f_p(\lambda)$ が存在するとき，式 (4.30) の右辺において

$$F_j(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{m_j(\lambda)} \quad\cdots\cdots(4.31)$$

とおけば，式 (4.30) によって $f(\boldsymbol{A})$ が与えられる。

特に，λ_j がすべて単根の場合には，

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{s}\frac{f(\lambda_j)}{m_j(\lambda_j)}m_j(\boldsymbol{A}) \quad\cdots\cdots(4.32)$$

として与えられる。そこで，代表的な行列関数については次のとおりである。

$$e^{\boldsymbol{A}}=\sum_{j=1}^{s}\frac{e^{\lambda j}}{m_j(\lambda_j)}m_j(\boldsymbol{A}) \quad\cdots\cdots(4.33)$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{m_j(\lambda_j)}\frac{1}{1-\lambda_j}m_j(\boldsymbol{A}) \quad\cdots\cdots(4.34)$$

$$\log(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{s}\frac{\log(1+\lambda_j)}{m_j(\lambda_j)}m_j(\boldsymbol{A}) \quad\cdots(4.35)$$

［例］ $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&3\\0&1\end{bmatrix}$ の指数関数 $e^{\boldsymbol{A}}$ を求めよ。

固有多項式は，$m(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-1)$

$\lambda=4: m_1(\lambda)=\lambda-1,\ m_1(\lambda_1)=3$

$\lambda_2=1: m_2(\lambda)=\lambda-4,\ m_2(\lambda_2)=-3$

よって公式 (4.33) に代入すると，

$$e^{\boldsymbol{A}}=\frac{e^4}{3}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})-\frac{e}{3}(\boldsymbol{A}-4\,\boldsymbol{I})=e\begin{bmatrix}e^3&e^3-1\\0&1\end{bmatrix}$$

5. トポロジーの行列表示

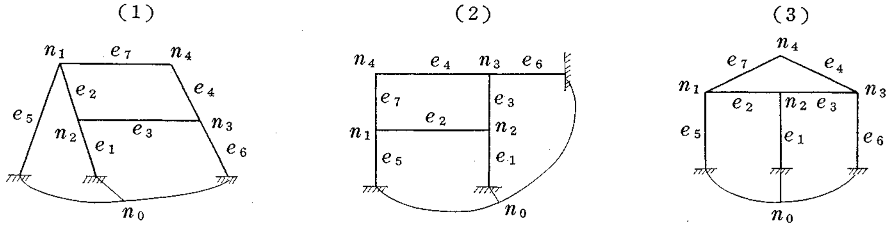
構造物の骨組に含まれるトポロジー的性質を構造物の弾性的性状や幾何学的形状から切り離し，抽出されたトポロジー的特性を利用することによって，線形構造解析を統一化し，簡素化しようとするアプローチが多くの人々によってすすめられた。Kron, DiMaggio, Spillers, Fenves, Branin, Lind, Stewart, Baty などがそれらの先駆者である。

構造物の骨組をグラフによって表わした場合，そのトポロジー的性質を抽出して構造解析に利用するために，種々な基本的な行列が組み立てられる。すでに，本講座7において，代表的なものについて解説がなされた。ここでは構造解析に用いられる若干の基本行列を追加し，さらにどのような形でそれを組立てると都合がよいか，また構造解析上重要な行列の性質について述べる。記号は本講座7（グラフの理論）を参照されたい。

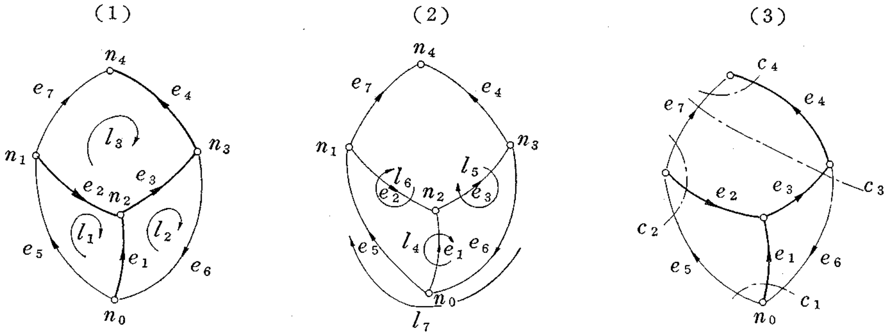
（1） トリーとコードの分離

図—2（1）（2）（3）に示すラーメンをグラフで表わせば，すべて同じく 図—3 のようになる。このとき，ラーメンの柱脚に対応する節点は，グラフ上では1つの節点 n_0 に集約させねばならない。そして，これを基準節点に選ぶ。基準節点は，枝路接続行列 $\boldsymbol{D}(d_{ij})$ から除外するのが普通である。すると，行列 $\boldsymbol{D}$ の行ベクトルは互いに一次独立である。行列 $\boldsymbol{D}$ の構成は次のようにする。図—3（1）のグラフのトリーに含まれる枝路の箇数を n，コードの箇数を m とすると，行列 $\boldsymbol{D}$ を太線で示すトリーに対応する n 次正方行列 $\boldsymbol{D}_t$ と細線で示すコードに対応する (n, m) 型行列 $\boldsymbol{D}_c$ とに分解するこ

図—2



図—3



とができる。すなわち，

$$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{D}_t, \boldsymbol{D}_c] \cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

図—3（1）のグラフについては，

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_t&=\begin{array}{c}\\ n_1\\ n_2\\ n_3\\ n_4\\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right] n,\\ n\end{array}\\
\boldsymbol{D}_c&=\begin{array}{c}\\ n_1\\ n_2\\ n_3\\ n_4\\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} e_5 & e_6 & e_7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{array}\right] n\\ m\end{array}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.2)$$

$\boldsymbol{D}_t$ は正則行列である。

ループの正方向を時針方向にとるものと約束する。そして，コードに含まれる枝路の方向づけはループの正方向に一致するようにとると都合がよい。基本ループ (l_1, l_2, l_3) に関するものを基本ループ行列といい，$\boldsymbol{L}$ で表わす。$\boldsymbol{L}$ もトリーに対応する (m, n) 型行列 $\boldsymbol{L}_t$ と m 次正方行列 $\boldsymbol{L}_c$ に分けられる。そして，$\boldsymbol{L}_c$ は単位行列 $\boldsymbol{I}$ になるので，次のようである。

$$\boldsymbol{L}=[\boldsymbol{L}_t, \boldsymbol{I}] \cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)$$

図—3 については，

$$\boldsymbol{L}_t=\begin{array}{c}\\ l_1\\ l_2\\ l_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right]\end{array} \cdots\cdots\cdots(5.4)$$

基本カットセット行列は 図—3（3）に示す基本カットセットに含まれるコードを行に選ぶ。基本カットセット行列 $\boldsymbol{C}$ は，トリーに対応する n 次正方行列 $\boldsymbol{C}_t$ とコードに含まれる (n, m) 型行列 $\boldsymbol{C}_c$ とに分けられる。そして，$\boldsymbol{C}_t$ は単位行列 $\boldsymbol{I}$ となる。

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}_c] \cdots\cdots\cdots\cdots(5.5)$$

図—3（3）については，

$$\boldsymbol{C}_c=\begin{array}{c}\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} e_5 & e_6 & e_7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array} \cdots\cdots\cdots(5.6)$$

となる。

（2） トリー行列とコード行列

トリー行列 $\boldsymbol{T}(t_{ij})$ は，節点を行に，枝路を列に対応させ，要素 t_{ij} は $t_{ij}=1$ なるときは，指定されたトリーにそって基準節点 n_0 から節点 n_i に至るパスに枝路 e_j が含まれ，進路と同一方向を向いている，

$t_{ij}=-1$ なるときは，同じく反対方向を向いている，

$t_{ij}=0$ なるときは，枝路 e_j がそのパスに含まれない，

ような場合に相当する。m 箇のコードはパスに含まれないので，トリー行列 $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_t, \boldsymbol{0}] \cdots\cdots\cdots\cdots(5.7)$$

ここに $\boldsymbol{T}_t$ はトリーに対応する n 次正方行列で正則である。

図—3 については，

$$
T_t = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.8)
$$

コード行列 $\boldsymbol{B}(b_{ij})$ は，コードを行に，枝路を列に対応させ，要素 b_{ij} は

$b_{ij}=1$ なるときは，枝路 e_j がループ l_i に属するコードに含まれていて方向が同じ，

$b_{ij}=-1$ なるときは，同じく方向逆

$b_{ij}=0$ なるときは，枝路 e_j がループ l_i に属するコードに含まれない場合になる。

すると，コード行列 $\boldsymbol{B}$ は次のように分けられる。

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.9)$$

ここに単位行列 $\boldsymbol{I}$ は m 次である。

（3） 基本行列の性質

Poincaré の定理により，3つの基本行列の間に次の直交性が存在する。

$$\boldsymbol{DL}^T=\boldsymbol{0} \ (n, m) \text{ 型}, \quad \boldsymbol{LD}^T=\boldsymbol{0} \ (m, n) \text{ 型} \quad \cdots\cdots\cdots(5.10)$$

$$\boldsymbol{CL}^T=\boldsymbol{0} \ (n, m) \text{ 型}, \quad \boldsymbol{LC}^T=\boldsymbol{0} \ (n, m) \text{ 型} \quad \cdots\cdots\cdots(5.11)$$

また，式 (5.7) と (5.1) から明らかに

$$\boldsymbol{DT}^T=\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{T}_t{}^T=-\boldsymbol{I} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.12)$$

ここに，$\boldsymbol{I}$ は n 次の単位行列である。

式 (5.1)，(5.3)，(5.12) を式 (5.10)，に用いると

$$\boldsymbol{L}_t=\boldsymbol{D}_c{}^T\boldsymbol{T}_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.13)$$

式 (5.3)，(5.9) から

$$\boldsymbol{BL}^T=\boldsymbol{LB}^T=\boldsymbol{I} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.14)$$

ここに，$\boldsymbol{I}$ は m 次単位行列である。最後に

$$\boldsymbol{BT}^T=\boldsymbol{0} \ (m, n) \text{型}, \quad \boldsymbol{TB}^T=\boldsymbol{0} \ (n, m) \text{型} \quad \cdots\cdots\cdots(5.15)$$

これらの性質を利用して，複雑なグラフを分割して，計算の簡単化をはかることが考えられる。すなわち，グラフをいくつかのトリーのみの Subgraph とコードのみの Subgraph に分割するのがその一つの方法である。

トポロジーの構造解析への適用については，下記文献を参考にされたい。

参 考 文 献

1) E.クライツィグ，田島一郎・近藤次郎共訳：線形代数と応用解析，技術者のための高等数学，第2巻，培風館.
2) 島田静雄：土木応用数学，大学講座土木工学 1，共立出版
3) 佐竹一郎：行列と行列式，数学選書 1，裳華房
4) Faddeev, D.K., and V.M. Faddeeva : Computational Method of Linear Algebra, Freeman and Co., Publishers, 1963
5) Bellman, Richard : Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, 1960
6) McMinn, S.J. : Matrices for Structural Analysis, Spon, London, 1962
7) Zurmühl, R. : Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Springer, 1964
8) Ralph, R. Mozingo : Matrix Distribution, Proc. ASCE Vol. 94, ST, April, 1968
9) Huang, Chao : Uncoupling Method for Diagonal-Band-Matrix Fquation, Proc. ASCE Vol. 93, EM, August, 1967
10) Ting, T.C.T. : A Method of Solving a System of Linear Equations Whose Coefficients Form a Tri-Diagonal Matrix, Quart. of Applied Mathematics, Vol. 22, No. 2, July, 1964
11) Kosko, E. : Matrix Inversion by Partitioning, The Aeronautical Quarterly, May, 1957
12) Zurmühl, R. : Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode, Ingenieur-Archiv, Bd 32, 1963
13) Jennings, A., and Majid, K.I. : The Computer Analysis of Spaceframes Using Sparse Matrix Techniques, Proc. the International Conference on Space Structures, 1966
14) Di Maggio, F.L. : Statical Indeterminancy and Stability of Structures, Proc. ASCE, Vol. 89, ST, 1963
15) Spillers, W.R. : Applications of Topology in Structural Analysis, Proc. ASCE, Vol. 89, ST, 1963
16) Fenves, S.J. : Structural Analysis by Networks, Proc. ASCE, Vol. 92, ST, 1966
17) Koepsell, P.E. : Convergence of Matrix Carry-Over Procedure in Planar Structures Loaded Normal to the Plane, Ph. D. Thesis, Oklahoma State University, Stillwater, 1965
18) Denke, P.H. : Matrix Structural Analysis, 2nd National Congress of Applied Mechanics, June, 1954
19) Langefors, B. : Algebraic Topology for Elastic Networks, SAAB TN 49, April, 1961
20) Henderson, J.C. : Topological Aspects of Structural Linear Analysis, Aircraft Engineering Vol. 32, No. 37, May, 1960

［新数学講座・終］