2

土木技術者のための 新数学講座

土木計画のための確率・統計

その2／吉川和広*

1. はじめに

先月号においては，土木計画という立場から確率・統計を眺め直すことにより，方法論すなわち補助科学としての統計学を主張した。土木計画における計画科学は経験科学として，自然および社会現象に関する法則性を明らかにすること，および計画のための方法選択に至る過程を科学的に組織化することであると述べた。従って，計画科学の一研究方法としての統計方法もその任務を計画科学と共有するものでなければならないことを指摘した。

次いで統計学の基礎概念を明らかにするため

① 集団について
② 操作的な考え方について
③ 統計における二つの立場について
④ 標識づけについて
⑤ 標識に差異のあるものの取り扱いについて
⑥ データのとり方について
⑦ 数量化について

それぞれ説明を加えた。最後に土木計画のための統計調査についてその考え方を述べるとともに，その手法の概要を紹介した。

今月号においては，引続き土木計画のための統計的予測および方法選択のための統計的決定について，その考え方を明らかにするとともに，その手法の概要を紹介することとする。

2. 土木計画のための統計的予測

計画は本来ある時点，通常現在において，それ以後のわれわれの行為を最も合理的にするためにつくられるものである。すなわち，計画とは現時点を起点として不確定性の広がっていく未来に向って描かれた目標であり，不確定性の効果的な処理のために求められるものと考えることができる。従って，計画が現在の意志決定にその本質があるとしても，すべて未来の予測がその基調となる。

特に土木計画においては，未来における社会的・経済的・物理的な需要の充足を目的として，土木施設もしくは機能を造成していくことにその本質があると考えられる。したがって需要予測の概念を明確にすることは，土木計画の科学化を進める上できわめて重要である。

われわれは，需要という無体物の行動に関する情報として，顕在化した過去の需要量と，それが行動した，社会体系の状態を有している。この空間を需要空間という。需要空間の状態変化でもって，需要の行動が表現できるように，需要空間の構成要素とその特性を解明するのが需要予測である。このためには，調査統計資料の情報的把握ならびに，需要空間の構成要因の理論的究明，その分析の技術的確立が重要である。次に予測である以上，確立された需要空間の将来の状態は，その構成要素の行動によって記述されるわけであるが，各要素は制御可能なものと不可能なものに分かれる。従って，何が制御可能であるか，それをいかなる手段によってコントロールすべきか，またその結果として需要空間の状態がどのようになるかを表現するためのシステム モデル が必要となる。

一方，統計の効用としての予測の考え方は非常に大事なものである。統計的方法の核心は，時間的なものをいかにして空間的なものに投影して，時間の要素を妥当性をもってとり除くかにかかっている。これが可能となるならば，需要予測の問題は統計的推定の問題に帰着してしまうのである。ここまでもち込むところに統計的思考の大事な点があるわけである。

需要予測のための統計手法は現在開発途上にあり，今後の研究にまたねばならない点が多い。しかし，ここでは，一応現在までに開発されている統計的予測方法を体系的に整理しなおし，次節以下にその概要を紹介していくこととする。

3. 回帰モデルによる予測法

(1) 線形回帰モデル

xとyとの間に関数関係があるとき，xの特定の値に対するyの平均値のことを，yのxについての条件つき平均値という。一般にこの条件つき平均値yはxの関数となるが，これをxに対するyの回帰 (regression of x on y) という。

いろいろな変量の間で，真の回帰関係がどのような形

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

のものであるかを一般に知ることはできないが，その関係についてなんらかの考え方をとることができる。それがモデルであり，たとえば回帰関係を1次式と考えるとすれば，線形モデル (linear model) を考えていることになる。このように，真の回帰関係の形を特定のものに決めて考えることを，回帰の関数形の特定化という。いま x と y との間の線形モデルを考えると

$$y=\alpha+\beta x \quad \cdots\cdots (3.1)$$

ここで，α と β は普通真の回帰関係と考えているものの特性を規定する未知の定数で，パラメーターと呼ばれるものである。一般に関数形を特定化することによって必要なパラメーターの数が決定する。従って回帰を求めるということは，このようなパラメーターの値を推計するという問題に帰着する。

いま，式(3.1) の線形回帰モデルにおいて，その分散

$$S=\sum_{i=1}^{N}\{y_i-(\alpha+\beta x_i)\}^2 \quad \cdots\cdots (3.2)$$

を最小にするように α と β の値を推定することを考えよう。このためには式 (3.2) を α および β で偏微分して0と等置した式を α と β について解けばよい。すなわち

$$\left.\begin{aligned} Na+b\sum_{i=1}^{N}x_i&=\sum_{i=1}^{N}y_i \\ a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2&=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.3)$$

となる。ここに，a と b は S を最小にするように α と β を推定した値である。このような方法を最小2乗法 (method of least squares) という。また式 (3.3) は正規方程式 (normal equations) と呼ばれる。

N 個の個体について観察された x および y の値に基づいて，y の母集団分布のパラメーター α, β および σ^2 を推定する問題を考えてみよう。いま x と y との間に次のような線形関係が成り立っているとする。

$$y=\alpha+\beta x+u \quad \cdots\cdots (3.4)$$

ここに u は誤差であり，平均値0，標準偏差 σ の正規分布に従うとする。このようにすると，y は x が与えられたとき，平均が $\alpha+\beta x$，分散か σ^2 の確立変数となる。

α および β の推定値は，式 (3.3) を解いて，

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\Sigma x_i^2\Sigma y_i-\Sigma x_i\Sigma x_iy_i}{N\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2} \\ b&=\frac{\Sigma x_iy_i-(\Sigma x_i\,\Sigma y_i)/N}{\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2/N} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.5)$$

次に a および b の平均値 $E(a), E(b)$ と分散 $\mathrm{Var}(a)$, $\mathrm{Var}(b)$ を求めるためには，式 (3.5) の y_i に $\alpha+\beta x_i+u_i$ を代入することにより，

$$\left.\begin{aligned} &E(a)=\alpha, \quad E(b)=\beta \\ &\mathrm{Var}(a)=\frac{\Sigma x_i^2\sigma^2}{N^2S_x^2} \quad \mathrm{Var}(b)\frac{\sigma^2}{NS_x^2} \end{aligned}\right\} \cdots (3.6)$$

ここに S_x^2 は x の分散である。

次に x と y との間の標本相関係数 (coefficient of correlation) r_{xy} は，表―1 の x, y の相関表を用いて，

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{S_xS_y}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf_{ij}-\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}x_i^2f_i-\bar{x}^2\right)\left(\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}y_j^2f_j-\bar{y}^2\right)}} \cdots (3.7)$$

ここに，$\bar{x}, \bar{y}$ は標本平均値，S_x, S_y は標本標準偏差，C_{xy} は標本共分散である。

表―1　x, y の相関表

y \ x	$x_1 \cdots\cdots x_i \cdots\cdots x_m$	f_y
y_1	$f_{11} \cdots\cdots f_{i1} \cdots\cdots f_{m1}$	f_1
$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\vdots$
y_j	$f_{1j} \cdots\cdots f_{ij} \cdots\cdots f_{mj}$	f_j
$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\vdots$
y_n	$f_{1n} \cdots\cdots f_{in} \cdots\cdots f_{mn}$	f_n
f_x	$f_1 \cdots\cdots f_i \cdots\cdots f_m$	N

(2) 重回帰モデル

次に y の推定値が x および z の関数として表わせる場合の回帰を考えることとし，x および z に対する y の回帰関数を以下のように特定化する。

$$y=\alpha+\beta_1x+\beta_2z \quad \cdots\cdots (3.8)$$

正規方程式は，

$$\left.\begin{aligned} &Na+b_1\Sigma x_i+b_2\Sigma z_i=\Sigma y_i \\ &a\,\Sigma x_i+b_1\Sigma x_i^2+b_2\Sigma x_iz_i=\Sigma x_iy_i \\ &a\,\Sigma z_i+b_1\,\Sigma x_iz_i+b_2\,\Sigma z_i^2=\Sigma z_iy_i \end{aligned}\right\} \cdots (3.9)$$

この正規方程式を解いて

$$y=a+b_1x+b_2z \quad \cdots\cdots (3.10)$$

が得られる。

変数 y, x, z において，y が x, z の1次の変動に関連するとき，y と x, z との間の相関を重相関係数 (coefficient of multiple correlation) といい，$r_{y|x,z}$ で表わすと

$$r_{y|x,z}=\sqrt{1-\frac{R}{R_{11}}} \quad \cdots\cdots (3.11)$$

と表わされる。ここに

$$R=\begin{vmatrix} r_{yy} & r_{yx} & r_{yz} \\ r_{xy} & r_{xx} & r_{xz} \\ r_{zy} & r_{zx} & r_{zz} \end{vmatrix} \quad R_{11}=\begin{vmatrix} r_{xx} & r_{xz} \\ r_{zx} & r_{zz} \end{vmatrix} \cdots (3.12)$$

であり，上式の行列の要素たとえば r_{yx} は y と x との間の単相関係数を表わす。

(3) 重共線性の問題

回帰モデルにおいて独立変数（説明変数）が2つ以上ある場合には，しばしば重共線性 (multicollinearity)

が問題となる。これは回帰の説明変数の一部あるいは全部が互いに強い相関関係にあるため，それぞれの変数の影響を別々に分離して計測することが非常に困難になるという問題である。

この問題を考えるために，次のような説明変数が2つあるモデルを考えてみよう。

$$y_t=\beta_1 x_{1t}+\beta_2 x_{2t}+u_t-\bar{u}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.13)$$
$$t=1,2,\cdots,n$$

正規方程式をつくると，

$$\left.\begin{array}{l} b_1\sum_t x_{1t}^2+b_2\sum_t x_{1t}x_{2t}=\sum_t x_{1t}y_t \\ b_1\sum_t x_{1t}x_{2t}+b_2\sum_t x_{2t}^2=\sum_t x_{2t}y_t \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3.14)$$

ここで式 (3.14) の第1式に $\sum_t x_{2t}^2$ をかけたものから，式 (3.14) の第2式に $\sum_t x_{1t}x_{2t}$ をかけたものをひくと

$$b_1[\sum_t x_{1t}^2\sum_t x_{2t}^2-(\sum_t x_{1t}x_{2t})^2]$$
$$=\sum_t x_{1t}y_t\sum_t x_{2t}^2-\sum_t x_{2t}y_t\sum_t x_{1t}x_{2t}\cdots\cdots(3.15)$$

式 (3.14) の第1式に $\sum_t x_{1t}x_{2t}$ をかけたものを，式(3.14) の第2式に $\sum_t x_{1t}^2$ をかけたものからひくと

$$b_2[\sum_t x_{1t}^2\sum_t x_{2t}^2-(\sum_t x_{1t}x_{2t})^2]$$
$$=\sum_t x_{2t}y_t\sum_t x_{1t}^2-\sum_t x_{1t}y_t\sum_t x_{1t}x_{2t}\cdots\cdots(3.16)$$

が得られる。従って，式 (3.15) および式 (3.16) から b_1 および b_2 を求めることができるためには

$$\sum_t x_{1t}^2\sum_t x_{2t}^2-(\sum_t x_{1t}x_{2t})^2 \neq 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.17)$$

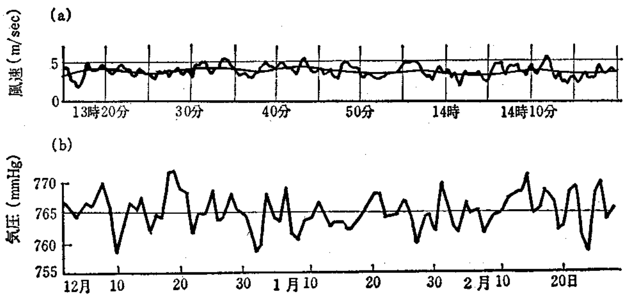
が成立しなければならない。この式 (3.17) の条件が成立しないとき，または成立しない状態に非常に近い場合に重共線関係が成立するという。重共線性が強くなれば回帰パラメーターの推定値の分散が大きくなり，推定値の信頼性が低くなるので十分注意しなければならない。

4. 時系列モデルによる予測法

(1) 時系列解析

図—1 は時系列 (time series) の例である。時系列の変動の中には，測定や観測法に依存する変動因子とともに，一般に偶然に支配される因子が含まれている。従って現実に得られた時系列は1つの標本である。その母集団にあたるものが確率過程 (stochastic process) $X(t)$ または確率系列 (stochastic sequence) X_k である。

図—1 地面付近における風速 (a) と 6 時の気圧 (b)



$X_1, X_2,\cdots$ が互いに独立のときには，独立確率変数の理論に基づく統計法が適用される。しかしそれらが独立でなくて，ある種の依存関係のある場合が多い。このような確率的依存関係は時系列論の主な対象となる。その依存関係の最も簡単なものは，X_n の確率法則が X_{n-1} がとった値だけに依存し，$X_{n-2}, X_{n-3}\cdots$ のとった値には無関係のもので，これを単純マルコフ系列という。任意の $t_1, t_2\cdots$ に対して，$X(t_1), X(t_2)\cdots$ がマルコフ系列をなすとき，$X(t)$ を単純マルコフ過程 (simple Markov process) という。マルコフ過程は，$X(s)$ が x なる値をとったとき，$X(t)(s<t)$ が集合 E に属する値をとる条件付確率，すなわち遷移確率 (transition probability) $P(s, x|t, E)$ によって規定される。

(2) 定常時系列

定常時系列とは，定常確率過程からの標本と考えられる時系列をいう。定常時系列 $x_1, x_2,\cdots, x_N$ に対しては定常確率過程についての特性量 $m, \sigma^2, \rho(\tau)$ に対応する統計量を計算して，これを研究することができる。すなわち

系列平均値：

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

系列分散：

$$S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\bar{x}^2\cdots(4.2)$$

系列相関係数：

$$r_k=\frac{1}{S_1S_2}\left\{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_ix_{i+k}-\bar{x}_1\bar{x}_2\right\}\cdots\cdots(4.3)$$

ただし

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x}_1=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_i & \bar{x}_2=\frac{1}{N-k}\sum_{i=k+1}^{N}x_i \\ S_1^2=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x_i-\bar{x}_1)^2 & \\ S_2^2=\frac{1}{N-k}\sum_{i=k+1}^{N}(x_i-\bar{x}_2)^2 & \end{array}\right\}\cdots(4.4)$$

定常時系列の解析において，式(4.3) に示した系列相関係数はとくに重要であり，$N\gg k$ のときは，次式によって計算してさしつかえない。

$$r_k=\frac{1}{S^2}\left\{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_ix_{i+k}-\bar{x}^2\right\}\cdots\cdots(4.5)$$

式(4.5) の計算方法を表示すると，**表—2** に示す通りである。

(3) 時系列の定常性と長期傾向

時系列解析においては定常性の吟味と定常化がその出発点となる。確率過程 $X(t)$ の時点 t に

表—2 系列相関係数 r_k の計算表

$k\rightarrow$		0	1	2	3	4
$i\downarrow$	x_i	x_i^2	x_ix_{i+1}	x_ix_{i+2}	x_ix_{i+3}	x_ix_{i+4}
1	x_1	x_1^2	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_1x_5
2	x_2	x_2^2	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_2x_6
3	x_3	x_3^2	x_3x_4	x_3x_5	x_3x_6	x_3x_7
4	x_4	x_4^2	x_4x_5	x_4x_6	x_4x_7	x_4x_8
5	x_5	x_5^2	x_5x_6	x_5x_7	x_5x_8	x_5x_9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ —	⋮ — —
$N-1$	x_{N-1}	x_{N-1}^2	$x_{N-1}x_N$	—	—	—
N	x_N	x_N^2	—	—	—	—
合計	Σx_i	Σx_i^2	Σx_ix_{i+1}	Σx_ix_{i+2}	Σx_ix_{i+3}	Σx_ix_{i+4}
平均	$\bar{x}$	$\frac{1}{N}\Sigma x_i^2$	$\frac{1}{N-1}\Sigma x_ix_{i+1}$	$\frac{1}{N-2}\Sigma x_ix_{i+2}$	$\frac{1}{N-3}\Sigma x_ix_{i+3}$	$\frac{1}{N-4}\Sigma x_ix_{i+4}$
r_k	—	1	$\frac{1}{S^2}\left(\frac{1}{N-1}\Sigma x_ix_{i+1}-\bar{x}^2\right)$	$\frac{1}{S^2}\left(\frac{1}{N-2}\Sigma x_ix_{i+2}-\bar{x}^2\right)$	$\frac{1}{S^2}\left(\frac{1}{N-3}\Sigma x_ix_{i+3}-\bar{x}^2\right)$	$\frac{1}{S^2}\left(\frac{1}{N-4}\Sigma x_ix_{i+4}-\bar{x}^2\right)$

ここに $S^2=\frac{1}{N}\Sigma x_i^2-(\bar{x})^2$

おけるある特性量を $C(t)$ とするとき，これが t に無関係であるならば，その特性量は定常であると呼ぶことにする。定常でないときは，長期傾向 (trend) を持つという。

平均値の長期傾向 $m(t)$ を推定する方法としては，移動平均法，線形回帰法等が考えられる。

a) 移動平均法

$m(t)$ が時間単位の n 倍の間は，つねに直線に近いとみられる場合には

$$\bar{x}_{t+(n-1)/2}=\frac{1}{n}(x_t+\cdots\cdots+x_{t+n-1}) \quad\cdots\cdots (4.6)$$

を計算し，その点を結ぶことによって $m(t)$ に近い曲線を得ることができる。

b) 線形回帰法

$X(t)$ が各 t について一定の分散 σ^2 を持ち，平均値

$$m(t)=a+bt \quad\cdots\cdots (4.7)$$

のまわりに独立に正規分布をしているときは，a，b の最尤値は，

$$\left.\begin{aligned}&\hat{a}=\bar{x}-\hat{b}\bar{t}\\ &\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(t-\bar{t})(x_t-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{N}(t-\bar{t})^2}\\ &\text{ここに}\\ &\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t \qquad \bar{t}=\frac{N+1}{2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (4.8)$$

そして平方和

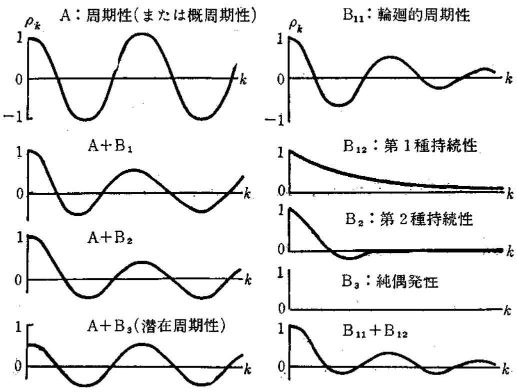
$$S=\sum_{t=1}^{N}(x_t-\hat{a}-\hat{b}t)^2 \cdots\cdots (4.9)$$

を $(N-2)$ で割ったものは自由度 $(N-2)$ の不偏分散となる。

(4) 定常確率過程の分解と外挿公式

時系列の解析のためには，その母集団であるところの確率過程の形を想定しなければならない。定常時系列においては，コレログラム，すなわち r_k のグラフがよい手がかりを与える。コレログラムの基本形は図—2 に示す通りである。

図—2 コレログラムの基本形



一例として，定常時系列から複合調和波を除去した時系列のコレログラムが，図—2 の B_{11}, B_{12}，あるいはその合成と考えられるときには，系列相関係数 ρ_k は $k=1,2\cdots$ に対して次の定差方程式を満たす。

$$\rho_k+a_1\rho_{k-1}+\cdots\cdots+a_h\rho_{k-h}=0 \quad\cdots\cdots (4.10)$$

このとき母集団過程 $X(t)$ は

$$X(t)+a_1X(t-1)+\cdots$$
$$\cdots+a_hX(t-h)=Y(t) \cdots\cdots (4.11)$$

を満たす。ただし $Y(t)$ は無自己相関で，平均値 0 の定常過程である。

実際にパラメーター a_k $(k=1, 2, \cdots, h)$ の値を求めるには，コレログラムを構成する波の数を推定し，たとえば周期が1つなら $h=2$，2つなら $h=4$，さらに持続性 B_{12} 形）を入れた方がよければ，$h=3$，$h=5$ などとする。そして連立方程式

$$\left.\begin{array}{l} r_1+a_1+a_2r_1+\cdots\cdots+a_hr_{h-1}=0 \\ r_2+a_1r_1+a_2+\cdots\cdots+a_hr_{h-2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_h+a_1r_{h-1}+a_2r_{h-2}+\cdots\cdots+a_h=0 \end{array}\right\} \cdots(4.12)$$

を解けばよい。

上に採用した h の値が妥当ならば

$$\left.\begin{array}{l} \rho_k+a_1\rho_{k-1}+\cdots\cdots+a_h\rho_{k-h}=0 \\ k=h+1, \quad h+2, \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(4.13)$$

ただし，$\rho_k=r_k \quad k=0, 1, \cdots\cdots, h$

の解 $\rho_k(k=h+1, h+2, \cdots\cdots)$ は $r_k(k=h+1, h+2, \cdots\cdots)$ と近似的に一致するはずである。

このようにして，a_k の値が推定できたなら，時系列モデルの外挿公式

$$\left.\begin{array}{l} E\{X(t+k)\}=-a_1E\{X(t+k-1)\}-\cdots \\ \quad\cdots-a_{k-1}E\{X(t+1)\}-a_kx_t-a_{k+1}x_{t-1} \\ \quad\quad-\cdots\cdots-a_hx_{t-h+k} \end{array}\right\} (4.14)$$

の計算が可能となり，これから予測値を求めることができる。

5. 統計的決定モデル

統計的決定理論は，いくつかの可能性から一つを選びだす必要があるとき，どのようにして最適決定を行なうかを問題にするものである。

図—3 統計的決定系

統計的決定系は，図—3 で説明される。問題は可能な入力関数 x_i のおのおのに対応する出力 y_i がなんであればよいかということである。適切な決定素子を得るために考えねばならない因子は

a) 実験行列（experiment matrix）E

$$E=\begin{array}{c|l} & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \cdots\cdots x_q \\ \hline s_1 & p_{11}, \quad p_{12}, \quad p_{13}\cdots\cdots p_{1q} \\ s_2 & p_{21}, \quad p_{22}, \quad p_{23}\cdots\cdots p_{2q} \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n & p_{n1}, \quad p_{n2}, \quad p_{n3}\cdots\cdots p_{nq} \end{array} \cdots\cdots (5.1)$$

式（5.1）で，行列 E の各要素は，正しい情報がある特定の値 $s_1, s_2, \cdots\cdots s_n$ をとるとき，全入力 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_q$ が任意の与えられた値をとる確率を表わす。たとえば要素 p_{23} は条件付き確率 $p(x_3|s_2)$ すなわち正しい情報の成分が s_2 であるとわかっているときに，入力が x_3 となって現われる確率である。

b) 先験的確率（a priori probability）P

起こり得る正しい情報のそれぞれの発生に関する確率である。

$$P=[p(s_1), p(s_2), \cdots, p(s_n)] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

c) 損失行列（loss matrix）L

$$L=\begin{array}{c|l} & d_1, \quad d_2 \cdots\cdots d_n \\ \hline s_1 & L_{11}, \quad L_{12}\cdots\cdots L_{1n} \\ s_2 & L_{21}, \quad L_{22}\cdots\cdots L_{2n} \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n & L_{n1}, \quad L_{n2}\cdots\cdots L_{nn} \end{array} \cdots\cdots\cdots\cdots (5.3)$$

ここで d_j は s_j が正しい情報であるという決定に対応するものとする。要素 L_{21} は，実際の正しい情報が s_2 であるのに決定 d_1 をとった場合の損失または費用である。

決定理論問題においてわれわれが求めている解答は，取り得る入力情報 x_i のおのおのについての最適決定，すなわち 図—3 の出力 y_i を定める決定規則（decision rule）である。つまり，x_i のそれぞれの値に対して1個の y の値を指定する写像関数を求めているのである。最適決定関数は，決定理論ゲームで多数のプレーを積み重ねたとき，損失または平均損失の予想値を最小にする関数である。

この系全体として予想される損失または費用 ρ は

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho(s_i)p(s_i) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

である。ここに $p(s_i)$ は先験的確率関数である。ρ は決定関数 d を適当に選ぶことによって，われわれが最小化しようとする関数であり

$$\rho=\sum_{k=1}^{q}p(x_k)\left[\sum_{i=1}^{n}L[s_i, d(x_k)]p(s_i|x_k)\right]\cdots(5.5)$$

とあらわされる。

もし最初に入力 x_1 について考えるなら，$d(x_1)$ を決定するには，単に $d(x_1)=d_1$, $d(x_1)=d_2, \cdots\cdots$ と順番におきながら，式(5.5) のかっこ内の式をそれぞれの場合について計算し，かっこ内の式について最小値が得られる d_j を選択すればよい。

6. 土木計画のための統計的方法選択

計画作成という作業は，複数の試案をつくるという段階と，その複数の試案を比較検討して最後に一つの案を選択し，決定するという段階とに2大別することができる。後者は方法選択の段階と呼ばれるが，この段階で最も重要なことは，選択された計画が合目的的であることを保証するための評価の基準をいかに設定するかという

ことである。この場合，一般に用いられるのは貨幣価値によって判定する経済的評価法である。このような評価基準の設定は確かに有効であり，経済的評価法を用いて計画に成功した事例も数多い。しかし，最近になって非経済的な価値観の重要性がしだいに認識されるようになり，これを社会的効用関数あるいは社会的厚生関数として表現し，その定量化をはかるための研究が開始されるに至った。

目的が明らかにされ，評価の基準が設定された場合に方法選択のための計画システムは，最適化が共通理念となっている。そして最適化の概念は，複数の試案の中から設定された目的関数を最大または最小にするような1つの試案を選択することとして定量的に表現される。

このような，方法選択のための土木計画システムを設計する場合，有効な手法と考えられるものは，最近めざましい発展をとげつつあるORである。このため計画システム設計のための手法としてのゲームモデルの概要を次節で紹介することとする。

7. 方法選択のためのゲームモデル

プレイヤー（player）がどのような行動をするかを明らかにすることによって，社会における行動主体の行動の様式を確立しようとするのがゲームの理論である。

ここで，ゲーム（game）とかプレイ（play）とかいう言葉を明確に定義しておこう。各プレイヤーの行動を規定する一組の規約（rule）をゲームという。またプレイとは，あるゲームが特定の形として実現されたものである。

ゲームの理論では，戦略（strategy）という概念を公理化して，最も重要な概念一つとして用いている。ゲームの理論で戦略というのは，あるプレイヤーが，ゲームの各手番において，どういう選択を行なうかを指定する一つのプランである。

いま簡単のために有限零和2人ゲームを例にとって説明しよう。

いまプレイヤー P_1 の戦略を $\Pi_1=\{i, i=1, 2, \cdots\cdots, m\}$ プレイヤー P_2 の戦略を $\Pi_2=\{j, j=1, 2, \cdots\cdots, n\}$ とすると，プレイヤー P_1 の利得関数 f_1 およびプレイヤー P_2 の利得関数 f_2 は，それぞれ

$$f_1=f_1(i, j) \qquad f_2=f_2(i, j) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.1)$$

と表わされる。しかるに零和ゲームであるから

$$f_1(i, j)+f_2(i, j)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.2)$$

ゆえに

$$f_1(i, j)=-f_2(i, f)=a_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.3)$$

とおくことができる。すなわち a_{ij} というのは，プレイヤー P_1 が戦略 i を用い，プレイヤー P_2 が戦略 j を用いたときに，P_1 が P_2 から受けとる利得であり，あるいは P_2 が P_1 に支払わなければならない損失である。一般に P_1, P_2 の戦略が，それぞれ

$$i=1, 2, \cdots\cdots, m \qquad j=1, 2, \cdots\cdots, n$$

で示されるときには

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1j}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{ij}\cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mj}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots (7.4)$$

このような (a_{ij}) を利得行列または清算行列（pay off matrix）と呼ぶ。

このように利得行列が与えられたときに，利害の完全に相対立する2人のプレイヤーのとるべき合理的な行動原則はミニ・マックス原理（mini-max principle）に従うということが証明されている。ミニ・マックス原理とは，P_1 は保証水準 $\min\limits_j a_{ij}$ を最大にし，P_2 は保証水準 $\max\limits_i a_{ij}$ を最小にするという行動原理である。

P_1, P_2 がともにミニ・マックス原理に従って行動し，ミニ・マックス戦略をとれば，ある均衡点（equilibrium point）に到達してゲームは解決されるであろうか。もし P_1 にとってのミニ・マックスな値 v_1 と，P_2 にとってのミニ・マックスな値 v_2 とが一致すれば，それは P_1 にとっても P_2 にとっても一応満足すべき値であるから，ゲームは解決されることになる。すなわち

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.5)$$

が成立する場合である。そして式(7.5)が成立するための必要十分条件は，行列 (a_{ij}) が鞍点（saddle point）$a_{i_0 j_0}$ を持つことである。

P_1, P_2 のミニ・マックスの値が一致して $v_1=v_2$ となるような利得行列を持つゲームを閉じたゲーム（closed game）という。そのときの値 $v=v_1=v_2=a_{i_0 j_0}$ をゲームの純粋値（pure value）という。このような純粋値に導くようなミニ・マックス戦略 i_0, j_0 をそれぞれ P_1, P_2 の最適戦略（optimal strategy）という。

次に，行列 (a_{ij}) において

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.6)$$

すなわち $v_1 < v_2$ となり，v_1 と v_2 とが一致しない場合には，ゲームは厳密には決定されない。このようなゲームを開いたゲーム（open game）という。このような場合のゲームは確率的方法によって初めて決定することができる。

いま (a_{ij}) というゲームにおいて，プレイヤー P_1 の持つ戦略を $i=1, 2, \cdots\cdots, m$, それぞれの戦略の用いられる確率を $p=(p_1, p_2 \cdots\cdots, p_m)$ とし，プレイヤー P_2 の持つ戦略を $j=1, 2, \cdots\cdots, n$, それぞれの戦略の用いられる確率を $q=(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n)$ とする。p, q は確

率であるから

$$p_i \geqq 0,\quad q_j \geqq 0$$

であって，どの戦略をとるかは互いに排反であるから

$$\left.\begin{array}{l} p_1+p_2+\cdots\cdots+p_m=1 \\ q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n=1 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.7)$$

である。このような条件を満たす p, q の集合をそれぞれ S_1, S_2 とする。p, q はそれぞれ P_1, P_2 が自己の持つ戦略をどのような確率で用いるかを指定する確率分布にほかならない。この p, q を P_1, P_2 の混合戦略 (mixed strategy) という。

P_1 が p, P_2 が q という混合戦略を用いたときの利得の期待値を $E(p, q)$ とおけば

$$\begin{aligned} E(p_0, q_0) &= \max_p \min_q E(p, q) \\ &= \min_q \max_p E(p, q) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.8) \end{aligned}$$

という等式が成立することがノイマン，ルーミスらによって証明されている。すなわち混合戦略という概念を導入することによって，有限零和２人ゲームには，つねにゲームの値が存在し，最適戦略を求めることができる。

非零和２人ゲームおよび n 人ゲームについての説明はここでは省略するが，今日の統計学は，その領域を拡張し，実質科学としての土木計画との関連において，不確定性 (uncertainty) に直面しての決定の問題を取扱うようになってきた。すなわち，人々が日常生活において直面する多くの局面で，そこでは何をなすべきかが完全に明白でないようなところにまで応用されるようになっている。

参 考 文 献

1) 吉川和広：土木計画と OR，丸善，昭和44年7月
2) 宮川公男：計量経済学入門，日本経済新聞社，昭和41年6月
3) R. Frish : Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression System, University Institute of Economics, Oslo, 1934
4) A.S. Goldberger : Economic Theory, John Wiley & Sons, 1964
5) 小河原正己：時系列論とその応用，応用統計力学，応用統計力学会編，昭和24年3月
6) A. Khinchine : Korrelationstheorie der Stationären Stochastischen Prozesse, Math. Ann. 109, 1934
7) N. Wiener : The Fourier Integral, Cambridge, 1933
8) 小河原正巳・呉林　肇： 移動平均について，中央気象台測候時報，第13巻9号，昭和18年
9) E. ミシキン・L. ブラウン共編・丸茂斎等訳： 適応制御系，コロナ社，昭和39年
10) L. ワイス著・田中穣二・根岸竜雄共訳：統計的決定理論 日本評論社
11) H. チャーノフ・L.E. モーゼス著・宮沢光一訳：決定理論入門，紀伊国屋書店，昭和42年5月
12) W. Feller : An Introduction to Probability Theory and its Application, John Wiley & Sons, 1957
13) J. von Neumann and O. Morgenstern : Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 1953
14) R.D. Luce and H. Raiffa : Games and Decisions, John Wiley & Sons, 1958
15) 鈴木光男：ゲームの理論，勁草書房，昭和34年4月
16) Loomis : On a Theorem of von Neumann, Proc. Nat. Aca. of Sci. 32, 1946
17) G.B. Dantzig : Constructive Proof of the Min-max Theorem, Pac. J. Math. 6, 1956
18) 松田正一・洲之内治男・杉山昌平・出居　茂： OR のための基礎数学 5，丸善，昭和40年6月