

# 4

## 土木技術者のための新数学講座

### 確率・統計 (B)

その2 / 日野 幹雄\*

私たちは、不規則なものは手におえないものという考えがある半面、漠然と不規則なもの不確定なものうちに、ある種の規則性を期待したり感じたりしている。風の息とか、地震の周期とか、洪水期とかいう言葉は、その現われである。こうした不確定さの中に規則性を見出す方法、あるいはそれを定義する方法があれば、自然とか災害という不確定現象との戦いでもある土木工学も大いに進歩するであろう。

ここでは、不確定現象の確率論的、統計的取扱いのうち、比較的体系化されている方法について応用例をあげながら述べることにしよう。

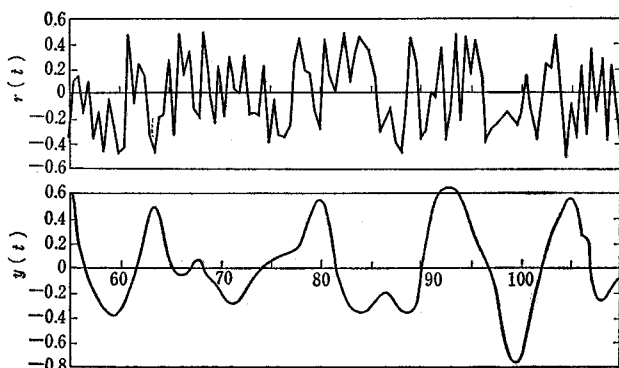
#### 1. 線形応答系と相関およびスペクトル<sup>1)2)3)4)</sup>

定常確率過程における原因と結果(入力と出力)の関係が線形であれば、入力  $f_i(t)$  と出力  $f_o(t)$  とは Duhamel 形の積分

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) f_i(t-\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (1.1)$$

で表わされる。ここに、 $h(\sigma)$  は単位のインパルス入

図-1 (a) 白色雑音(上)からつくられたシミュレーション波浪(下)



力に対する応答で、応答関数といわれる。入力  $f_i(t)$  が定常確率過程であるとき、 $f_o(t)$  の自己相関関数  $\varphi_{oo}(t)$  を式 (1.1) を用いて求めると

$$\varphi_{oo}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \varphi_{ii}(\tau+\nu-\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (1.2)$$

となる。ここに、 $\varphi_{ii}(\tau)$  は入力の自己相関関数である。

式 (1.2) を Fourier 変換すれば、 $\Phi_{ii}(\omega) \cdot \Phi_{oo}(\omega)$  を  $\varphi_{ii} \cdot \varphi_{oo}$  の Fourier 変換(つまり入出力のスペクトル)として

$$\begin{aligned} \Phi_{oo}(\omega) &= |H(\omega)|^2 \Phi_{ii}(\omega) \\ &= H(\omega) H^*(\omega) \Phi_{ii}(\omega) \dots\dots\dots (1.3) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $H(\omega)$  は

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \\ h(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \dots\dots\dots (1.3a) \end{aligned}$$

で定義され、システム関数と呼ばれる。 $H^*$  は  $H$  の共役関数である。

同様に、入力と出力の相互相関を求めると

$$\varphi_{io}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (1.4)$$

となり、これを Fourier 変換すれば

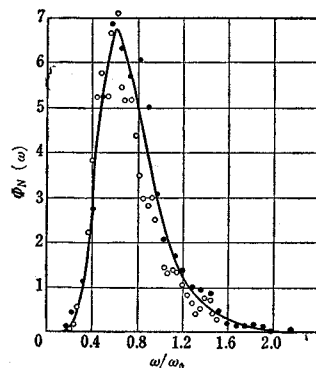
$$\Phi_{io}(\omega) = H(\omega) \Phi_{ii}(\omega) \dots\dots\dots (1.5)$$

となる。ここに、 $\Phi_{io}(\omega)$  は入出力のクロス スペクトルである。

式 (1.1)~(1.5) の関係は、種々の問題に利用されている。たとえば、式 (1.3) の関係を用いれば白色雑音  $\Phi_{ii}(\omega) = K$  を入力として、任意のスペクトル  $\Phi_{oo}(\omega)$  をもつ波をシミュレートするための応答関数  $h(\tau)$  を求めることができる。図-1 は、一様乱数から Neumann スペクトルをもつ波を発生させた例である<sup>3)</sup>。

この線形応答系の確率論的取扱いについては、本講座の第 5, 6 回にくわしく述べられるはずであり、また昨

図-1 (b) シミュレーション波のスペクトルと期待した理論値の比較



\*正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

年の学会誌上<sup>5)</sup> その他<sup>6)</sup> で、海岸工学および、水文・水理学への応用について触れられているので、ここではこれ以上ふれないことにする。

## 2. 確率過程の種々の統計的性質<sup>7)</sup>

白色雑音のような全くでたらめな不規則変動は別にして、風の強さ、海の波、河床の砂漣、あるいは車の流れという普通にみられる不規則現象には、ある卓越した周期を認めたり、ときには漠然と感じたりする。風の息だとか、波の平均波長だとか、交通流の波だとかいう言葉は、こうした不規則性の内にある規則性とでもいうべきことを表わしている。

このような不規則現象を特徴づける種々の指標(zero crossing, 極大の表われる平均回数など)の理論は、Rice<sup>7)</sup>により著書「雑音理論」の中にまとめられている。

### (1) 中心極限定理

“ $N$  個の独立な不規則ベクトルの和  $r_1+r_2+\dots+r_N$  の分布は、 $r_1, r_2, \dots, r_N$  の分布がある一般条件を満たすとき、 $N \rightarrow \infty$  につれて正規則に近づく”これを確率論における中心極限定理という。

$k$  次元の不規則ベクトル  $x$  の成分  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  が正規分布であるとき、 $x$  の確率密度関数は  $x$  の 2 次積率  $\mu_{ij}$  のつくる正方行列  $M$

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1k} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k1} & \mu_{k2} & \dots & \mu_{kk} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\mu_{ij} = \overline{x_i x_j} \dots \dots \dots (2.10)$$

を用いて、次のようになる。

$$p(x_1, x_2, \dots, x_k) = (2\pi)^{-k/2} |M|^{-1/2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} x^T M^{-1} x\right] \dots \dots \dots (2.2)$$

ここに、 $|M|$  は  $M$  の行列式、 $x^T$  は行行列 ( $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ) を表わす。 $M_{rs}$  を  $M$  における  $\mu_{rs}$  の余因子とすれば

$$x^T M^{-1} x = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{M_{rs}}{|M|} x_r x_s \dots \dots \dots (2.3)$$

と書ける。

### (2) ゼロクロッシング

不規則変動  $X(t)$  が  $X(t)=0$  となる平均回数(number of zero-crossing) を考える。 $\xi=X(t)$  と  $\eta=\partial X/\partial t$  の joint probability を  $p(\xi, \eta)$  とすると、これは式(2.2)より、次のように書ける。

$$p(\xi, \eta) = \frac{[-\varphi_0 \varphi_0'']^{-1/2}}{2\pi} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\varphi_0} + \frac{\eta^2}{2\varphi_0''}\right] \dots \dots \dots (2.4)$$

ここに、 $\varphi_0, \varphi_0''$  は  $X(t)$  の自己相関を  $\varphi(\tau)$  とするとき、 $\varphi(0)$  および  $\left[\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}$  を表わす。ところで、 $X(t)$  が  $t_1$  と  $t_1+dt$  の間でゼロになるためには、 $t_1$  で  $X(t)=\xi$  であって、 $-\eta dt > \xi > 0$  ( $\eta=\partial X/\partial t < 0$  の場合)あるいは  $-\eta dt < \xi < 0$  ( $\eta > 0$  の場合)であることが必要である。したがって、 $t_1$  と  $t_1+dt$  の間でゼロクロッシングの起こる確率は

$$\int_0^\infty d\eta \int_{-\eta dt}^0 p(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^0 d\eta \int_0^{-\eta dt} p(\xi, \eta) d\xi = dt \int_{-\infty}^\infty |\eta| p(0, \eta) d\eta \dots \dots \dots (2.5)$$

上式に式(2.4)の関係を代入すれば、単位時間あたりのゼロクロッシングの平均回数  $N_0$  は

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\varphi_0'(0)}{\varphi_0(0)} \right]^{1/2} = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{(dX/dt)^2}{\bar{X}^2} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (2.6)$$

あるいは、 $X(t)$  のスペクトル  $S(f)$  を使って

$$N_0 = 2 \left[ \frac{\int_0^\infty f^2 S(f) df}{\int_0^\infty S(f) df} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (2.7)$$

となる。

この方法を一般化すれば、変動  $X(t)$  が正の勾配をもってあるレベル  $X$  を通過する単位時間あたりの平均回数  $N$  は次のようになる。

$$N = \frac{N_0}{2} \exp[-X^2/2\bar{X}^2] \dots \dots \dots (2.8)$$

### (3) 極大値の分布および極大値の数

確率関数  $X(t)$  が矩形領域  $(t, t+dt; \xi, \xi+d\xi)$  で一つの極大値をもつ確率は、 $X'(t)$  は  $(-\infty, 0)$  の間の任意の値をとれるが、 $X'(t)$  は 0 を中心とした  $-(X')' dt = |X'| dt$  幅の値しかとりえないことから

$$-dt d\xi \int_{-\infty}^0 p_1(\xi, 0, \zeta) \zeta d\zeta$$

である。ここに、 $p_1(\xi, \eta, \zeta)$  は  $\xi=X(t)$ 、 $\eta=X'(t)$ 、 $\zeta=X''(t)$  の joint probability density function で、中心極限定理により正規分布である。したがって、極大値が  $\xi$  にある確率が次のようになる<sup>7)8)</sup>。

$$p(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[ \varepsilon e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \frac{\xi}{\sigma} e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2} \right] \times \int_{-(1-\varepsilon^2)^{1/2}/\sigma \cdot \xi}^\infty e^{-1/2 \cdot \pi^2 dx} \dots \dots \dots (2.9)$$

ここに、 $\varepsilon^2 = (\sigma^2 \nu^2 - \rho^4) / \sigma^2 \nu^2$ 、 $\sigma^2 = \int_0^\infty S(f) df$ 、

$\rho^2 = (2\pi)^2 \int_0^\infty f^2 S(f) df$ 、 $\nu^2 = (2\pi)^4 \int_0^\infty f^4 S(f) df$  である。

式(2.9)を $\xi$ について $(-\infty, \infty)$ の範囲で積分すれば、単位時間あたりに起こる極大の平均度数  $N$  が求まる。

$$N = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu}{\rho} = \left[ \frac{\int_0^{\infty} f^4 S(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 S(f) df} \right]^{1/2} \dots\dots (2.10)$$

図-2 は極大値の分布確率  $p(\eta) = \sigma p(\xi/\sigma)$  を  $\epsilon$  をパラメーターとして図示したものである。 $\epsilon$  が 0 から 1 に

図-2 (a) 極大値分布の理論曲線  
(式(2.9)参照)

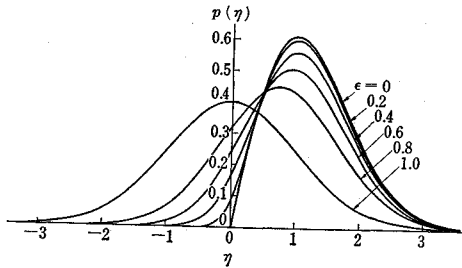
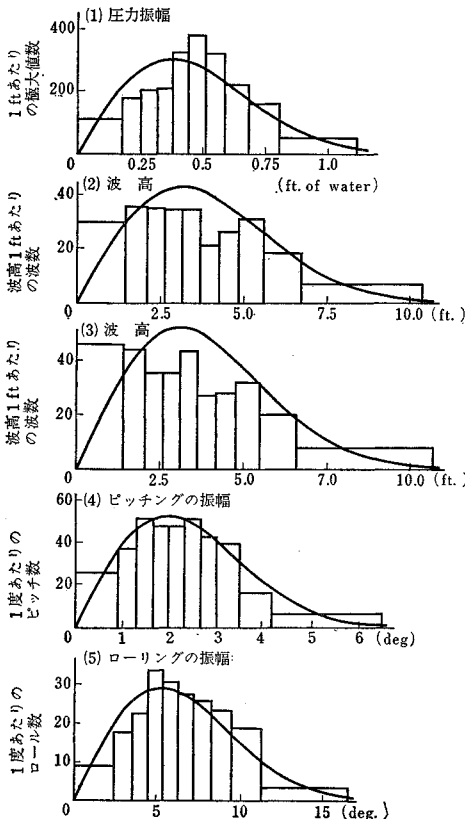


図-2 (b) 波および船の動揺特性の極大値の分布<sup>9)</sup>



変るにつれて、極大値の分布は Rayleigh 分布から Gauss 分布に移ってゆく。

(4)  $M$  個の波の最大値<sup>9)</sup>

$M$  個の波 (変動の卓越波) を観測するとき、その最

大値を知ることは、きわめて興味ある問題である。この問題は Longuet-Higgins & Cartwright により解かれた。特に、 $\epsilon \rightarrow 0$  の場合は

$$\bar{\eta}_{\max} = (2 - \epsilon^2)^{1/2} \left[ (\ln M)^{1/2} + \frac{1}{2} \gamma (\ln M)^{-1/2} \right] \dots\dots (2.11)$$

$\epsilon \rightarrow 1$  の場合には

$$\bar{\eta}_{\max} = 2^{1/2} \left[ \ln \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \right] \dots\dots (2.12)$$

ここに、 $\gamma = 0.5772 \dots\dots$  は Euler 数。

単位時間あたりに観測される波の数の平均値  $N$  は、変動のスペクトルがわかれば、式(2.10)により求めるから  $T$  時間に観測される波の数  $M$  は

$$M = NT = \frac{T}{2\pi} \frac{\nu}{\rho}$$

である。

これらの関係を用いて、瞬間最大値と観測時間の関係、暴風における突風率などを理論的に求めることができる<sup>10)</sup>。

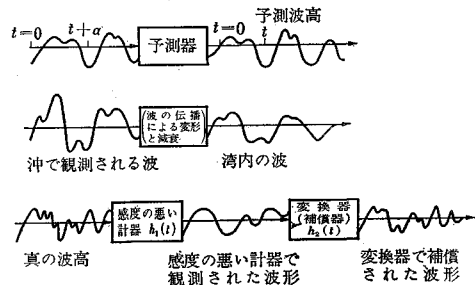
3. 確率理論による予測問題

予測という言葉は、ずいぶん広い意味をもっている。最近はやりの“未来予測”などは、従来の単なる予測——「現在の情報から出発して将来を指向する予測」——ではなくして、「はじめに未来の目標を評価し設定し、未来から後向きに現在をまねく方式」、いわば“かくあるべし”という使命志向型の技術予測で、その最も輝しい成功例がアポロ計画であった。

(1) Wiener の予測理論<sup>11)</sup>

さて、ここで紹介するのは、もっと短期間の、定常確率過程の時々刻々の変化を予測することである。図-3 に示されるように、ある応答 A 系を考えよう。応答系 A は別段電気回路や機械的振動系のように一つにま

図-3 種々の予測問題



ったものでなくてよく、降雨一流出、地震一建物の振動、信号と自動車など因果関係(線形的)のあるものならなんでもよい。

いま、この応答系に時々刻々入ってくる信号(入力)

$f_i(t)$  を観測して、応答系から出てくる信号 (出力)  $f_o(t)$  を  $\alpha$  時間だけすすんで予測したい。実際問題として、入力  $f_i(t)$  の観測には雑音  $f_n(t)$  が伴うし、また応答系も厳密に線形であるとは限らない。そこで、実際の出力信号を“望ましい出力 (desirable output)”として  $f_d(t)$  で表わす。式 (1.1) で予測される  $f_o(t)$  と  $f_d(t)$  の差の2乗平均  $\overline{\varepsilon^2(t)}$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \overline{[f_d(t) - f_o(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{f_d(t) \\ &\quad - f_o(t)\}^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f_i(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - f_d(t) \right]^2 dt \dots\dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

を最小にするというのが Wiener-Kolmogorov Criterion である。

式 (3.1) を変形すれば、相関関数  $\varphi_{ii}(\tau)$  と入出力の相互相関関数  $\varphi_{id}(\tau)$  を用いて式 (3.2) のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma d\tau \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \varphi_{id}(\tau) d\tau + \varphi_{dd}(0) \dots (3.2) \end{aligned}$$

予測誤差の2乗平均  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  を最小にする条件は、変分法により、式 (3.3) のように与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma - \varphi_{id}(\tau) = 0 \quad (\tau \geq 0) \dots (3.3)$$

上式は予測誤差を最小とするような応答関数  $h_{opt}(\tau)$  を与える必要十分条件で、**Wiener-Hopf** の積分方程式と呼ばれる。この式で、 $\tau \geq 0$  の条件 (つまり、式 (3.3) が未来についてのみ成立すればよいこと) が重要な点である。

この条件ゆえに、式 (3.3) の解析解を求めることがきわめて困難となる。**Wiener-Hopf** の積分方程式の解法には、① スペクトル因数分解法、② 直接的な方法、③ 固有関数による展開法、④ 数値解法など種々の方法がある。式 (3.3) を差分表示すれば、連立一次方程式 (3.4) となる。

$$[\varphi_{id}] = [\varphi_{ii}][h_{opt}] \dots\dots\dots (3.4)$$

ここに、 $[\varphi_{id}]$  などは次式で定義される相関関数マトリックスである。

$$[\varphi_{ii}] = \begin{pmatrix} \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(1) & \varphi_{ii}(2) & \dots & \varphi_{ii}(m-1) \\ \varphi_{ii}(-1) & \varphi_{ii}(0) & \varphi_{ii}(1) & \dots & \varphi_{ii}(m-2) \\ & & & & \\ & & & & \\ \varphi_{ii}(1-k) & \varphi_{ii}(2-k) & \varphi_{ii}(3-k) & \dots & \varphi_{ii}(m-k) \\ & & & & \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.5)$$

$$[h_{opt}] = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{pmatrix} \quad [\varphi_{id}] = \begin{pmatrix} \varphi_{id}(0) \\ \varphi_{id}(1) \\ \varphi_{id}(2) \\ \vdots \\ \varphi_{id}(k) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.6)$$

したがって、解  $[h_{opt}]$  は

$$[h_{opt}] = [\varphi_{ii}]^{-1} [\varphi_{id}] \dots\dots\dots (3.7)$$

もし、 $[\varphi_{ii}]$  が正方行列 ( $m=k$ ) ならば

$$[h_{opt}] = [\varphi_{ii}]^{-1} [\varphi_{id}] \dots\dots\dots (3.8)$$

となる。ここに、 $[ ]^T$  は転置行列 (transpose)、 $[ ]^{-1}$  は逆行列 (inverse) である。

式 (3.7)、(3.8) のような数値的解法は、コンピュータによる連立一次方程式の解が簡単に求められる点では便利であるが、解の一般的特性を把握するためにはどうしても解析解が必要である。式 (3.3) の **Wiener-Hopf** 方程式は、 $\tau \geq 0$  の条件のため、すぐ **Fourier** 変換ができない。もし、この条件がなければ、式 (3.3) の解は **Fourier** 変換により

$$H_{opt}(\omega) = \Phi_{id}(\omega) / \Phi_{ii}(\omega) \dots\dots\dots (3.9)$$

となる。ここに、 $\Phi_{id}$ ;  $\Phi_{ii}$ ;  $H_{opt}$  はそれぞれ入出力のクロススペクトル、入力のスペクトル、応答スペクトル (あるいはシステム関数) で、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ii}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ \Phi_{id}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{id}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ H_{opt}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{opt}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.10)$$

最適予測の応答関数  $h'_{opt}(\tau)$  は  $H_{opt}(\omega)$  の逆変換として

$$h'_{opt}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{opt}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \dots\dots (3.11)$$

となる。

最適予測の応答関数が、式 (3.11) のように求まるのは入力の観測誤差が全くなく、応答系が完全に線形である特殊な場合である。一般の場合、つまり式 (3.3) で  $\tau \geq 0$  条件を抜くことができない場合の解析解を求める方法の一つに、**Wiener** による“**スペクトルの因数分解法**”がある。

スペクトル  $\Phi_{ii}(\omega)$  のアーギュメント  $\omega$  を、複素数  $\lambda = \omega + i\sigma$  の範囲に拡張して考える。複素関数スペクトル  $\Phi_{ii}(\lambda)$  は  $\lambda$  のいくつかの点  $\lambda_i$  で 0 点および極をもつ。たとえば、ポアソン分布をもつ不規則矩形波のスペクトルは

$$\Phi_{ii}(\omega) = 1/(b^2\omega^2 + 1) \dots\dots\dots (3.12)$$

であるが、これを

$$\Phi_{ii}(\lambda) = [(b\lambda - i)(b\lambda + i)]^{-1} \dots\dots\dots (3.13)$$

と書くことができる。 $\Phi_{ii}(\lambda)$  は  $b\lambda - i = 0$ 、すなわち  $\lambda = i/b$  ( $\omega = 0, \sigma = 1/b$ ) が一つの極であり、 $\omega = 0, \sigma = -1/b$  がもう一つの極である。

複素関数スペクトルをこのように複素平面  $\lambda$  の上半面に極および 0 点をもつ関数  $\Phi_{ii}^+(\lambda)$  (上の例では  $1/(b\lambda - i)$ ) と  $\lambda$  の下半面に極および 0 点をもつ関数  $\Phi_{ii}^-(\lambda)$

(上の例では  $1/(b\lambda+i)$ ) との積の形で

$$\Phi_{ii}(\lambda) = \Phi_{ii^+}(\lambda) \cdot \Phi_{ii^-}(\lambda) \dots\dots\dots(3.14)$$

と表わすことをスペクトルの因数分解と呼ぶ。

スペクトル因数分解法による Wiener-Hopf 積分方程式の周波数領域での解は次のようになる。

$$H_{opt}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\Phi_{ii^+}(\lambda)} \int_0^\infty e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi_{id}(\omega)}{\Phi_{ii^-}(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega \dots\dots\dots(3.15)$$

[例-1] 予測すべき変動信号  $f_0(t)$  が入力信号  $f_i(t)$  そのものの予測であるとき

$$\left. \begin{aligned} f_i(t) &= f_m(t) + f_n(t) \\ f_d(t) &= f_m(t + \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.16)$$

問題は濾波 filter の問題となる。さらに、雑音  $f_n(t)$  が無いときは“最適純予測”の問題となる。

いま、波形が

$$g(t) = \begin{cases} \pm E e^{-at} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \dots\dots\dots(3.17)$$

であるようなポアソン分布の不規則波を考える。この不規則波のスペクトルは

$$\begin{aligned} \Phi_{mm}(\lambda) &= \frac{E^2}{2\pi} \frac{1}{a^2 + \lambda^2} \\ &= \left( \frac{E}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a+i\lambda} \right) \left( \frac{E}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a-i\lambda} \right) \dots\dots\dots(3.18) \end{aligned}$$

である。また、 $\Phi_{id}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi_{id}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi_{mm}(\tau + \alpha) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\alpha\omega} \Phi_{mm}(\omega)$  である。

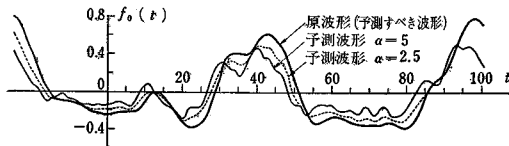
したがって

$$H_{opt}(\lambda) = e^{-a\alpha} \dots\dots\dots(3.19)$$

となり、波の振幅を  $e^{-a\alpha}$  に減らすアッテネーターが最適予測器である。

[例-2] 海の波浪もまたある卓越周波数の波のほか多数の周波数の波から成り立つ不規則波である。時々刻々の波高を予測することができれば、船の操作や港内に停泊中の船の衝撃緩和の方法に役立つ可能性がある。図-4 は Neumann スペクトルをもつ波浪の予測をスペクトル因数分解法により求め、実測波と予測波の波高変化を比較したものである<sup>12)</sup>。

図-4 波浪予測の例 ( $\alpha$ : 予測時間, 図では、この分だけ原波形より変化が早く起こっている)



(2) カルマン フィルター<sup>14)15)</sup>

Kalman は Wiener 以来の情報理論の分野で取り扱われてきた最適フィルターに関する問題を新しい立場から研究し、より一般的な理論を展開した。

Kalman フィルターは近代制御理論の一つの中心手法であるが、土木工学にはその応用例はまだ見いだされないようである。

(3) ダイナミック プログラミング—DP<sup>16)17)</sup>

アメリカの応用数学者 Bellman の創始した多段決定・多元配分過程の最適化の手法であり、われわれには土木計画の手法として強く印象づけられている。しかし、DP は単なる計画手法ではなく、物理数学・基礎的数学などより広い分野にわたる新しい思想と解釈される。DP の手法は「最適性原理」——最適政策とは、最初の状態と最初の決定がどうであれ、それ以後の決定が最初の決定によって生じた状態に関して最適政策となっているようなものである——が基本となっている。DP は最適制御や同定問題に応用されている。

4. 非線形問題

確率過程における非線形問題は、まだわれわれには手のある問題である。最近(1966)行なわれた非線形問題に関する国際会議の席上、原子物理学者の Heisenberg は、現代物理学の問題は非線形数学の発展にかかっていると述べている。この分野では、まだ統一的手法が確立されているとはいえない。本講座では確率過程における非線形問題の二、三の手法を紹介しよう。

(1) Cameron-Martin-Wiener 汎関数展開法<sup>19)20)</sup> —Wiener-Hermite 展開法—

いま、 $a(x)$  を“理想的な不規則関数”あるいは白色雑音とする。記号  $\langle \rangle$  は平均を意味するとすれば

$$\left. \begin{aligned} \langle a(x) \rangle &= 0 \\ \langle a(x_1) a(x_2) \rangle &= \delta(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

であり、かつ  $a$  はガウス分布をもつ。この  $a(x)$  を用いて任意の確率関数  $f(x)$  は

$$f(x) = \int K(x-x') a(x') dx' \dots\dots\dots(4.2)$$

と表わすことができる。ここに、核  $K(x)$  は不規則変化をしない普通の関数である。このとき、 $f(x)$  もまたガウス分布である。

$f(x)$  の非ガウス性を表わすためには、理想的不規則関数の多項式的組合せによる展開を用いればよい。それは、ちょうど多次元の Hermite 関数を定義するのと全く同様の方法でできる。すなわち、次のように  $H^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を定義する。

$$H^{(0)}(x) = 1, H^{(1)}(x) = a(x) \dots\dots\dots(4.3)$$

a) Meecham らによりこの方法が取り上げられたとき、Wiener-Hermite 法と名付けられ、この呼び方が広まってしまったが、最近 Cameron-Martin が最初(1947)に考え出し、Wiener(1958)により彼の理論展開に使われたことが認識されるに至った。

$$\left. \begin{aligned} H^{(2)}(x_1, x_2) &= a(x_1)a(x_2) - \delta(x_1 - x_2) \\ H^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= a(x_1)a(x_2)a(x_3) - a(x_1)\delta(x_2 - x_3) \\ &\quad - a(x_2)\delta(x_3 - x_1) \\ &\quad - \underline{a(x_3)\delta(x_1 - x_2)} \\ &\quad \dots\dots\dots(4.3) \end{aligned} \right\}$$

このように定義された汎関数により、不規則関数  $u(x)$  は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} u(x) &= \int K^{(1)}(x-x_1)H^{(1)}(x_1)dx_1 \\ &+ \iint K^{(2)}(x-x_2, x-x_3)H^{(2)}(x_2, x_3)dx_2dx_3 \\ &+ \iiint K^{(3)}(x-x_4, x-x_5, x-x_6) \\ &\quad H^{(3)}(x_4, x_5, x_6)dx_4dx_5dx_6 + \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned}$$

上式のような不規則関数  $u(x)$  の汎関数展開を、現象を記述する非線形方程式に代入し、さらに汎関数  $H^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の確率的直交性を利用して、確率関数  $u(x)$  の統計的性質を導くことができる。

この方法は、乱流理論に応用されて、いくつかの成果が得られている。

また、Amorocho<sup>21)</sup> や Jacoby<sup>22)</sup> により降雨一流出現象に応用された。

## (2) 特性関数法<sup>23)</sup>

確率変数  $X(t)$  の分布に対する特性関数  $f(u)$  は、 $\exp(iuX)$  の平均値で  $u$  の関数である。

$$f(u) = \text{average} \exp(iuX) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(iuX(t)) dt \dots\dots\dots(4.5)$$

$X(t)$  がガウス分布であるとき、特性関数は

$$\text{average} \exp(iuX) = \exp\{-\bar{X}^2 u^2 / 2\} \dots\dots(4.6)$$

一般に  $k$  次元の不規則ベクトル  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  の分布の特性関数は、各成分  $x_i$  がガウス分布のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \text{average} e^{iz_1x_1 + iz_2x_2 + \dots + iz_kx_k} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \mu_{rs} z_r z_s\right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

ここに、 $\mu_{rs}$  は 2 次積率

$$\mu_{rs} = \overline{x_r x_s}$$

である。

一般に  $X(t)$  の非線形関数  $Y(X)$  は Laplace 変換が可能である。

$$F(iu) = \int_c Y(X) e^{-iuX} dX \dots\dots\dots(4.8)$$

この変換より、 $Y(X(t))$  は

$$Y(X(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_c F(iu) e^{iXu} du \dots\dots\dots(4.9)$$

と表わせる。すなわち、 $X$  の非線形性が“なま”の形で表われない。

したがって、 $X(t)$  を入力とする非線形不規則変数  $Y(t)$  の自己相関関数  $\varphi(\tau)$  は、特性関数  $g(u, v, \tau)$  を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) Y(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \int_0^T dt \int_c F(iu) e^{iuX(t)} du \\ &\quad \times \int_c F(iv) e^{ivX(t+\tau)} dv \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_c F(iu) du \int_c F(iv) dv \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \exp[iuX(t) + ivX(t+\tau)] dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_c F(iu) du \int_c F(iv) g(u, v, \tau) dv \quad (4.10) \end{aligned}$$

例として、柱体に働く不規則波の波力  $F(t)$  を考える<sup>24) 25)</sup>。流速を  $V(t)$ 、加速度を  $A(t)$ 、柱体の径を  $D$ 、抵抗力係数を  $C_D$ 、慣性力係数を  $C_M$  とすれば

$$F_0(t) = \frac{\rho}{2} C_D V(t) |V(t)| + \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} A(t) \dots\dots\dots(4.11)$$

式 (4.8), (4.9), (4.11) により  $F_0(t)$  は次のように表わされ、 $V$  に関する 2 乗項が直接現われなくなる。

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{c^+} \{C\Gamma(3)(iu)^{-3} e^{iuV(t)} \right. \\ &\quad \left. + K(iu)^{-2} e^{iA(t)}\right] du \\ &\quad + \int_{c^-} \{-C\Gamma(3)(-iu)^{-3} e^{iuV(t)} \\ &\quad \left. - K(iu)^{-2} e^{iA(t)}\right] du \dots\dots\dots(4.12) \end{aligned}$$

ここに、積分路  $C^+$ ,  $C^-$  はそれぞれ実軸を  $-\infty$  から  $+\infty$  へ向い、原点で反時計回り、または時計回りに半周するものである。また、 $C = \rho C_D D / 2$ ,  $K = \rho C_M \pi D^2 / 4$  である。上式中の  $C\Gamma(3)(iu)^{-3}$ ,  $K(iu)^{-2}$  などが式 (4.9) の  $F(iu)$  に相当する。

式 (4.10) に式 (4.7), (4.12) を代入すれば、不規則波の波力の相関関数として次式が得られる。

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} (\varphi_V)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{k!} (-\varphi_V'')^k \dots\dots(4.13)$$

ここに、 $\varphi_V$  は不規則流速  $V(t)$  の自己相関関数、 $\varphi_V''$  は  $\varphi_V(\tau)$  のラグ  $\tau$  に関する 2 階微分である。上式において、 $k=0$  および  $k=1$  の最初の 2 項を取り出せば

$$\varphi(\tau) = \frac{8}{\pi} C^2 \bar{V}^2 \cdot \varphi_V(\tau) - K^2 \varphi_V''(\tau) + [\text{高次項}] \dots\dots\dots(4.14)$$

となる。波力のスペクトルは上式の Fourier 変換から、次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{FF}(f) &\approx \left[ \frac{8 C^2 \bar{V}^2}{\pi} + 4 \pi^2 K^2 \cdot f^2 \right] S_{VV}(f) \\ &= \left[ \frac{8 C^2 \bar{V}^2}{\pi} + 4 \pi^2 K^2 \cdot f^2 \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{(2\pi f)^2 \cosh^2 \kappa z}{\sin^2 h^2 \kappa d} \right] S_{\eta\eta}(f) \dots (4.15)$$

ここに、 $S_{VV}(f)$  は波の流速スペクトル、 $S_{\eta\eta}(f)$  は波高スペクトルである。波力スペクトル  $S_{FF}(f)$  は高周波成分の方ほど流速スペクトルや波高スペクトルとの差が大きくなることが示された。

### (3) バイスペクトル

#### 一高次の相関関数およびスペクトル

これまでは2次のモーメント(相関)とその Fourier 変換であるスペクトルについて述べた。しかし、さらに高次のモーメントおよび、その Fourier 変換として高次スペクトルを定義することができる。これらは、乱流におけるエネルギー輸送 (Batcheler 1952), サーフ ビート (Munk 1949, Tucker 1950, Longuet-Higgins & Stewart 1962), 砕波 (Phillips 1958), 波の各波長成分間のエネルギー輸送 (Phillips 1960, Tick 1961, Hasselmann<sup>26)</sup> 1962, 柿沼ら<sup>27)</sup> 1968) などの非線形現象の説明に用いられる。

3次の相関の Fourier 変換を、特にバイスペクトル (Bispectrum) と呼んでいる。

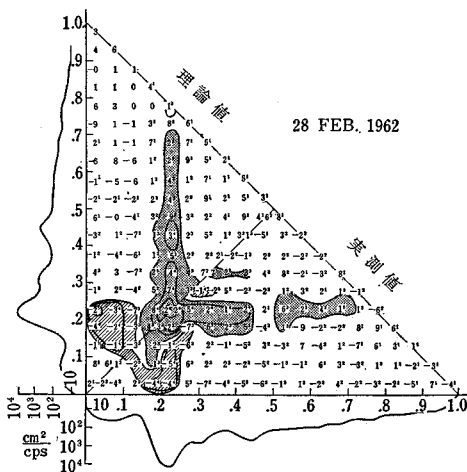
$$B(\omega_1, \omega_2) = (2\pi)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \dots (4.16)$$

ここに

$$R(\tau_1, \tau_2) = \overline{\eta(t)\eta(t+\tau_1)\eta(t+\tau_2)} \dots (4.17)$$

図-5 は、水圧式波高計による波浪高計による波浪のバイスペクトルの実測 (45 度の線の下側) と理論 (45 度の線の上側) との比較を示す。図-5 において、各波長間の相互干渉が最も強いのは、スペクトルのピークにおいてであって、ピーク波自身の干渉の結果、ピーク周波数の2倍の所に別のエネルギーピークが現われてい

図-5 波浪のバイスペクトル



る。また、ピーク周波数より大きいところのバイスペクトルが正であることは、ピーク周波数の波のエネルギーがこれと同位相の高調波側に移行していることを意味している。また、低周波数側でバイスペクトルが負になっている。これは、高波群による海面低下 (Radiation stress) のためとみなされる。

### (4) その他の方法

非線形確率現象の解法には、このほか次のようなものがある。

#### a) Fokker-Planck 方程式<sup>28)</sup> 29)

$k$  次元確率ベクトルの遷移確率  $p_c(\mathbf{X}1 \mathbf{y}, t)$  に関する偏微分方程式を導く。この方程式は線形なので解き易く、これから確率変数の積——率  $\bar{x}^2, \overline{xy}, \bar{y}^2$  etc を求めることができる。

#### b) 等価線形化法<sup>30)</sup>

法非線形微分方程式を線形近似しその中に導入された同価係数を、線型化による誤差が最小になるように決める。

#### c) 摂動近似法<sup>31)</sup>

非線形微分方程式が微小パラメーター  $\epsilon$  により線形方程式よりの非線形度が含まれているとき、 $\delta$  のべき乗を係数とする関数列で解を表わし、 $\epsilon$  の同次項ごとに式を整理して解く。

以上の b), c) は非確率的問題での手法を確率論的問題へ拡張したものである。

### 参考文献

- 1) Lee, Y.E.: Statistical Theory of Communication, John Wiley and Sons, Inc, 1960
- 2) Davenport, W.B. and Root, W.L.: Random Signals and Noise, McGraw-Hill, 1958
- 3) Crandall, S.H.(ed.): Random Vibrations, MIT Press, 1958
- 4) Middleton, D.: An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, 1960
- 5) 土木学会文献調査委員会: スペクトル解析の海岸工学への応用, 土木学会誌, 58 巻 5号, 1968
- 6) 石原・本間編: 応用水理学 (下), 丸善, (刊行予定)
- 7) Rice, S.O.: Mathematical analysis on random noise, Bell System Tech. J., Vol. 23, 1944
- 8) Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc., Vol. 237, 1956
- 9) Cartwright, D.E.: On estimating the mean energy of sea waves from the highest waves in a record, Proc. Roy. Soc., Vol. 247, 1958
- 10) 日野幹雄: 瞬間最大値と評価時間の関係——とくに突風率について, 土木学会論文集, No. 117, 1965
- 11) Wiener, N.: Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley & Sons, 1949
- 12) 日野幹雄: 波浪の予測フィルター・変換フィルター, 第14回海岸工学講演会講演集, 1967
- 13) 日野幹雄: Linear predictive filter for runoff, Proc.

ASCE, J. Hyd. Div. Vol. 96, No. HY 3, 1970, (to be published)

14) Kalman, R.E. : A new approach to linear filtering and prediction problem, Trans. ASME, J. Basic Eng. Vol. 82 1960

15) Kalman, R.E. and Bucy, R.S. : Trans. ASME, Ser. D, Vol. 83, 1961

16) Bellman, R. : Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, 1957

17) Bellman, R. : Adaptive Control Process, A Guided Tour, Princeton Univ. Press, 1961

18) Bellman, R. and Dreyfus, S. : Applied Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, 1962

19) Wiener, N. : Non linear Problems in Random Theory, MIT Press, 1958

20) Meecham, W.C. : Wiener-Hermite expansion in model turbulence at large Reynolds numbers, Phy. Fluids, Vol. 7, No. 8, 1964

21) Amorocho, J. : J. Geophy. Res., Vol. 68, No. 8, 1963

22) Jacoby, S.L.S. : J. Geophy. Res., Vol. 71, No. 20, 1966

23) Rice, S.O. : Mathematical analysis of random noise, The Bell System Tech. J., Vol. 23, 1944, Vol. 24, 1945

24) 日野幹雄 : 柱体に働く不規則波の波力(1), 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 4, 1968

25) 日野幹雄 : パイルに働く波力スペクトルの理論一流れと波の共存する場合, 第15回海岸工学講演会講演集, 1968

26) Hasselmann, K. Munk, and W. MacDonald, G. : Bispetra of ocean waves, Time Series Analysis, ed. M. Rosenblatt, Ch. 8, John Wiley and Sons, 1963

28) 柿沼忠男・石田 昭・門司剛至 : 記録にもとづく海岸波浪の非線型性の解析, 第15回海岸工学講演会講演集, 1968

28) Caughey, T.K. : Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation, J. of Acoust. Soc., Am., Vol. 35, No. 11, 1963

29) Morton, J.B. and Corrsin, S. : Experimental confirmation of the applicability of the Fokker-Planck equation to a nonlinear oscillator, J. Math. Phys., Vol. 10, 1969

30) Caughey, T.K. : Equivalent linearization techniques, J. Acoust. Soc., Am., Vol. 35, 1963

31) Crandall, S.H. : Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems, J. Acoust. Soc., Am. Vol. 35, 1963

第5回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要  
 第5回衛生工学研究討論会講演論文集  
 第9回地震工学研究発表会講演概要  
 第13回水理講演会講演集  
 混相流シンポジウム講演前刷集

体裁 : B 5判 53 ページ 定価 600 円 送料 60 円  
 体裁 : B 5判 169 ページ 定価 1 200 円 送料 80 円  
 体裁 : B 5判 103 ページ 定価 700 円 送料 70 円  
 体裁 : B 5判 120 ページ 定価 800 円 送料 70 円  
 体裁 : B 5判 600 ページ 定価 600 円 送料 60 円

●明日を築く知性と技術

# 鹿島出版会

土木・都市・建設経営・施工管理

## ●土木年鑑1970

土木学会土木年鑑編集委員会編集  
 B5判 500頁/写真・図版・統計表多数 ¥3,500  
 '67・'68・'69年版も取揃え発売中!

### 5大特色

- ①広い視野に立った編集方針
- ②世界の権威を網羅した編集・執筆陣
- ③豊富な内容・系統だった分類
- ④見て楽しめるビジュアルな年鑑
- ⑤美麗・堅牢な造本と鮮明な印刷

## ●都市調査と政策計画

シノア、フェーギン共編/磯村英一訳  
 A 5判・328頁・¥1,400

### 土木一般

- 現場技術者のための基礎工法 ¥3,200
- 薬液注入工法—指針と解説— ¥1,400
- 地盤注入 ¥2,600
- 土木工事ののり面保護工 ¥1,500
- 鉄筋コンクリートの耐久性 ¥430
- 基礎反力の解法 ¥800
- 高速道路計画論 ¥2,400
- 土木・建築の防錆防食 ¥1,200
- 現場技術者のための土質工学 ¥2,500
- 土地造成 ¥1,000

- トンネル施工の問題点と対策 ¥1,300
- 軟弱粘土の圧密 ¥800
- 軟弱地盤における建築の地下掘削工法 ¥590
- 井筒基礎 ¥450
- 簡易索道の計画と設計 ¥980
- 荷役・運搬の計画と設計 ¥1,200
- アースドリル基礎工法 ¥600
- 道路土工の調査から設計施工まで ¥1,300
- シールド工法 ¥1,600
- 水底トンネル ¥840
- 爆破一付ANFO爆薬 ¥900
- インターチェンジの計画と設計 ¥4,500
- 土木新技術選書(全5巻) ¥1,000~1,400

### 都市工学

- 増補 都市問題事典 ¥3,500
- 都市問題概説 ¥950
- 都市開発講座(全3巻) 各 ¥980
- 駐車場の計画と設計 ¥2,500
- 新都市の計画 ¥2,500
- 都市の自動車交通 ¥5,300
- 新しい都市の未来像 ¥920
- フランスの都市計画 ¥900
- 都市の新しい運輸計画 ¥750
- オランダの総合開発計画 ¥2,000
- 東京2,000万都市の改造計画 ¥1,500
- 都市の土地利用計画 ¥3,200
- 国土と都市の造形 ¥5,600

- 高蔵寺ニュータウン計画 ¥2,700
- ランドスケープアーキテクチャ ¥5,300
- 敷地計画の技法 ¥1,600
- 高速道路計画論 ¥2,400
- 都市のデザイン ¥6,300
- 新しい都市理論 ¥1,200
- 前産業型都市 ¥1,200
- 地域再開発 ¥1,200
- 変動する大都市 ¥1,000
- 英国の都市計画法 ¥1,200
- 近畿圏—その人文・社会科学的研究— ¥5,700
- アメリカ大都市の死と生 ¥1,300
- 都市経済学序説 ¥1,700
- 都市と空間 ¥1,300
- 民間ディベロッパ— ¥1,100

### 建設経営・施工管理

- 工事管理 ¥800
- 工事原価管理 ¥650
- わかりやすいPERT・CPM ¥1,600
- 新しい工程管理 ¥1,300
- 建設業成功の秘訣 ¥680
- 新版ジョイント・ベンチャー ¥480
- 国際ジョイント・ベンチャー ¥1,500
- 工事入手から未収金回収まで ¥480
- 建設経営入門 ¥750
- 道路経済学 ¥1,400
- 建設業経営選書(全13巻) ¥700~1,500

鹿島研究所出版会

■ 東京都港区赤坂 6 丁目 5 13 電話(582)2251 振替東京180883