7

土木技術者のための 新数学講座

グラフの理論

その1／毛利正光*・西村　昂**

1. はじめに

グラフ理論 (theory of graph) はグラフを対象としてグラフの性質や，グラフを構成する要素の性質などについて研究するものであるといえよう。グラフ（またはリニア グラフ）とは簡単にいえば点と線から構成される図形である。いろいろな機能とそれらを結んでできているシステムは，グラフで表現すると理解しやすいし，また研究しやすくなる場合も少なくない。道路網は交差点を点とし道路を線で描くと一つのグラフで表わされ，また航空網も空港を点とし航路を線とするとこれもグラフで表わされる。さらに，電気回路網なども直接的なアナロジーがあってグラフとして表現しやすい。そのほかに，構造物，作業工程，組織の機構図，命令系統，家系図などやスポーツ試合のトーナメント組合せ表，あみだくじ，化合物の原子配列など数えあげればきりがない。

グラフ理論でよく引用されるものに Königsberg の橋の問題というのがある。これはパズルとして当時巷間にあった問題であったようだが， オイラー (Leonhard Euler 1707～1783) はこれに優雅な解答を示し，当時のペテルスブルグの科学アカデミーの年報 (1736年) に載せた。この論文がグラフに関する研究が数学の一つの分野として進展するきっかけになったといわれている。

グラフ理論で扱われる問題には，パズルめいたものが少なくない。これは，多種多様な問題がグラフとして表現できる場合が多いことにもよるものと考えられる。

グラフ理論においては他の分野で有名な数学者などが少なからず名を残している。カントール，ケーリー，ハミルトン，ポアンカレ，キルヒホッフなどはグラフ理論においても忘れることができない。

グラフ理論の研究には位相幾何学的 (Topological) な方法と組合せ論的 (Combinatorial) な方法があるといえよう。前者はグラフを0次元単体としての点と，1次元単体である線からなる1次元複体（1 dimensional complex）として取り扱い，その性質を研究しようとするものであり，後者はいくつかの点といくつかの線の組合せとして見て，組合せ論的に研究するもので，ある性質をもつグラフ，要素が存在するかどうか，もし存在すればいくつ存在するかなどの数えあげる問題などに有力な方法であるといえよう。

グラフ理論に関する著書は， 戦前に出版された D. König のものが数少ない参考書の一つとされていたが，戦後に出された C. Berge のもの以後は比較的多くの本が出版されている。それらの一部は参考文献として掲げておいたので参考にしていただきたい。

土木工学の分野においても，種々の機能をもつシステムの解析，あるいは計画においてグラフ理論的接近はかなり有力であると考えられる。

与えられた紙数に制限があるので，ここでは，グラフの基礎的概念と若干の応用例について述べることとしたい。

2. グラフ

グラフはいくつかの点 (points) とそれらを結びつけるいくつかの線 (line segments) から構成される一つの構造である。グラフの点は節点，頂点あるいは端点など (node, vertex, terminal point etc.) と呼ばれ，また線は枝，弧，辺など (branch, arc, edge, etc.) と呼ばれている。

以下においては主として節点，枝という語を用いていきたい。

節点には枝の端点となっているものと，枝の端点となっていない弧立点(isolated point) との2種類がある。枝は通常その両端で相異なる節点と接続し (incident)，これを開路枝 (open edge) というが，また同一節点に接続する枝もあり，これを閉路枝 (closed edge) あるいはセルフループ (self-loop) という。

グラフは幾何学的な図形として表わしたとき幾何グラフ (geometric graph) といい，幾何グラフに表わしたとき幾何学的実現 (geometric realization) という。これに対し節点の集合と枝の集合，その間の写像を対象とし，幾何学的実現を問題としないグラフは，抽象グラフ (abstract graph) という。

幾何グラフ $G=(N, E)$ は，節点の集合を $N=\{n_i\}$，枝の集合を $E=\{e_j\}$ としたとき

① E の要素であるあらゆる閉路枝は N の要素のただ1つに接続する。

② E の要素であるあらゆる開路枝はその両端でのみ

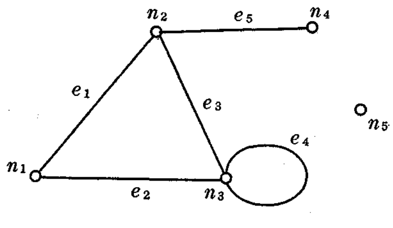
* 正会員　工博　名古屋大学教授　工学部土木工学科
** 正会員　工修　大阪市立大学講師　工学部土木工学科

N の要素の２つに接続する。

③ E の要素である枝同士は N の要素である節点以外では共通点を持たない。

という条件を満たしている必要があり，またこの条件がグラフの定義ともなっている。**図—1** は一つのグラフであるが，このグラフにおいて n_5 は孤立点，e_1, e_2, e_3, e_5 は開路枝，e_4 は閉路枝である。

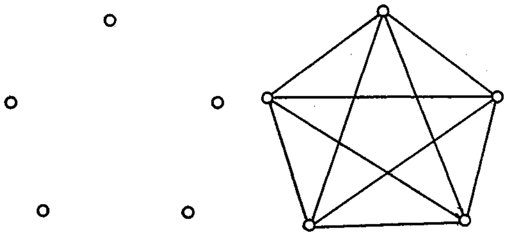
図—1



孤立点だけで枝のないグラフは零グラフ(null graph)といわれる[a]。これに対して節点のすべての対に対して１本ずつ開路枝のあるグラフは 完全グラフ（complete graph）といわれ，これら２種のグラフは両極端を表わす特殊なグラフであるといえる。**図—2** に節点数が５つの場合の零グラフと完全グラフの例を示す。

図—2

（1） 零グラフ　　（2） 完全グラフ



グラフの節点の集合 N と，枝の集合 E が，ともに有限な集合であるとき，そのグラフを有限グラフ（finite graph）といい，またそうでないときは無限グラフ（infinite graph)という。普通，単にグラフというときは有限グラフを指す場合が多い。

グラフ $G=(N, E)$ に対して， 節点，枝の別の集合 N_s, E_s よりなるグラフ $G_s=(N_s, E_s)$ は， $N_s \subset N$, $E_s \subset E$ すなわち N_s が N の，E_s が E の部分集合であるとき，G_s は G の部分グラフ（subgraph）であるという。特に $N_s=N$, $E_s \subset E$ のとき partial graph ということがある。また G_s に含まれない G の他のすべての枝よりなるグラフ $\overline{G}_s$ は G_s の補グラフ（complement)[b]という。

グラフ $G_1=(N_1, E_1)$ とグラフ $G_2=(N_2, E_2)$ があるとき

$$G_1 \cup G_2=(N_1 \cup N_2, E_1 \cup E_2)$$

なるグラフを合併グラフといい，

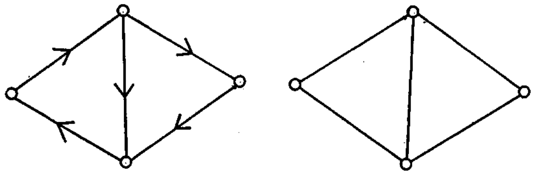
$$G_1 \cap G_2=(N_1 \cap N_2, E_1 \cap E_2)$$

なるグラフを共通グラフという。

グラフの枝には向き（orientation, direction）を持っているもの（有向な枝）と，いないもの（無向な枝）とがある。有向な枝が出る節点を始点といい，入る節点を終点という。有向な枝のみからなるグラフを有向グラフ（directed graph)[c] といい，無向な枝のみからなるグラフを無向グラフ（undirected graph）という[d]。 **図—3** に有向グラフ，無向グラフの例を示す。

図—3

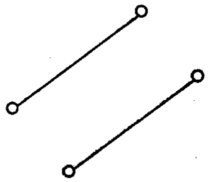
（1） 有向グラフ　　（2） 無向グラフ



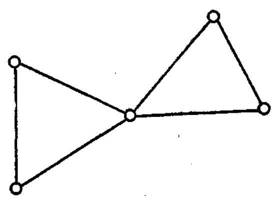
グラフのあらゆる２節点がいくつかの枝を伝って連結されているとき， そのグラフは連結グラフ（connected graph）という。 連結グラフでないものは非連結グラフといい，これはいくつかの連結成分よりなる。**図—3** のグラフは連結グラフであるが，**図—4** に示すグラフは非連結グラフで２つの連結成分からなる。連結グラフの連結成分の数を０次元ベッチ数という。**図—3,4** のグラフの０次元ベッチ数はそれぞれ 1，2 である。

連結グラフ G において，ある部分グラフ G_s とその残りの補グラフ $\overline{G}_s$ が１つの共通な節点をもつとき，別のいい方をすれば，ある１つの節点に接続している枝を取り除けばグラフが２つ以上に分離するような節点があるとき，このグラフを分離可能グラフあるいは可分グラフ（separable graph）という。 このとき，この共通節点を分離節点（cut-node）という。分離節点を含まないグラフを非可分グラフ（non-separable graph）という。**図—5** のグラフは可分グラフであり，**図—3** のグラフは

図—4



図—5



a） 節点も枝もないグラフを零グラフということもある.

b） G の補グラフ（complementary graph）$\overline{G}$ を同じ節点数の完全グラフから G の枝を取り去った残りの枝からなるグラフを指す場合もある.

c） directed graph を略して digraph ということもある.

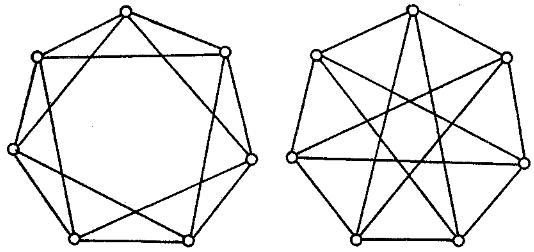
d） 有向な枝と無向な枝が，まざって存在するグラフは，混合グラフ（mixed graph）ということもある.

非可分グラフである。

2つのグラフ $G_1=(N_1, E_1)$, $G_2=(N_2, E_2)$ が N_1 と N_2, E_1 と E_2 の間に1対1の対応があるとき，すなわち要素の数とその接続関係が同じであるとき G_1 と G_2 は同形（isomorphic）であるという。1つのグラフを接続関係を変えないようにして節点の位置を変えたり，枝を曲げたりすることは同形変換（isomorphic transformation）といい，同形変換によって得られたグラフはもとのグラフに対する同形グラフという。図—6 に同形グラフの例を示す。図—6（1）の節点にたとえば上から時計まわりに，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 と番号をつけると，同図（2）においては同様に 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6 と番号をつけると接続関係が同じであることがわかる。

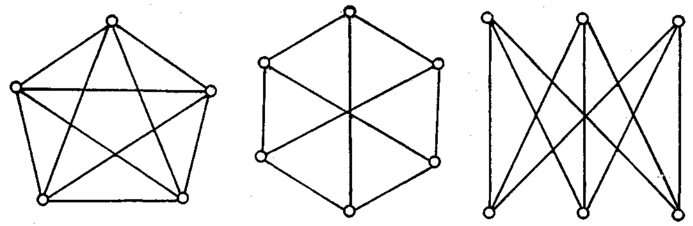
図—6 同形グラフ

（1）　（2）



図—7 非平面グラフ

（1）　（2）　（3）



平面上に枝が節点以外で交差することなく描けるグラフを平面グラフ（planar graph）といい，枝をどのように変形移動させても交差する場合は非平面グラフ（non-planar graph）という。図—7 に非平面グラフの例を示す。図—7 の（1），（2），（3）はどのように同形変換しても平面グラフにならない。非平面性を証明するにはジョルダンの曲線定理を使うと有効である。ジョルダンの曲線定理は厳密には適当な参考書を参照してほしいが，簡単にいえば，一つの閉曲線は平面を内側と外側に分割し，閉曲線の内側にある点と外側にある点を結ぶ曲線は必ず閉曲線と交差するという定理である。

3. グラフの行列表現

グラフの構造は節点と枝との接続関係によって規定されるが，これは接続行列（incidence matrix）によって表わすことができる。接続行列 $\boldsymbol{D}\{d_{ij}\}$ は行に節点を，列に枝をとり

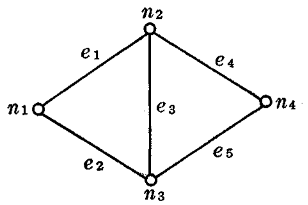
- 節点 i が枝 j に接続しているとき　$d_{ij}=1$
- 閉路枝 j が節点 i に接続しているときあるいは節点 i が枝 j に接続していないとき　$d_{ij}=0$

によって表わされた，マトリックスである。節点の数を n，枝の数を e とすると接続行列は n 行 e 列となる。図—8 に示すグラフの接続行列は

$$
\boldsymbol{D}=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

のように表わされる。

図—8



このように表わした場合，各列には“1”が2つずつ現われるか，またはすべて“0”となる。各行には節点に接続する枝の本数だけの“1”が現われるが孤立点の行はすべて“0”である。有向グラフの場合には

- 節点 i が枝 j の始点となっているとき　$d_{ij}=1$
- 節点 i が枝 j の終点となっているとき　$d_{ij}=-1$
- 節点 i に閉路枝 j が接続しているときおよび節点 i に枝 j が接続していないとき　$d_{ij}=0$

として接続行列をつくる。このときは各列には“1”と“−1”が現われるかまたはすべて“0”である。そして各行にはその節点から出ている枝の数だけ“1”が，また入っている枝の数だけの“−1”がある。

接続行列の階数（rank）は節点数を n とし，0次元ベッチ数を b_0 とすると $n-b_0$ である。b_0 はグラフの連結成分の数であるから，連結グラフでは $b_0=1$ であり，接続行列の階数は $n-1$ となる。これは連絡グラフの接続行列の任意の1行は他の行に従属であることから説明される。

以上のような接続行列は，厳密にいえば節点と枝との接続関係をあらわしたものでいわゆる節点—枝接続行列（node-edge incidence matrix）というものである。これに対してもう一つよく利用されるものに，節点と節点との接続関係を表わした節点—節点接続行列（node-node incidence matrix）というのがある。これは節点接続行列(node adjacency matrix）ということもある。これ

は行に節点を，列にも節点をとり

・節点 i に節点 j が隣接しているとき

$$d_{ij}=1$$

・節点 i に節点 j が隣接していないとき

$$d_{ij}=0$$

なる関係で表わした行列であり，節点数を n とした とき $n\times n$ の正方行列となる。図―8 のグラフについて示すと

$$D=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

のようになる。

グラフにおける行列表現は，この他ループ行列，カットセット行列，その他いろいろな種類のマトリックスがある。

4. グラフにおける基本的概念

ここでは，グラフの理論で用いる基本的な概念のいくつかを取り上げて述べてみたい。

(1) 路

お互いに隣接している枝の一連のつながりを路という。図―8 において (e_1, e_4) は n_1 から n_4 へ至る一つの路である。路はまた隣接する節点の一連のつながりとしても表現できる。上の場合は (n_1, n_2, n_4) と表わすことができる。このような路が存在するとき節点 n_1 から節点 n_4 へは到達可能 (reachable) という。この路は有向グラフにおいてはパス (path)，無向グラフにおいてはチェーン (chain) と呼んで区別することもある。

(2) 局所次数

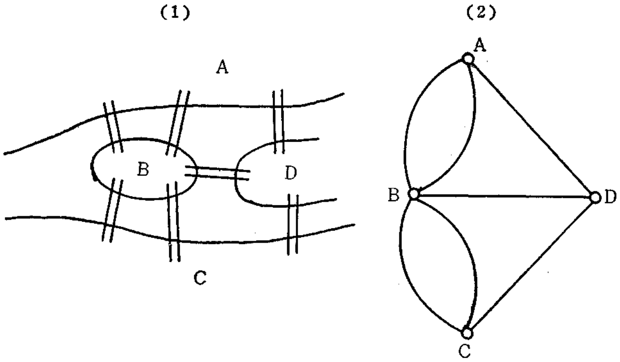
グラフの節点に出入する枝の数をその節点の局所次数 (local degree) という。図―8 のグラフにおいて，節点 n_1, n_2, n_3, n_4 の局所次数はそれぞれ 2, 3, 3, 2 である。グラフの枝の総数を e とすると，全節点の局所次数 $d(n_i)$ の合計は

$$\sum_i d(n_i)=\sum_i\sum_j|d_{ij}|=2e$$

となる。これは，どの枝も 2 度ずつ数えられるからである。ただし，d_{ij} は接続行列の要素である。

局所次数が奇数の節点は奇節点 (odd node)，偶数の節点は偶節点 (even node) という。するとグラフには奇節点は，もし存在するならば偶数個存在することになる。なぜならば奇節点が奇数個存在すると仮定すると，全節点の局所次数の合計が偶数にならなくなり不合理だからである。

図―9 Königsberg の橋の問題



すべての節点が，同じ局所次数のグラフを正則グラフ (regular graph または homodegree graph) という。完全グラフは正則グラフである。

ここで局所次数に関連して，はじめに述べた Königsberg の橋の問題について，簡単にふれてみたい。図―9 (1) に示すように河の中に 2 つの島があり，両岸と島の間に図のように橋が架かっている。このときどの橋も一度だけ渡り，すべての橋を渡りつくすことができるかどうかというのが問題である。オイラーはこの問題を図―9 (2)[e] のようなグラフに書きかえて，これが一筆書きできるかどうかという問題におきかえた。この一筆書きの問題に対してオイラーは次のような一般的な定理を与えた。

［定　理］ すべての節点の局所次数が偶数である連結グラフは一筆書が可能 (unicursal) である。

この定理の厳密な証明は省略するが，任意の点から書きはじめて任意の経路をたどってもとの点に帰ってくるとする。このとき書き残した線はすでに書いた線（路）の途中にある節点から出てその節点に帰る路としてつけ加えてゆき全部を書きつくすことが可能であることを示せばよい。書き残された節点では必ず偶数本の線が書き残されているから，上のような書き方が可能である。この定理から次の定理が導かれる。

［定　理］ 局所次数が奇数である節点を含む連結グラフで一筆書きが可能であるのは，奇節点の数が 2 つの場合でそのときに限る。

これも奇節点を n_A, n_B とすると n_A, n_B の間に仮空の枝を設けると n_A, n_B は偶節点となり，前の定理によって一筆書きが可能となる。したがって，仮空の枝がない場合でもAからBへ（またはその逆に）一筆書きは可

e) このグラフには節点 A, B 間および B, C 間には 2 本の枝が存在する．このように特定の節点間に 2 本以上の枝のあるグラフを multigraph ということがある．

能である。Königsberg の橋の問題では奇節点が4つあるので一筆書きはできないことになる。一筆書きされた線をオイラー線（Euler line）といい，また一筆書きが可能なグラフはオイラー グラフ（Euler graph）あるいは unicursal graph という。

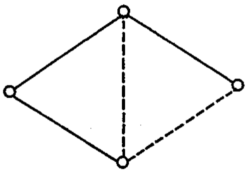
（3） 距　　離

路を構成する枝の数を路の長さ（length）という。2点間の距離（distance）は 2点間の最短の長さをいう。ある1つの節点から他のすべての節点への距離のうちでの最大値が最小となるような節点をグラフの中心（center）という。連結グラフの中ですべての2点間の距離のうちで最長のものをグラフの直径（diameter）といい，グラフの中心からの距離の最大値をグラフの半径（radius）という。図—8 のグラフにおいてはグラフの中心は n_2 あるいは n_3 であり，グラフの直径，半径はそれぞれ"2"と"1"である。

（4） 木

連結でループを含まない部分グラフ（partial graph）を木（tree）という。部分グラフ（subgraph）でループを含まず，連結であるのは部分木（subtree）という。非連結グラフで，各成分が部分木をなしているものは，森（forest）[f] という。n 個の節点よりなるグラフの木は，n-1 の枝よりなる。連結グラフの部分グラフとして1つの木を考えるとき，その補グラフを補木（cotree）という。図—10 に木と補木の例を示す。実線部分が木であり，点線部分は補木である。補木に含まれる枝は弦（chord）ということがある。

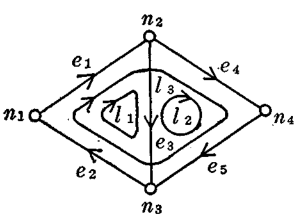
図—10　木と補木



（5） 閉　　路

路の最初の節点（initial node）と最後の節点（final node）が一致しているものを閉路（loop）という。図—11 において（e_1, e_4, e_5, e_2）は1つの閉路であり，これもまた節点によって，（$n_1\ n_2, n_4, n_3, n_1$）と表わすことができる。閉路も有向の場合サーキット（circuit），無向の場合にサイクル（cycle）と呼んで区別することもある。

図—11



f） 多木（polytree）ともいう．

図—11 のグラフの接続行列は次のようになる。

$$
D=\begin{array}{c}\\ n_1\\ n_2\\ n_3\\ n_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\end{array}
$$

いま1つのループを考える。ループの方向に対して，ループ上の枝の方向が一致している枝には"1"，逆方向の場合には"−1"，ループ上にない枝に対しては"0"としてベクトル表示すると，ループ列ベクトルは次のようになる。

$$
l=\begin{array}{c}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\\ e_5\end{array}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}
$$

これを接続行列にかけると

$$\boldsymbol{D}\cdot l=0$$

となり，ループは接続行列の行ベクトルと直交するベクトルであるということになる。

ループ行列（loop matrix）$\boldsymbol{L}$ を次のように定義すると，すなわち $\boldsymbol{L}$ の要素 l_{ij} はループ i に枝 j が正の方向に含まれているとき"1"，逆方向に含まれているとき"−1"，含まれていないとき"0"とすると，図—11 に対しては図中に示した3つのループに対して，ループ行列は次のようになる。

$$
L=\begin{array}{c}\\ l_1\\ l_2\\ l_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}
$$

上で見たように接続行列とループ行列 $\boldsymbol{L}$ の転置行列 $\boldsymbol{L}^T$ とは直交する。すなわち

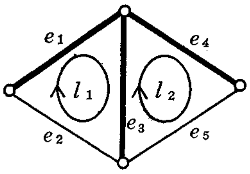
$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{L}^T=0$$

なお無向グラフの場合には（mod 2）で計算すると同様の結果が得られる。これは次のように説明できる。ループ上の節点には常に2つ，または偶数の枝が接続している。であるから，接続行列の行にループ列ベクトル（$\boldsymbol{L}^T$ の列）をかけると，その節点に出入する枝の本数を求めることになり，有向グラフでは"0"，無向グラフでは"0"（mod 2）となる。

1つの木に対してその補木の枝をつけ加えると1つのループが得られる。このように補木の枝を次々に加えるとその枝の数だけのループが得られる。このループはそれぞれ他のループにない枝を一つ以上もっている。このループの組をもとの木に対する原始ループ（primitive loops），または基本ループ（fundamental loops）という。原始ループは $e-n+b_0$ 個存在する（e：枝の数，

n：節点数，b_0：0次元ベッチ数)。これらのループはお互いに独立で，独立なループの数をそのグラフの一次元ベッチ数 b_1 といい，b_1 は $e-n+b_0$ となる。したがって，原始ループ行列の階数は b_1 である。図—12 の太線で示した木に対して，補木の枝 e_2, e_5 をつけ加えることによって得られるループ l_1, l_2 は原始ループである。

図—12



(6) カットセット[g)]

連結グラフ $G=(N, E)$ において，枝の部分集合 E_d を考え，G から E_d をとり去るとグラフが連結でなくなる場合，E_d を分離集合 (disconnecting set) という。分離集合から枝を1本ずつ取り除いてゆくと，さらにもう1本でも枝を除くと，グラフが連結となるような最小の分離集合が得られる。これをカットセット (cutset) という。カットセット E_c は分離集合 E_d の部分集合である。カットセットは節点の集合を2つの排他的な部分集合 N_1 と N_2 に分ける。すなわち

$$N_1 \cup N_2 = N$$

$$N_1 \cap N_2 = \phi \text{（空集合）}$$

であり，カットセットは N_1 と N_2 をつなぐ枝の集合であり，カットセット E_c を $C(N_1, N_2)$ で表わすと

$$E_c = C(N_1, N_2) = \{e_{ij} \mid i \in N_1, j \in N_2\}$$

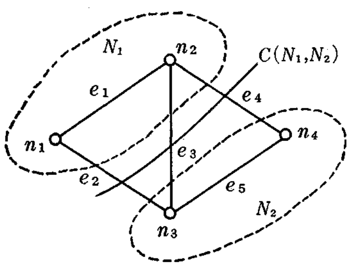
で求められる集合である。ただし，e_{ij} は節点 n_i と n_j を結ぶ枝を表わしている。枝が有向の場合には，カットセットにも向きが考えられ，N_1 から N_2 に向いているカットセット $C(N_1, N_2)$，N_2 から N_1 に対する $C(N_2, N_1)$ はそれぞれ

$$C(N_1, N_2) = \{e_{ij} \mid i \in N_1, j \in N_2\}$$

$$C(N_2, N_1) = \{e_{ij} \mid i \in N_2, j \in N_1\}$$

で表わされる。図—13 において 枝の集合 $\{e_2, e_3, e_4\}$ は節点を $N_1=\{n_1, n_2\}$ と $N_2=\{n_3, n_4\}$ に分離するカットセットである。

図—13



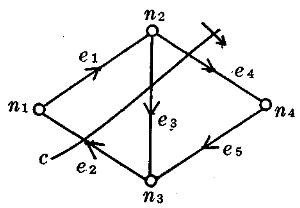
G の任意の木は G の任意のカットセットと共通な枝を少なくとも1本はもっている。これは任意のカットセットを構成する枝を含まないで木は構成できないから自明であろう。

また，任意のループは任意のカットセットと共通な枝を持たない（交わらない）か；あるいは交わるとすると偶数個所においてである。ループは閉じているからカットセットによって，分離された一方から他方に渡る回数だけ逆方向に渡ることになるから偶数となる。

木を構成する枝を一つでも取り去ると非連結となる。したがって，木の枝を補木に加えればカットセットができる。このように木の枝を一つずつ加えてできるカットセットの組を原始カットセット (primitive cut-set) または基本カットセット (fundamental cut-set) という。原始カットセットは，他のカットセットにない枝をもっているので，お互いに独立しており，$n-b_0$ 個存在する (n：節点数，b_0：0次元ベッチ数)。したがって，原始カットセット行列の階数は $n-b_0$ である。

図—14 においてカットセット C を構成する枝の方向は e_3, e_4 を正方向とすると e_2 は逆方向となる。いまこれを行ベクトルとして次のように表わす。

図—14



$$\begin{array}{cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ C= & (\,0 & -1 & 1 & 1 & 0\,) \end{array}$$

一方，カットセット C によって分離された節点を行ベクトルで次のように示すと

$$\begin{array}{ccccc} & n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n= & (\,1 & 1 & 0 & 0\,) \end{array}$$

カットセットは接続行列の行ベクトルの一次結合として次のように表わせる。

$$C = n\boldsymbol{D}$$

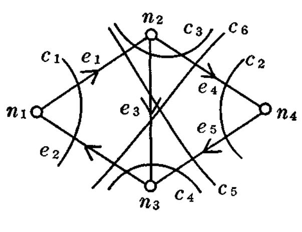
次にカットセット行列 (cut-set matrix) $\boldsymbol{C}$ を定義しよう。これは行にカットセットをとり，列に枝をとり

- カットセット i が枝 j を含まないとき $c_{ij}=0$
- カットセット i が枝 j を正方向に含むとき $c_{ij}=1$
- カットセット i が枝 j を負方向に含むとき $c_{ij}=-1$

として，c_{ij} を要素とした行列である。

図—15 のカットセット行列 $\boldsymbol{C}$ は次のようになる。

図—15



g) 単にカットということもある。

$$
\boldsymbol{C}=\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ループ行列とカットセット行列は直交し，次式が成立する。

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{C}^T=0 \quad (\mathrm{mod}\ 2)$$

すなわち，任意のループベクトルと カットセット ベクトルは直交する。これは，ループとカットセットは交わらないか，交わるとすると偶数個所であることから説明される。 図—15 のカットセットと 図—11 のループで計算してみると次のようになる。

$$
\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

（7） 双 対 性[h)]

双対性（duality）とは数学の広い分野にわたってみられる現象であるが，グラフ理論においても双対性が認められる。双対性をひとことでうまく表現するのはむずかしいが，現象的にとらえると双対関係にあるＡ，Ｂについての命題においてお互いにＡ，Ｂの入れ換えをしても命題は正しいということになる。たとえばＡに関する定理からＢに関する定理が得られたり，あるいはＢの定義からＡの定義が得られたりすることがある。グラフ理論においては，枝—枝，木—補木，ループ—カットセットなどは双対関係にあるといえる。

平面上で技同士が交差しないで描けるようなグラフ G を考える。このグラフによって平面が枝で囲まれたいくつかの領域あるいは面分 $r_1, r_2, \cdots r_f$ に分割されたとする。 このときこの領域内に１つずつ新しい節点 $n_1, n_2, \cdots n_f$ を設ける。枝を境界にして隣接している領域 r_i と r_j の間にはその枝と交差するように新しい枝を設けて n_i と n_j を結ぶ。 このような操作をすることによって新しいグラフ G' が得られる。この G' を G の双対グラフ（dual graph）という。図—16 に例を示す。図において実線で描いたグラフの双対グラフは点線のグラフで表わされる。双対グラフの双対グラフは，もとのグラフ（primal graph）となる。 すなわちこのような双対変換を２回繰り返すともとにかえる。双対変換によって双対関係にあるものはお互いに変換される。たとえば，もとのグラフにおけるカットセットは，その双対グラフにおけるループになっている。

もとのグラフとその双対グラフが同形の場合は，自己双対グラフ（self-dual graph）という。図—16(2) は，自己双対グラフである。

図—17 には よくみられる格子模様と三角模様に対する双対模様の例を示している。

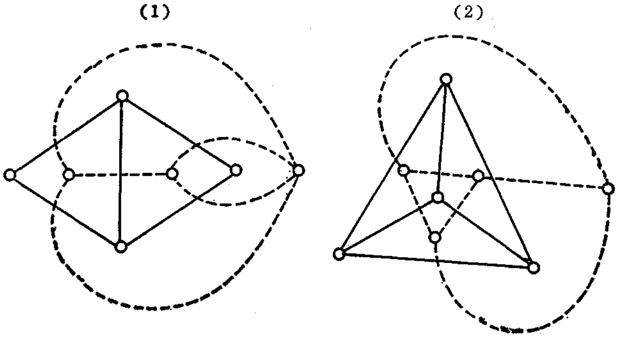
（8） 平 面 性

前述のごとく，平面上に枝が交差することなく描けるグラフは平面グラフといわれるが，平面グラフに関しては次式で定義されるオイラー標数が一定の値をとる。

オイラー標数$=n-e+f$

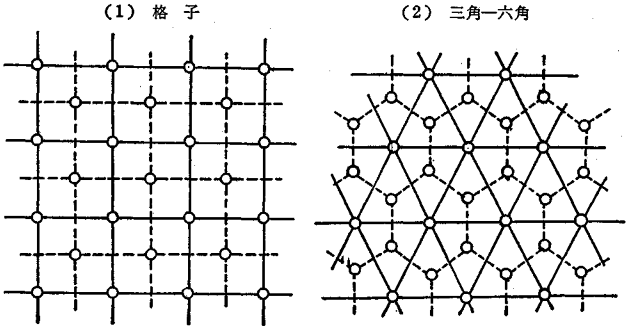
ここで n は節点数，e は枝の数，f は枝で囲まれる領域または面分の数である。平面グラフは平面上ならびに球面上に描くことができる。平面上に描いたとき，オイラー標数は“１”になり，球面上に描いたときは領域が１つふえるから“２”になる。これはオイラーの定理といわれている。

図—16



図—17

(1) 格 子　　(2) 三角—六角



h） 相対（relative）と区別するために双対（dual）は「ソウツイ」と読まれることが多いようである。

グラフの平面性に関しては，別にクラトフスキー（C. Kuratowski）の定理がある。

［定　理］　グラフが平面グラフであるための必要十分条件は，枝の開放除去，短絡除去によってクラトフスキーの第一グラフあるいは第二グラフが生じないことである。

クラトフスキーの第一グラフは 図—7(1) の5節点の完全グラフであり，第二グラフは 図—7(2) または(3)[i] のグラフである。 図—7 (2) と (3) は同形グラフである。枝の開放除去（open cutting）とは，枝をとり除くことであり，短絡除去（short cutting）とは，枝を短縮してとり除き両端の節点を同一点とみなす操作をいう。いいかえると部分グラフとしてこれを含まないことである。

この他に平面性に関して，次のホイトニーの定理がある。

［定　理］　グラフが平面グラフである必要十分条件は，グラフが双対グラフを持つことである。

参考文献

1．雑誌などでグラフ理論を解説しているもの

1) 伊理正夫：グラフの理論，経営科学，Vol. 9, No. 1, 1965
2) 伊理正夫：回路網理論の諸様相， 経営科学， Vol. 10, No. 1・2, 1966
3) 平山　博・難波田愈： グラフ理論とその応用，電気学会雑誌，Vol. 88, No. 7～11, 1968
4) 一松　信： グラフ理論入門，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 14, No. 10～12, 1969
5) 野口　宏：グラフ理論，数理科学，Vol. 7, No. 8, 1969（連載中）

2．グラフ理論に関連する著書など

（1） グラフ理論専門の著書など

6) D. König： Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Chelsea Publishing Company, 1950, Reprint
7) C. Berge： The Theory of Graphs and its Applications, John Wiley & Sons Inc., 1962
8) O. Ore : Theory of Graphs, Colloquium Publications Vol. 38, American Mathematical Society, 1962
9) O. Ore : Graphs and Their Uses, Random House, 1963
10) R.G. Busacker and T.L. Saaty： Finite Graphs and Networks — An Introduction with Applications, McGraw Hill Book Company, 1965
11) F. Harary, R.Z. Norman and D.C. Cartwright： Structural Models — An Introduction to the Theory of Directed Graph, John Wiley and Sons Inc., 1965
12) W.T. Tutte : Connectivity in Graphs, University of Toronto Press, 1966
13) A. Kaufmann : Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Academic Press, 1967
14) P. Slepian : Mathematical Foundations of Network Analysis, Springer-Verlag, 1968
15) 小野寺力男：グラフ理論の基礎，森北出版，1968
16) F. Harary : Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1968
17) W. Knödel : Graphentheoretische Methoden und Ihre Anwendungen, Ökonometrie und Unternehmensforschung XIII, Springer-Verlay 1969

（2） グラフ理論のシンポジウム等の論文集など

18) F. Harary (ed.)： Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, 1967
19) F. Harary (ed.)： A Seminar on Graph Theory, Holt, Rinehart and Winston, 1967
20) Theory of Graphs—International Symposium held at Rome 1966, Gordon and Breach, 1967
21) P. Erdös, G. Kotona (ed.) ： Theory of Graph — Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary 1966, Academic Press, 1968
22) H. Sachs, H.J. Voß and H. Walter (ed.) : Beiträge zur Graphentheorie — Vorgetragen auf dem Internationalen Kolloquium in Manebach (DDR) 1967, B,G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968
23) 北川敏男・国沢清典・森口繁一・伊理正夫編： グラフ理論—日科技連数学計画シンポジウム， No. 19, 日本科学技術連盟，1969
24) F. Harary (ed.) : Proof Techniques in Graph Theory, Academic Press, 1969
25) G. Chartrand and S.F. Kapor : The Many Facets of Graph Theory, Proceedings of the Conference held at Western Michigan Univ. 1968, Springer-Verlag, 1969

（3） グラフ理論の関連分野，応用分野など

26) J. Riordan : An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley and Sons Inc., 1958
27) W.H. Kim, R.T. Chien： Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press, 1962
28) L.R. Ford, Jr., D.R. Fulkerson : Flows in Networks, Princeton University Press, 1962
29) H.J. Ryser : Combinatorial Mathematics, The Mathematical Association of America, 1963
30) E.F. Beckenbach (ed.) : Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley and Sons Inc., 1964
31) F.E. Rogers : Topology and Matrices in the Solution of Networks, Iliffe Books Ltd. 1965
32) C. Berge, A. Ghouila-Houri : Programming, Games and Transportation Networks, John Wiley and Sons Inc., 1965
33) V.E. Benes： Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic, Academic Press, 1965
34) M. Hall Jr. : Combinatorial Theory, Blaisdell Publishing Company, 1967
35) O. Ore : The Four Color Problem, Academic Press, 1967
36) T.C. Hu : Integer Programming and Netwoik Flow, Addison-Wesley Publishing Company, 1969
37) M. Iri : Network Flow, Transportation and Scheduling Theory and Algorithms, Academic Press, 1969

i）図—7 (3) のようにグラフの節点が2つのグループに分けられ，グループ内の枝はなく，すべてグループ相互間を結ぶ枝しかないグラフは二分グラフ（bipartite graph）という．その他に偶グラフ，二組グラフということもある．グループが k 個のときは k-partite graph という．