

3

土木技術者のための新数学講座

確率・統計 (B)

その1 / 日野 幹雄*

はじめに

十数年前の大学(少なくとも工学部のほとんどの学科)の講義では、確率・統計といえば標本のサンプリング・度数分布・平均・標準偏差・超過確率、等々の資料統計を教えるにとどまっていたように思う。しかし、現在大学で教える(また日常エンジニアの用いる)確率統計の範囲は、きわめて広いものになりつつある。

相関関数・スペクトル・コヒーレンスということば、あるいはダイナミック・プログラミング、ゲームの理論、OR 等々の方法がなんの抵抗もなく使われ、現象の理解や設計指針をより明確にとらえられるようになってきた。こうしたことは、大学卒業者の量的質的な増加や研究エンジニア層の厚さが増したことによるのはもちろんであるが、同時に高速デジタルコンピューターをめざましい発展によるものであることも、忘れてはならない。複雑な確率統計の理論も、コンピューターの出現により、意外に容易に実際問題に応用され、その成果がすばらしかったのである。

確率論、確率、過程論の考え方は、とくに相関だとかスペクトルとか応答とかいう概念は工学の各分野に広く応用され、現象の理解や設計技術の高度化に資している。そればかりでなく、情報理論も確率論的に論じられているし、また確率論を近代数学(測度論、集合論)のうえに基礎づけようとするも行なわれている。

現在、著者の勤務する大学の土木工学科では、確率統計プロパーの講義は行なっていないけれども、耐震工学、防災工学、海岸工学、水文学の講義において部分的に取り扱われている。さらに、大学院では、いや応なしに確率論的な面で鍛えられる。

さて、この講座の著者担当分は、次の伊藤学東大助教授の「不規則な現象の解析」と関連する部分が多いので、表題は異なるけれども一連のものとしてお読みいた

* 正会員 工博 東京工業大学 助教授 工学部土木工学科

だきたい。また、“わかりやすく”との編集委員会からの強い要望に沿って、簡単な場合のみ取り上げたので、さらにすすんだ内容については引用文献をあたっていただきたい。

今回は新書本風に、易しく砕いた説明を試みた。次回はこれをもとにして、もう少し複雑な問題の取扱いを述べる予定である。

1. モンテカルロ法

—トランプで微分方程式を解こう—

モンテカルロは地中海のモナコ王国の賭博の町の名である。この多少ふざけた名を付けられた計算法は、賭博が確率的であること以外、この町とはなんらの関係もない。モンテカルロ法 (Monte Carlo method) は

“決定論的あるいは確率論的な問題の解決に、無作為抽出の方法を利用すること”

と定義される。この方法はよく知られているように OR (オペレーションズ リサーチ) において、社会科学、経営、軍事など種々の事象のシミュレーションに広く利用されている。つまり、確率論的な問題への応用である。

しかし、決定論的な問題への応用はあまり知られていないようである。しかも、この新しい数学の手法の本格的な成立は意外に新しいのである。決定論的な問題へのモンテカルロ法の応用は、1945 年ころより原子の町ロスアラモスで von Neuman, Ulam, Fermi らにより原子兵器の製造・放射線の遮蔽・シュレーディンガー方程式の解法に用いられて以来、急速に応用範囲を広げた。

この種の問題としては、円周率 π を求めるのが最も簡単な例である。図-1 のように、正方形とその一隅を中心とし正方形の一辺を半径とする $1/4$ 円を考える。この図形の上にまったくでたらめに針を落とすか、あるいは $(0,1)$ 区間の一様乱数を 2 個ずつ選んでそれを x 座標・ y 座標として 1 点をでたらめに決めるかして多数の試行のうち、 $1/4$ 円内に落ちた点の数 n と正方形内の点の数 N を数えれば、

図-1 モンテカルロ法による π の確率論的な求め方

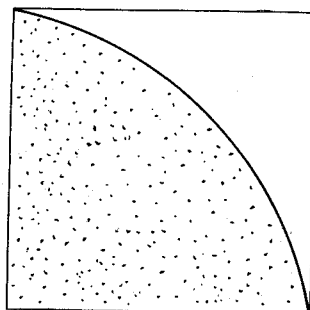


図-2 Buffon の方法による π の確率論的な求め方

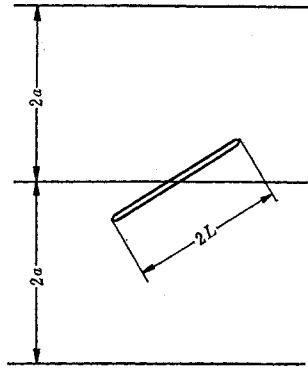
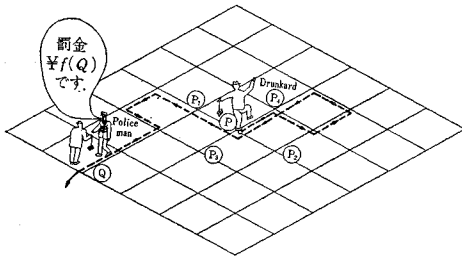


図-3 ラプラスの方程式を解く酔払い



$$\frac{n}{N} = \frac{1/4 \text{ 円の面積}}{\text{正方形の面積}} = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots(1.1)$$

より π の値を推定することができる。

π の確率論的な計算法には Buffon の方法 (1777) もある。床の上に間隔 $2a$ の平行線を多数引いておく。この床の上に長さ $2L(2a \geq 2L)$ の針をでたらめに落とすとき、針が平行線と交わる確率 P は

$$P = 2L/a\pi \dots\dots\dots(1.2)$$

である。これにより π を求めることができる。

(1) ラプラスの方程式のモンテカルロ法による解

さて、もっと進んだモンテカルロ法の例をあげよう。

トランプで偏微分方程式が解けるといったら、何をたわけたことをと思う人もいるかもしれない。しかし、できるのである。いま碁盤目状にきちんと街路の整った都市を考えよう (図-3)。この都市の外周は深い溝で囲まれている。いま、ある町角に一人の酔払いがおり、ふらりふらり、千鳥足で歩いている。酔いは相当まわっており、各辻にきては、まったくでたらめに4本の道の一つの方向に進んでゆく。つまり、街路の途中で逆もどりはしないし、四辻では $1/4$ の確率で4本の街路の一つを選んで次は次の辻に達する。そのうち酔払いが外周の溝に落ち込んでしまう。

酔払いが P 点から出発し、外周の1点 Q に達する確率を $\phi(P, Q)$ とすれば、この確率は P 点からその相隣る

4点 P_1, P_2, P_3, P_4 に移り (その確率はそれぞれ $1/4$)、そこから Q に行く確率 $\phi(P_i, Q)$ の和に等しい。すなわち

$$\phi(P, Q) = \frac{1}{4} [\phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q) + \phi(P_3, Q) + \phi(P_4, Q)] \dots\dots\dots(1.3)$$

また、 P 点が外周上の一点 Q' とすれば、

$$\phi(Q', Q) \begin{cases} = 1 & (Q' = Q) \\ = 0 & (Q' \neq Q) \end{cases} \dots\dots\dots(1.4)$$

である。式 (1.3)(1.4) は、実はラプラス (Laplace) 方程式

$$\nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(1.5)$$

の差分表示にほかならない。すなわち、関数 ϕ を求めるべき (x, y) の領域を間隔 $\Delta x = \Delta y = h$ の格子網でおおえば

$$[\partial \phi / \partial x]_{P_{10}} = [\phi(P_0) - \phi(P_1)]/h \quad (P \text{ と } P_1 \text{ の中間点で})$$

$$[\partial \phi / \partial x]_{P_{20}} = [\phi(P_2) - \phi(P_0)]/h \quad (P \text{ と } P_2 \text{ の中間点で})$$

したがって

$$[\partial^2 \phi / \partial x^2]_P = [\phi(P_2) + \phi(P_1) - 2\phi(P)]/h^2$$

結局、式 (1.5) の差分式は

$$\phi(P) = [\phi(P_1) + \phi(P_2) + \phi(P_3) + \phi(P_4)]/4h^2 \dots\dots\dots(1.5a)$$

となる。酔払いが P 点を出発し、ふらふら歩く実験を N 回繰り返す、そのうち Q 点に達する回数 L を数えれば、式 (1.4) の境界条件を満たす Laplace 方程式 (1.5) の解は

$$L/N \approx \phi(P, Q) \dots\dots\dots(1.6)$$

より求めることができる。

周囲 Γ での一般的な境界条件 (1.7)

$$\phi|_{\Gamma} = f(Q) \dots\dots\dots(1.7)$$

に対する Laplace 方程式の解を求めるには、酔払いが外溝に落ち込むと罰金 $f(Q_i)$ をとられるものとし、 P 点から出発した酔払いが払う罰金の期待値

$$\bar{\phi}(P) = \sum_{i=1}^s f(Q_i) \phi(P, Q_i) \dots\dots\dots(1.8)$$

(s は境界格子点の数) を求めるとよい。

この計算をトランプで行なうことを考えよう。トランプからジョーカーを除けば札は4種のカードである。そこで

- ♠ 東へ一辻すすむ
- ♡ 西へ一辻すすむ
- ◇ 南へ一辻すすむ
- ♣ 北へ一辻すすむ

と約束し、52枚のカードをよく切って一枚引き、カードのしるしに従って酔払いをすすませる。そのカードを元にもどし、また同じことを酔払いが溝に落ち込んで罰

金を払うまで繰り返す遊びを多数回行なえばよい。これは、なかなか頭脳の遊びである。境界の罰金額は公表しておく。この分布が複雑なほど面白い。数名が各自格子点の一点を指定し、上記のルールにより遊びを始めるのである。ただし、境界近くは罰金の期待値がわりにはっきりしているから、境界近くの点は除外しなければならない。遊びそのものは賭博的ではあるが、上に述べたように結論は決っているのだから、ラプラス方程式の解を正しく推定したほうが勝ちということになる。

ポアソン方程式 (1.9)

$$\left. \begin{aligned} r^2\phi &= f(x) \\ \phi_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.9)$$

の解をモンテカルロ法で求めるには、やはり酔払いの行動を考えればよいが、前と違うのは酔払いが街角ごとに溝に落ちて罰金 $f(P_i)$ を徴収される点である。 $f(P_i)$ が負ならば酔払いは見舞金を受け取るわけである。 P 点から出発した酔払いが徴収される罰金の総額の期待値 $\phi(P)$ が、ポアソン方程式の解となる。

(2) 逆行列および連立一次方程式のモンテカルロ法による解

連立一次方程式 (1.10) を取り扱おう。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.10)$$

この式を行列を用いて

$$Ax = b \dots\dots\dots(1.10 a)$$

と表わす。ここに

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.11)$$

単位マトリックス E とマトリックス A との差として、マトリックス B を導入する。

$$A = E - B \dots\dots\dots(1.12)$$

B の各要素を B_{mi} とする。つまり

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.13)$$

連立一次方程式 (1.10) または (1.10 a) の解は

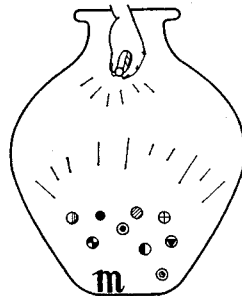
$$x = A^{-1}b \dots\dots\dots(1.14)$$

と表わされるが、 A の逆行列 $A^{-1} = (E - B)^{-1}$ を級数展開して

$$A^{-1} = E + B + B^2 + \dots + B^n + \dots\dots\dots(1.15)$$

よって、式 (1.14) (1.15) から x は次のようになる。

図—4 m 番目の壺から球を手で取り出す



表—1 壺の中の球と取り出す確率と得点

球の番号	m 番目の球を壺から取り出す確率	球を壺から取り出したときの得点
1	B_{m1}	b_1
2	B_{m2}	b_2
3	B_{m3}	b_3
\vdots	\vdots	\vdots
n	B_{mn}	b_n

$$x = b + Bb + B^2b + \dots + B^n b + \dots\dots\dots(1.16)$$

ベクトル x の m 成分 x_m は B の各成分を用いて

$$\begin{aligned} x_m &= b_m + \sum_i B_{mi}b_i + \sum_{i_1, i_2} B_{mi_1}B_{i_1i_2}b_{i_2} + \dots \\ &+ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} B_{mi_1}B_{i_1i_2} \dots B_{i_{r-1}i_r}b_{i_r} + \dots\dots\dots(1.17) \end{aligned}$$

いま、最も簡単な場合として、 B の要素が負ではなく、各列の要素の和が1に等しい場合

$$\sum_{i=1}^n B_{mi} = 1 \dots\dots\dots(1.18)$$

を考える。このような場合には、 B_{mi} は脊反事象の確率を意味しているとみなせる。こういう解釈に立てば、式 (1.17) を確率の問題と関係づけることができ、モンテカルロ法による解が可能である。

いま、 n 個の壺が用意されており、それぞれの壺には種類の異なる n 個の球が入っている。 m 番目の壺から i 番の球を取り出す確率を B_{mi} とし、そのときの得点を b_i とする。そうすれば、 m 番目の壺から1個の球を取り出すときの得点の期待値 $M(\xi_m)$ は式 (1.19) のとおりである。

$$M(\xi_m) = \sum_{i=1}^n B_{mi}b_i \dots\dots\dots(1.19)$$

次に、順次2個の球を取り出す場合を考えよう。この場合には、まず m 番の壺から1球を取り出し、それが i_1 番球であれば、その球を元にもどしたのち、 i_1 番目の壺から球を取り出す。その球が i_2 番球であれば得点を b_{i_2} とする。第2球目に i_2 番球を取り出し、 b_{i_2} 点を得る確率は $\sum_{i_1=1}^n B_{mi_1}B_{i_1i_2}$ であり、したがって2球取り出す場合の得点 η_m の期待値は

$$M(\eta_m) = \sum_{i_2} \sum_{i_1} B_{mi_1}B_{i_1i_2}b_{i_2} \dots\dots\dots(1.20)$$

である。これは、式 (1.17) の右辺の第3項を確率操作により求めることに相当する。このような操作を次々に

続けていけば、連立一次方程式の級数解を求めることができる。

B の各列の要素の和が1でない場合への一般化は、次のようにすればよい。 B や b の要素を確率 P_{mj} と得点 F_{mj} の積として表わす。

$$\left. \begin{aligned} B_{mj} &= F_{mj} P_{mj} \quad (0 < P_{mj} < 1) \\ b_m &= f_m p_m \quad (0 < p_m < 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.21)$$

前と同じように n 個の壺があり、各壺には $(n+1)$ 個の球が入っており、 m 番目の壺から各球を取り出す確率は、それぞれ $P_{m1}, P_{m2}, P_{m3}, \dots, P_{mn}, p_m$ であると考ええる。そして、当然 $p_m + \sum_{j=1}^n P_{mj} = 1$ である。球を取り出す操作は stop ball $(n+1)$ 番球を引いたときに止めることとし、得点はそれまで取り出した各球に対する得点の相乗積とする。したがって、 B の要素の列の和が1でない一般の場合には、上のルールに従って球を取り出すゲームを多数回行なって、その平均得点を求めることから解 x_m が定められる。

A の逆行列 $A^{-1} = G$ の要素 $g_{m,k}$ をモンテカルロ法により求めるには、球を取り出す操作を m 番壺から始める。まず、 i_1 番号が取り出されると、次は i_1 番壺から球を取り出すことを続け、 r 回目に stop ball である $(n+1)$ 番球が出たとすれば、得点 ξ を

$$\left. \begin{aligned} r \neq k \text{ ならば } \xi &= 0 \\ r = k \text{ ならば } \xi &= F_{mi_1} F_{i_1 i_2} \dots F_{i_{r-1} k} p_k^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.21)$$

と約束する。逆行列の要素 $g_{m,k}$ は、得点の平均値として与えられる。なぜならば、得点の期待値 $M(\xi) = g_{m,k}$ は

$$\begin{aligned} g_{m,k} &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}} \dots \sum (F_{mi_1} F_{i_1 i_2} \dots F_{i_{r-1} k} p_k^{-1}) \\ &\quad \cdot (P_{mi_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{r-1} k} p_k) \\ &= \delta_{mk} + \sum B_{mi_1} B_{i_1 i_2} \dots B_{i_{r-1} k} \dots\dots\dots (1.22) \end{aligned}$$

となり、これは式 (1.15) であることから容易にわかる。

(3) その他の問題

モンテカルロ法の決定論的問題への応用は、このほかに多数ある。たとえば、固有値および固有関数、第2種フレドホルム型積分方程式、等角写像における流線の対応、多重積分などである。上述の諸問題の大部分はモンテカルロ法によらなくとも直接的方法で解が見つけられる。モンテカルロ法は解の第1次近似を得るのに用いられる。しかし、多重積分については、モンテカルロ法ははるかに有利である。

2. フーリエ変換とスペクトル —確率現象の分光器—

(1) 自己相関および相互相関

いま時間 t とともに変動する量の平均値との差を $f(t)$ を考える。 $f(t)$ は降雨量とか、河川の流量とか、道路のある地点を通過する自動車の台数と思えばよい。時間 t とそれから τ だけずれた $(t+\tau)$ での f の値の積 $[f(t)f(t+\tau)]$ は一般には、やはり時間 t の値により異なるけれども、“定常確率過程” では十分長い時間 T の平均をとれば、すなわち

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau) dt = \overline{f(t)f(t+\tau)} \dots\dots\dots (2.1)$$

は、ずれ時間 τ のみの関数となる。この $C(\tau)$ を自己相関関数 (auto-correlation function) という。

例として日降雨量と平均日降雨量との差 $f_i(t)$ を考えよう。日降雨は大変不規則であるから τ の値が4日とか5日になると、ほとんど互いに関連がなくて $C_{ii}(\tau) \rightarrow 0$ となる。しかし、月降雨量を考えれば、 $\tau \approx 12$ カ月となれば、1年を周期とする気候の変化のために $\tau=0$ での C_{ii} の値にきわめて近くなる (図-5 a)。一方、河川の日流量の年平均流量との差 $f_o(t)$ についてみれば、降雨の河道での滞留や地下浸透のため、かなり長い日数の間にわたって降雨の影響が残る。したがって、 $C_{oo}(\tau) = \overline{f_o(t)f_o(t+\tau)}$ は、 $C_{ii}(\tau)$ に比べると、はるかに長いですそを引く (図-5 b)。

このように自己相関関数を調べると、一見不規則に見える現象にもいろいろな特徴があることが明瞭になる。

図-5 降雨—流出の相関

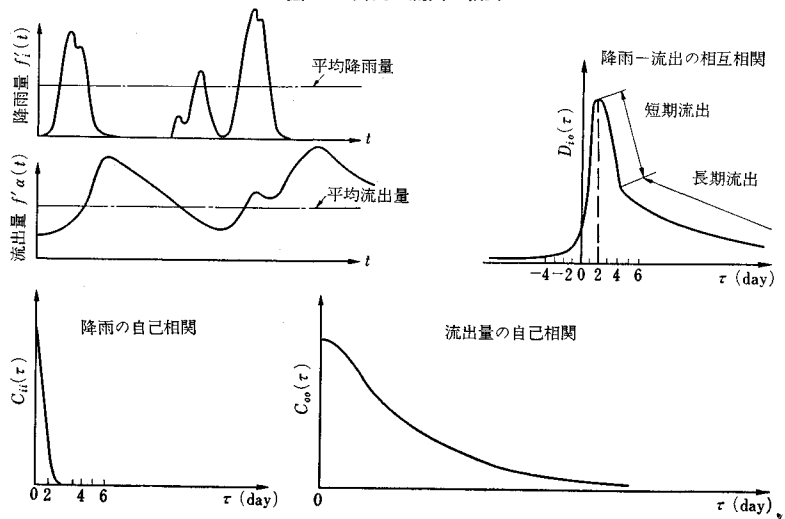
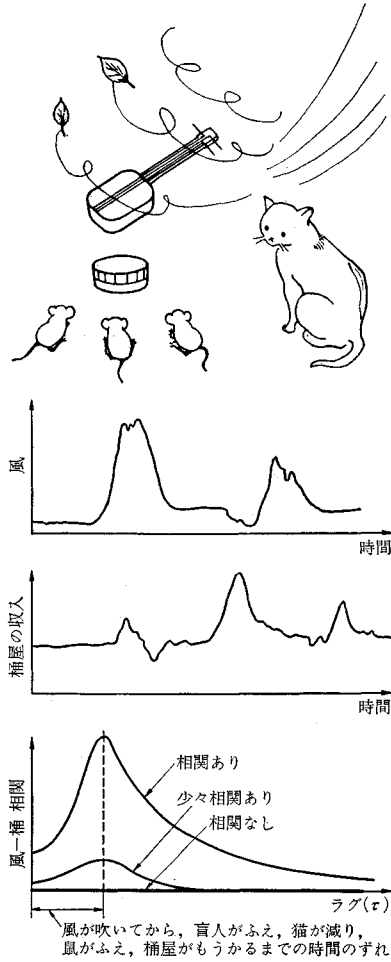


図-6 相互相関



あるいはまた、漠然と感じていた不規則現象の特性を量的にきちんと表わすことができる。

この自己相関の概念をさらにすすめたものが、相互相関関数 (cross-correlation function) である。よく引用される笑話に「風が吹けば桶屋が儲る」というのがある。一見無関係な事実だが、理由 (風が吹く → 砂埃がたつ → 盲人がふえる → 三味線が売れる → 猫がいなくなる → 鼠がふえる → 桶が鼠にかじられる → 桶が売れる) を聞けば、あるいはそうかもしらんと思う。どの程度本当に関連があるかは2つの現象の相関を取ればよい (図-6)。

2つの不規則変動量の平均値からの差を $f_i(t)$ 、 $g_0(t)$ とすれば

$$D(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) g_0(t+\tau) dt = \overline{f_i(t) g_0(t+\tau)} \quad (2.2)$$

で定義される関数を相互相関関数という。2つの不規則変動量が、どの程度またどのくらい長く互いに関連しているか、一つの原因となる現象から、その影響を受け

る現象にどれほどの時間たってから最も大きな効果が表われるかをも相互相関は示してくれる。例えば、図-5には強い降雨の2日後に河川流量が最大となる例があげてある。この例では、流出は短日時のうちに相関のなくなる成分と長期にわたって降雨との相関のある成分 (浸透流出) の2つの成分に分かれることも示している。

自己相関関数は $C(-\tau) = C(\tau)$ という性質をもつが、相互相関関数は一般に $\tau = 0$ に関して非対称である。

以上のように、自己および相互相関は不規則な現象の性質を理解するのに大変役立つことがわかったが、さらにすすんでスペクトルという概念は、いっそうすぐれている。

(2) スペクトル

著者たちは高校あるいは大学で「光は電磁波の一種であり、種々の波長の波から成り立っており、プリズムを通すと成分である七色の光いわゆるスペクトルを見ることができる」ことを教わる。ところで、不規則な変動も位相や振幅がでたらめになる種々の周期の正弦波の混合とみなしうる。不規則変動がどのような周期の波から成り立ち、おのおのの波がどのような割合で混じり合っているかを示したものを、光の場合の言葉を転義してスペクトル (spectrum) と呼ぶ。光の場合にはプリズムを通して種々の色の混合の具合を簡単に見ることができるが、

図-7 不規則波とスペクトル

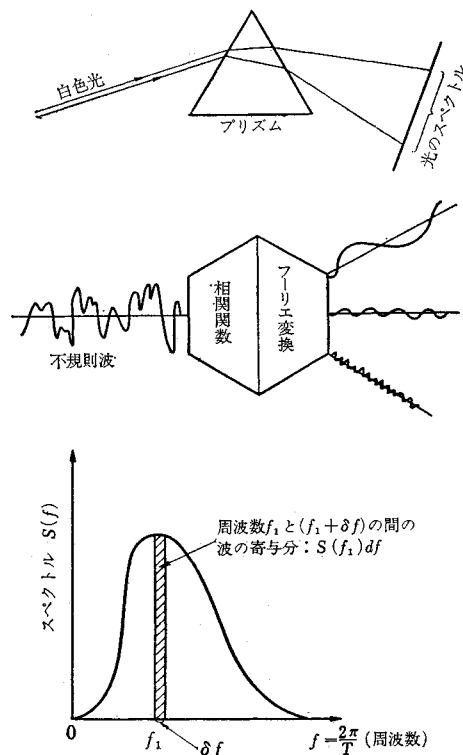
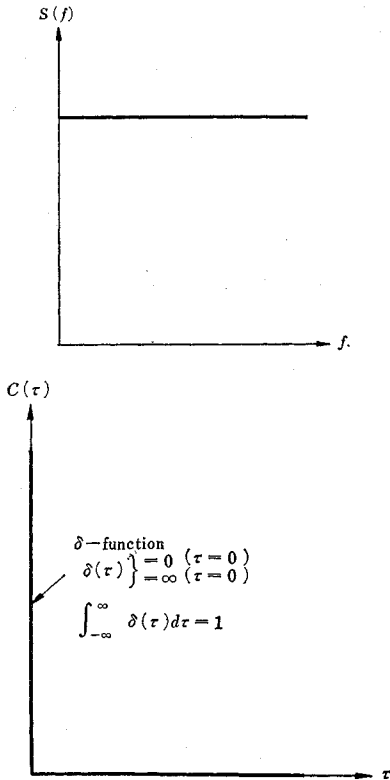


図-8 白色雑音スペクトルと自己相関



不規則変動の場合には機械的あるいは電気的共振系により特定周期の波成分を取り出す方法、いわばアナログ的フィルターによる方法、特に高速デジタルコンピューターを用いた数値的操作による方法がある。後者の方法は、スペクトルが相関関数のフーリエ変換 (Fourier transform) で表わされ、またスペクトルの逆のフーリエ変換が相関関数であるという、**Wiener-Khinchin**の公式

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \\ C(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f \tau} df = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

を利用するものである (図-7)。ただし、上式で

$$\overline{f_i^2(t)}/2 = C_0/2 = \int_0^{\infty} S(f) df$$

でスペクトル $S(f)$ が定義されている。つまり、変動の二乗平均の半分の値への各周波数成分から寄与分がスペクトル $S(f)$ である。

(3) クロス・スペクトルとコヒーレンス

自己相関のフーリエ変換からスペクトルが導かれたと同じように、相互相関のフーリエ変換として、相互相関に対する各周波数成分の寄与を表わすクロス・スペクトル

が導かれる。ただし、相互相関は $\tau=0$ に関して左右非対称であるから、そのフーリエ変換は実数部のほかに虚数部ももつ。

$$\left. \begin{aligned} S_{i_0}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_0}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \\ D_{i_0}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{i_0}(f) e^{i2\pi f \tau} df \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

クロス・スペクトル $S_{i_0}(f)$ の実数部 $C_{i_0}(f)$ を、co-spectrum, 虚数部 $Q_{i_0}(f)$ を quadrature spectrum と名付ける。すなわち

$$\left. \begin{aligned} S_{i_0}(f) &= C_{i_0}(f) + iQ_{i_0}(f) \\ C_{i_0}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_0}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \\ Q_{i_0}(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_0}(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

$S_{i_0}(f)$ は複素数であるので、その絶対値 $|S_{i_0}(f)| = \sqrt{C_{i_0}^2(f) + Q_{i_0}^2(f)}$ と位相角 $Q_{i_0}(f) = \tan^{-1}[Q_{i_0}(f)/C_{i_0}(f)]$ で表わすこともある。また、2つの不規則変動量 $f_i(f)$ と $g_0(f)$ のスペクトル $S_{ii}(f)$, $S_{00}(f)$ とクロス・スペクトル $S_{i_0}(f)$ から定義される量

$$r_{i_0}^2(f) = |S_{i_0}(f)|^2 / S_{ii}(f) S_{00}(f) \dots\dots\dots(2.6)$$

はコヒーレンス (coherence) と呼ばれ、2つの変量の各周波数成分ごとの相関性を表わす。一般に

$$0 \leq r_{i_0}^2(f) \leq 1 \dots\dots\dots(2.7)$$

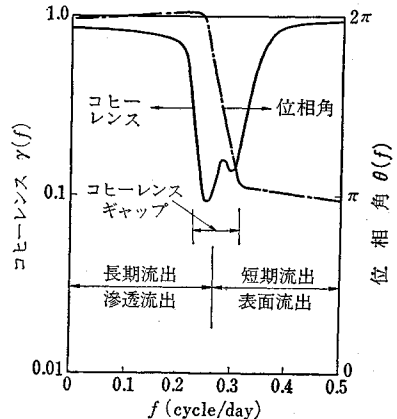
であることが証明されるが、 f_i と g_0 がそれぞれ線型応答系への入力と出力であれば

$$r_{i_0}^2(f) = 1$$

となる。

図-9 は、降雨強度があまり大きくない場合の日降雨量と日流出量とのコヒーレンスと位相角を求めた一例である。この2つの量には因果関係はもとより明確であるが、周波数が 0.2~0.3 cycle/day の範囲を除けば、きわめて強い相関性があり線型系であること (降雨量と流出量の間には比例関係があり、また重ね合わせができること) がわかる。すなわち、降雨量あまり多くなければ

図-9 降雨強度があまり強くない場合の日降雨一日流出のコヒーレンスと位相角の一例



ば、単位図法 (unit hydrograph) の考え方が合理的である。また、位相角 (降雨に対する流出の遅れ) が $f=0.2\sim 0.3$ cycle/day を境にして、はっきりと2つの成分 (短期流出と長期流出) に分れることが示されている。また、 $f=0.2\sim 0.3$ cycle/day のコヒーレンス・ギャップの成分 $|S_{i0}(f)|^2$ は、あまり大きくない。

(4) 白色雑音

白色光はすべての波長の光が均等に混じったものである。すべての周波数の波が均等に混じっている不規則変動を、従って「白色雑音」(white noise)と呼んでいる。白色雑音のスペクトルは、もちろん一定レベルの水平な直線で示されるが、このフーリエ変換である自己相関は δ -関数となる。

(5) トゥーキー (Tukey) の方法

上述の諸式によって、実際のデータからスペクトルやクロス・スペクトルを計算する場合、ただ単純にこれら①式を差分式とするのではなく、データの長さ、データの読み取り間隔、相関関数のラグ τ の最大値を適当に設定しないと、信頼しうるスペクトル解析の結果が得られない。場合によっては全くでたらめで不合理な結果を得ることもある。通信理論の立場から、正しいスペクトルの計算法が Tukey と Blackman により研究された。この方法は普通 Tukey の方法と呼ばれている。紙数の関係上詳細は参考文献 [C-(1,2,3)] にゆずる。

(6) FFT—高速フーリエ変換

スペクトル解析は、多数のデータに多くの演算をほどこすため現在の最高水準のコンピューターでも数分~数十分を要するという難点があった。しかし、1965年 Cooley と Tukey により、計算時間を驚異的に短縮する計算法——高速フーリエ変換 Fast Fourier Transform 略して FFT——が発表されて、大きな反響を巻き起こしている。

参考文献

A. 新しい数学についての入門書

- 1) E.F. ベッケンパッフ編・吉田耕作監訳：エンジニヤのための現代数学，ダイヤモンド社
- 2) J.G. ケメニーほか：新しい数学とその応用，ダイヤモンド社

B. モンテカルロ法

- 1) 宮武修・中山隆：モンテカルロ法，日刊工業新聞社，1960.
- 2) Shreider, Yu.A. (editor) : The Monte Carlo Method —The Method of Statistical Trials, Pergamon Press, 1966.
- 3) Hommersly, J.M. and Handscomb, D.C. : Monte Carlo Method, Methuen and Co. Ltd, 1964.
- 4) Meyer, H.A. (editor) : Symposium on Monte Carlo Method, John Wiley & Sons, Inc., 1956.

C. 相関係数・スペクトル

- 1) Blackman, R.B. and Tukey, J.W. : The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering, Dover Publications, Inc., 1958.
- 2) 赤池弘次：不規則振動のスペクトル解析，統計数理研究所
- 3) Bendat, J.S. and Piersol, A.G. : Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- 4) 磯部 孝(編)：相関関数およびスペクトル——その測定と応用，東京大学出版会，1968.
- 5) 石原・本間(編)：応用水理学，(下)丸善(刊行予定)

土木学会創立 50 周年記念出版

日 本 土 木 史

——大正元年から昭和 15 年まで——

「明治以前日本土木史」が土木学会より刊行されてから 30 年……。これにつぐ土木史としてとりまとめられた本書には大正元年から昭和 15 年までの 30 年間の日本の土木の歴史が余すところなくとらえられてありますのでぜひご一読下さるようおすすめいたします。昭和 16 年~40 年は目下編集中です。

体 裁：B5判 8ポ横一段組み 本文 1770 ページ 図 410 葉 表 500 点
写真 150 枚余 上製箱入革製豪華製本 定価 12000 円 (〒 300 円)

内 容：第 1 章 河川・運河・砂防・治山／第 2 章 港湾・漁港・航路標識／第 3 章 農業土木／第 4 章 都市計画・地方計画／第 5 章 道路／第 6 章 軍事土木／第 7 章 上水道・下水道および工業用水道／第 8 章 土木行政／第 9 章 建設機械／第 10 章 トンネル／第 11 章 発電水力およびダム／第 12 章 鉄道／第 13 章 水理学／第 14 章 応用力学／第 15 章 土性および土質力学／第 16 章 測量／第 17 章 土木材料／第 18 章 コンクリート／第 19 章 土木教育史／第 20 章 学・協会史／付・日本土木史年表