

変形を考慮した任意の平面骨組構造の解析

安 藤 浩 吉*
成 岡 昌 夫**

1. ま え が き

本文で取り扱う解法の基本的仮定は、次のようである。

- ① 部材は直線であり、荷重は両端にのみ集中荷重として作用する。
- ② 部材のヤング係数、断面積、および断面二次モーメントは、荷重に関係なく、一定である。したがって、格点力と格点変位は一次関係にある。
- ③ 部材は荷重載荷前後において、その位置は変化するが、直線は保つ。すなわち、格点回転角は小さく、軸方向力による付加的影響は無視できる。

ここで、部材とは、任意の構造物を適当な格点で区切ったときの格点間を意味する。仮定 ①、② は微少変位理論と共通であり、仮定 ③ を修正し、その位置は、変化しないとすれば、微少変位理論と全く一致する。仮定 ③ のために、構造解析としては、変位を未知数とした高次非線型連立方程式を解くことになる。しかし、任意形の構造に対して、厳密解を求めることは非常に困難であるので、本文では、微少変位理論による解を初期値としてくり返し計算を行ない、有限変位理論による解に近づけるようにしている。なお、プログラムは、構造寸法にくらべて非常に小さな変形を考慮しているので、すべて 2 倍長計算によって処理されている。

2. 解析に用いられる基本式

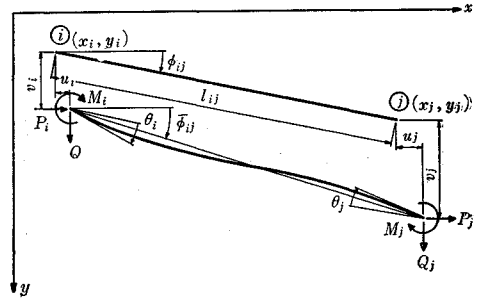
さきに、文献 1) で報告された微少変位理論による変形法を利用するものとし、同論文

* 正会員 名古屋大学受託研究員 滝上工業 (株)橋梁設計課

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

に用いられた記号をできるだけそのまま用いる。図-1 は、 (x, y) 平面内の任意の直線部材が、点 i 、および、点 j において、水平変位 (u_i, u_j) 、鉛直変位 (v_i, v_j) 、および、回転変位 (θ_i, θ_j) を与えられて拘束された状態である。これらの拘束力の (x, y) 成分をそれぞれ \bar{P} 、 \bar{Q} 、拘束モーメントを \bar{M} とすれば、部材 i, j における i 点の \bar{P}_{ij} 、 \bar{Q}_{ij} および \bar{M}_{ij} は、次式で与えられる。

図-1



$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \\ \bar{M}_{ij} + d_{ij} \cdot \theta_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{ij} & -b_{ij} & -c_{ij} \\ -b_{ij} & \bar{a}_{ij} & \bar{c}_{ij} \\ -c_{ij} & \bar{c}_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ v_i - v_j \\ \theta_i + \theta_j \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式において、記号 $a \sim d$ は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{12 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}^3} \cdot \sin^2 \bar{\phi}_{ij} + \frac{E_{ij} A_{ij}}{l_{ij}} \cdot \cos^2 \bar{\phi}_{ij} \\ \bar{a}_{ij} &= \frac{12 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}^3} \cdot \cos^2 \bar{\phi}_{ij} + \frac{E_{ij} A_{ij}}{l_{ij}} \cdot \sin^2 \bar{\phi}_{ij} \\ b_{ij} &= \left(\frac{12 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}^3} - \frac{E_{ij} A_{ij}}{l_{ij}} \right) \cdot \sin \bar{\phi}_{ij} \cdot \cos \bar{\phi}_{ij} \\ c_{ij} &= \frac{6 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}^2} \cdot \sin \bar{\phi}_{ij} \\ \bar{c}_{ij} &= \frac{6 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}^2} \cdot \cos \bar{\phi}_{ij} \\ d_{ij} &= \frac{2 E_{ij} I_{ij}}{l_{ij}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

$$\sin \bar{\phi}_{ij} = \frac{(y_j + v_j) - (y_i + v_i)}{\sqrt{\{(y_j + v_j) - (y_i + v_i)\}^2 + \{(x_j + u_j) - (x_i + u_i)\}^2}}$$

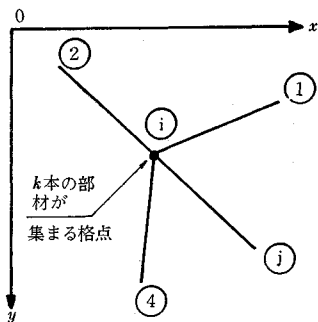
$$\cos \bar{\phi}_{ij} = \frac{(x_j + u_j) - (x_i + u_i)}{\sqrt{\{(y_j + v_j) - (y_i + v_i)\}^2 + \{(x_j + u_j) - (x_i + u_i)\}^2}}$$

式(2)において、 $\bar{\phi}$ は変形後の部材回転角で、未知変位 u, v の関数となる。したがって、式(1)の係数行列は定数ではないが、一応、定数係数のような書き方をする。次に、両端剛節部材のつり合い条件を i 点について考えれば、 P_i, Q_i , および、 M_i を図-1 に示す外力として、

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X=0; \quad \Sigma \bar{P}_i + P_i=0 \\ \Sigma Y=0; \quad \Sigma \bar{Q}_i + Q_i=0 \\ \Sigma M=0; \quad \Sigma \bar{M}_i + M_i=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

が成立しなければならない。いま、図-2 に示すように任意の格点 i に k 本の部材が集まった場合を考え、格点 i に注目しよう。式(1)を式(3)に代入して、

図-2



$$[A_{i1} \ A_{i2} \ \dots \ B_i \ \dots \ A_{ij}] \times \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ \vdots \\ M_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \begin{bmatrix} -a_{ij} & b_{ij} & -c_{ij} \\ b_{ij} & \bar{a}_{ij} & \bar{c}_{ij} \\ c_{ij} & -\bar{c}_{ij} & d_{ij} \end{bmatrix} \\ B_i &= \begin{bmatrix} \Sigma a_{ij} & -\Sigma b_{ij} & -\Sigma c_{ij} \\ -\Sigma b_{ij} & \Sigma \bar{a}_{ij} & \Sigma \bar{c}_{ij} \\ \Sigma c_{ij} & \Sigma \bar{c}_{ij} & 2\Sigma d_{ij} \end{bmatrix} \\ \delta_i &= \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

となる。式(5)において、記号 $a \sim d$ は式(1)と同じものであり、 Σ は i 点に集まるすべての部材についての総和を意味する。式(4)は格点 i についての式であるから、これを構造物のすべての格点に適用し、3. に述べる格点条件を導入すれば、外力と変位の関係を満たす連立方程式が得られる。すなわち、

$$K(u) \cdot u = P \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 u は変位ベクトル、 P は外力ベクトルである。式(6)において、 $K(u)$ は構造物全体のスチフネスマトリックスに相当するものであるが、未知数 u を含んでいる。このために簡単に u を求めることはできない。そこで、つぎのような方法が考えられる。まず、 $K(u)$

における u を仮定する。こうすれば、 $K(u) = c$ (c は定数行列) となり、式(6)は、

$$\left. \begin{aligned} c \cdot u = P \\ \therefore u = c^{-1} \cdot P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

となって、未知変位 u は容易に求められる。このとき最初に仮定した u と式(7)の u とが一致すれば、式(6)の1つの解が得られたことになる。具体的には、式(2)の $\sin \bar{\phi}$, および、 $\cos \bar{\phi}$ に含まれる u_i, v_i を、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha \cdot u_i(N) + (1-\alpha) \cdot u_i(N-1) \\ v_i &= \alpha \cdot v_i(N) + (1-\alpha) \cdot v_i(N-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ただし、

$N=1, 2, 3, \dots$ くり返し数

α : ダンピング定数、追記を参照されたい

$u_i(1), v_i(1)$; 微小変位理論による変位、すなわち $u_i=v_i=0$ とおいて求めたスチフネスマトリックスを用いた場合の式(7)の解

$u_i(0), v_i(0)=0$

式(8)を使って、式(2), (4), (5), (7)より、未知変位 u , すなわち、 u_i, v_i, θ_i と求める。これを数回くり返して、次の収束条件式

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{u_i(N) - u_i(N-1)}{u_i(N)} \right| &\leq \epsilon_u \\ \left| \frac{v_i(N) - v_i(N-1)}{v_i(N)} \right| &\leq \epsilon_v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ϵ_u, ϵ_v は収束許容誤差

が満足されたとき、式(6)は近似的に解かれたことになる。すなわち、物理的には、構造物の外力によるつり合い位置が定まったことになる。式(6)から解かれた、 u_i, v_i, θ_i を式(1)に代入すれば、拘束力、すなわち、部材力 \bar{P}, \bar{Q} , および、 \bar{M} が求められる。ただし、 θ_i は時計方向、 \bar{P}, \bar{Q} および \bar{M} はそれぞれ図-1 に示す P, Q , および、 M と反対方向を正としている。また、 \bar{P}, \bar{Q} はそれぞれ (x, y) 成分で表われているので、これを通常の断面力で表わすためには

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ S_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\phi}_{ij} & \sin \bar{\phi}_{ij} \\ -\sin \bar{\phi}_{ij} & \cos \bar{\phi}_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{P}_{ij} \\ \bar{Q}_{ij} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

としなければならない。ここに、 N_{ij} は軸方向力、 S_{ij} はせん断力である。

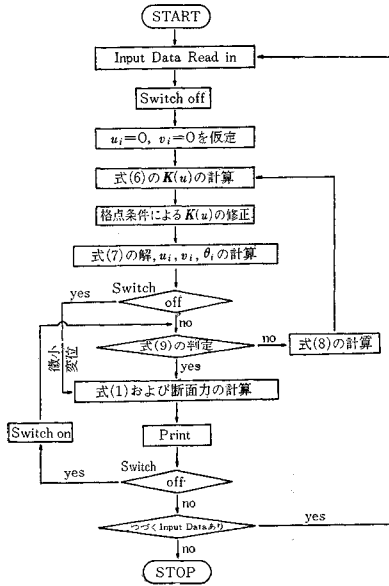
3. 格点条件

格点(支点も含む)の変位を未知数としているため、すべての格点変位が格点条件として導入される。表-1 はこの一般例を示す。

表-1

新 型 式	新 型 式	新 型 式	新 型 式

図-3



4. プログラムの概要

このプログラムは FORTRAN IV によって書かれ、若干の input data によって、任意平面骨組構造物の格点変位、および、格点断面力が、それぞれ微小変位理論による場合と、有限変位理論による場合とを対応させて、計算・印刷される。また、プログラムの deck card はおよそ 180 枚程度でまとなり、一般性のあるプログラムとしては、非常に短縮されている。input data は格点形状 data と荷重 data とからなり、前者は1つの格点に一枚、後者は2つの格点に一枚の data card が必要である。なお、式(9)による $\varepsilon_u, \varepsilon_v$ は 1/1000 としている。

5. 数値計算例

(1) 計算例 1

林 毅編「軽構造の理論とその応用、上」231 ページの計算例(図-4)を引用し、本文における計算法と比較する。軸方向力の発生する区間を 10 等分し、図-5のように格点番号を付け、さらに、等分布荷重を格点集中荷重に換算する。断面諸元は、 $EI=8t \cdot m^2$, $EA=10^4 t$ とし(上記文献では A の影響は無視されている)、計算を行なった。計算結果の一部を、表-2、図-6、および図-7 に示す。

なお、式(8)における α は 0.7 とし、くり返し数 12、計算時間は印刷を除いて約 20 秒であった。 α の値については追記を参照されたい。

図-4

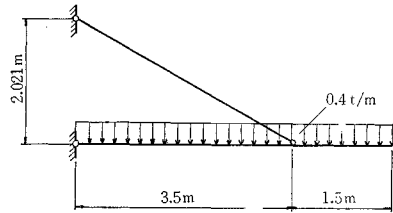


図-5

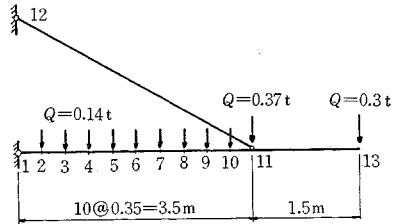


図-6

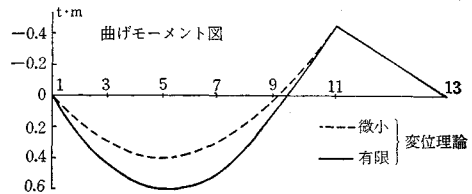
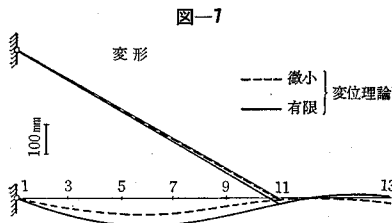


表-2

	格 点 番 号	3	5	7	9	11	備 考
文献の値	Beam Column の理論による曲げモーメント	0.440	0.622	0.516	0.127	-0.450	t·m, 有限変位理論
	Beam 理論による曲げモーメント	0.302	0.408	0.318	0.032	-0.450	t·m, 微小変位理論
本文による 計算結果	有限変位理論による曲げモーメント	0.436	0.615	0.510	0.136	-0.450	t·m
	微小変位理論による曲げモーメント	0.302	0.408	0.318	0.032	-0.450	t·m
	有限変位理論によるたわみ	58.9	92.9	91.1	59.8	21.6	mm
	微小変位理論によるたわみ	36.2	55.2	50.5	27.5	3.8	mm



(2) 計算例 2

図-8 は尾道大橋の塔である。断面は実際に使用されたものであり、外力は設計に用いられた死荷重+地震荷重である。断面諸元は、柱について、 $I=0.02929 \text{ m}^4$ 、 $A=$

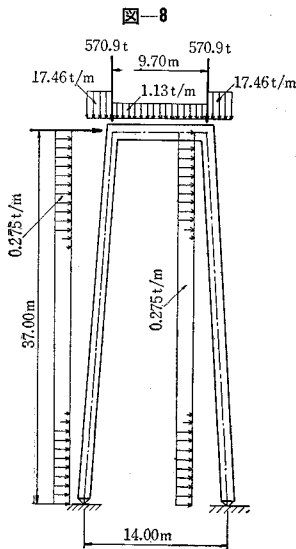


図-10

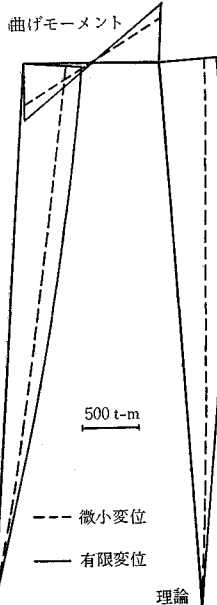


図-9

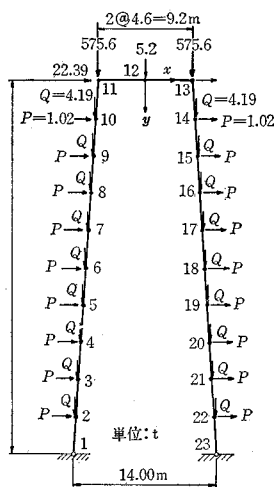


図-11

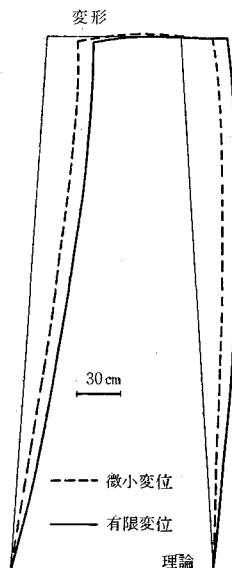


表-3

	格点	単位	1	7	11	13
曲げモーメント	有限変位理論 (f)	t·m	0	418	519	-519
	微小変位理論 (e)	t·m	0	285	379	-401
	$\{(f)-(e)\}/(e)$	%		47	37	29
せん断力	有限変位理論 (f)	t	23.5	13.4	-110.0	-115.0
	微小変位理論 (e)	t	16.0	9.6	-82.2	-87.4
	$\{(f)-(e)\}/(e)$	%	47	40	34	32
軸方向力	有限変位理論 (f)	t	-503	-482	-466	-692
	微小変位理論 (e)	t	-531	-510	-494	-665
	$\{(f)-(e)\}/(e)$	%	-5	-6	-6	4
水平変位	有限変位理論 (f)	cm	0	29.2	32.3	32.3
	微小変位理論 (e)	cm	0	20.3	22.6	22.6
	$\{(f)-(e)\}/(e)$	%		44	43	43

0.08826 m^2 、はりについては、 $I=0.1814 \text{ m}^4$ 、 $A=0.1356 \text{ m}^2$ である。図-9 は本文による計算をするために柱を 10 等分し、かつ荷重をすべて格点集中荷重におきかえたものである。計算結果の一部を、表-3、図-10、および、図-11 に示す。

なお、式 (8) における α は 0.8 とし、くり返し数 9、計算時間は印刷を除いて約 30 秒であった。

(3) 計算例 3

図-12 は放物線 2 ヒンジ アーチで、スパン 1/4 点の曲げモーメントが最大となるような载荷状態である。断面、および、荷重は鋼道路橋設計示方書を準用し、微小変位理論において、ほぼ許容応力度に達するような断面が仮定してある。断面諸元は、 $I=0.86 \text{ m}^4$ 、 $A=0.27 \text{ m}^2$ である。これを図-13 のように、スパンを 20 等分し、多角形直線部材とし、荷重をすべて、格点集中荷重におきかえる。計算結果の一部を、表-4、図-14、および、図-15 に示す。

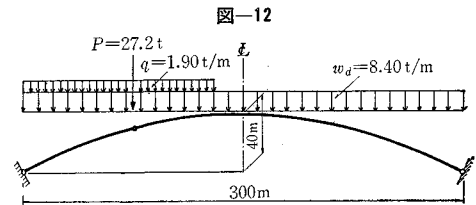


図-13

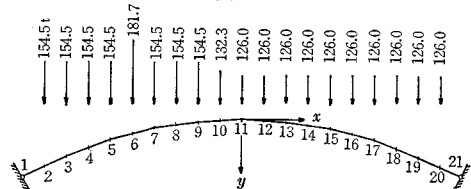


表-4

格点	6	曲げモーメント	軸方向力	せん断力	水平変位	鉛直変位
有限変位理論 (f)		5 734 t・m	-2 723 t	-34.5 t	31.2 cm	85.3 cm
微小変位理論 (e)		3 780 t・m	-2 707 t	-24.7 t	20.5 cm	57.6 cm
$(f)-(e)/(e)$		52%	1%	40%	52%	48%

図-14

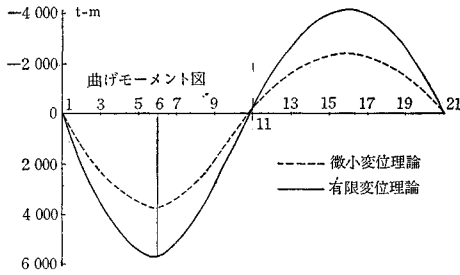
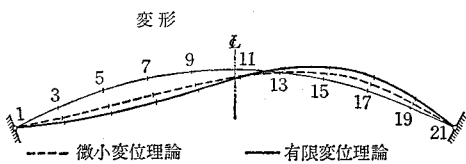


図-15



なお、式(8)における α は0.8とし、くり返し数10、計算時間は印刷を除いて約30秒であった。

6. むすび

以上、変形を考慮した平面構造の解析を述べ、若干の計算例を示した。計算例からもわかるように、格間の軸方向力による付加的影響を無視しても、部材を数個の格点で区切って計算を行えば、実用上、十分な付加的影響が考慮されていると思う。また、大きな軸方向力と同時に、曲げモーメントを受ける部材から構成された構造物は、微小変位理論によって設計し、かつ、有限変位理論によって検算されることが好ましい。終りに長大構造物の建設が注目されているおから、この報告が参考となるところがあれば幸いである。

参考文献

- 1) 児嶋・山本・成岡：変形法によるリブアーチ構造の解法，土木学会誌，46-10（昭36.10），pp. 19~24.
- 2) 児嶋・成岡：変形法による連続リブアーチの解法，土木学会誌，47-2（昭37.2），pp. 24~29.
- 3) 藤野・大坂：任意形式のツリ橋の静的構造解析法—有限変位理論による骨組構造解析法への応用，三菱重工技報，3-6（昭41.12），pp. 17~23.
- 4) 林 毅：軽構造の理論とその応用，上，日本科学技術連盟，1966，pp. 230~235.
- 5) 高尾：タワミの影響を考えたアーチ橋の計算，土木学会第20回年次学術講演会講演概要（昭40.5），pp. 76-1~2.

付録・ダンピング定数について

計算例(1)，(2)，(3)において、ダンピング定数 α が

それぞれ、0.7、0.8、0.8とされている。この α については、文献3)において、吊橋の解析の場合が示されており $\alpha=0.2\sim 0.7$ がよいと記されている。しかし、吊橋以外の任意の構造物の解析に対して、最適

な α の値については、現在のところ、文献もなさそうである。筆者も現在検討中であるが、本文計算例(1)について、若干の比較計算を行なったので、紹介したい。図-A(1)は計算例(1)について、 α の値とくり返し数との関係を示したものである。また、図-A(2)は図-A(1)に対応する α と、図-6に示す格点6の収束状態を示したものである。この結果のみからは、 $\alpha=1.2$ の場合が最も早く収束しているが、一般的に、軸方向圧縮力と曲げを受けるこの種の構造物では、 α が1.0前後であればよいと思われる。以上の結果より、計算例(1)で用いた $\alpha=0.7$ はあまり適用ではなく、したがって、くり返し数12となっているが、

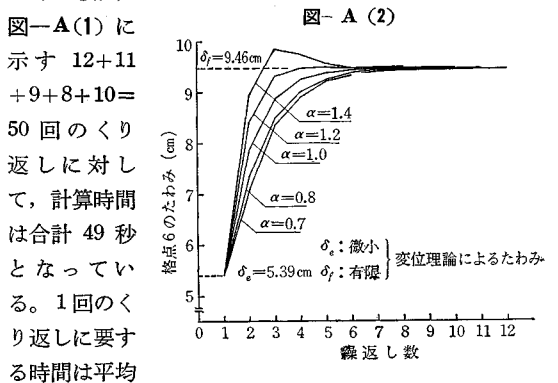
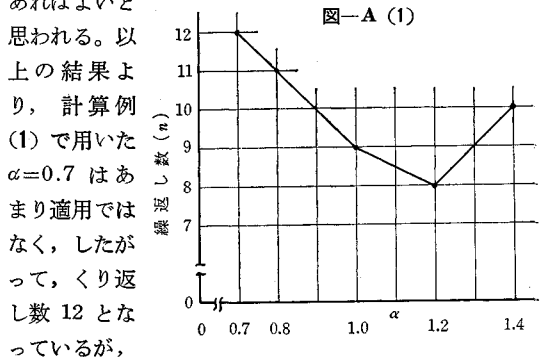


図-A(1)に示す12+11+9+8+10=50回のくり返しに対して、計算時間は合計49秒となっている。1回のくり返しに要する時間は平均1秒程度と思われるので、最適の $\alpha=1.2$ をとらず、 $\alpha=0.7$ を用いたことによる計算時間の差は、4秒ぐらいであろう。以上は、図-6の構造物に対するものであるが、構造物の種類、載荷状態によって、 $\alpha=1.2$ が必ずしも最適であるとはいえない。吊橋の場合には短スパンの場合、 $\alpha=0.7$ と α の大きい方が好ましく、長スパンになると $\alpha=0.2$ と α の小さい方が好ましいとされている。このように、構造物の種類、載荷状態スパンによって個々に研究するより方法がなさそうである。

(1968. 9.13・受付)