

有限要素解析法 (Finite Element Method) の二次元問題への応用

資料

藤田益夫*・川本眺万**

1. まえがき

有限要素解析法 (FEM) の概念は、最初、物理的な観点から発展されたもので、最小ボテンシャルエネルギーの定理にもとづいた古典的な Ritz の方法を拡張したものである。この考えが工学方面でもっとも早くから用いられたのは、航空工学の分野であって、この方法は翼の表面応力状態を求める数値解析法として研究されてきており、構造物の応力および変形を求める Matrix Method を一般化したものである。この方法は、最近の大型電子計算機の発達と相まって、各分野に発展させられてきた。土木工学の分野においては、1960 年、2nd ASCE Conference on Electronic Computation において、R.W. Clough¹⁾によって発表されたことに始まり、その後、O.C. Zienkiewicz^{2),3),4)}らによって、二次元問題への応用がなされている。著者の一人も、Zienkiewicz が非等方性基礎上のバットレスダムの解析にこの方法を適用した論文²⁾に興味をいだいていたが、昨年、リスボンで開催された第 1 回岩盤力学国際会議に出席し、この方法がいろいろな二次元問題の解法に適用されていることを知って驚ろいた次第である。さらに、その後、アメリカのカリフォルニア大学を訪ね、土木工学の各専門分野の研究者と話して、この方法がいずれの専門分野においても種々活用され、さらに研究が進められていることを聞いて、あらためてこの方法の大きい力を知られ、わが国においても、大いにこの方法の研究および応用に力を入れるべきだと痛感した。

昨年 10 月 31 日、カリフォルニア大学の Clough 教授が来日して、この方法の紹介を行なった。また本年 3 月 20 日から 24 日まで、カリフォルニア大学において「構造工学における有限要素解析法」(The Finite Element Method in Structural Mechanics) と題する講演会が開催される。その内容の一部を紹介するとつぎのようである。

(1) 構造工学における FEM : a) FEM の概念, b)

* 学生会員 名古屋大学大学院 工学研究科 土木工学専攻修士課程在学

** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

FEM の数学的正当性, c) 直接剛度法 (Direct Stiffness Method), d) 平衡方程式の作成と解析

(2) 平面問題 : a) 要素剛性 (Element Stiffness) の解析, b) 解法の例, c) 有限要素内のつりあい応力場のモデル, d) 非線型, 非弾性および異方性材料, 有限変形等の解析, e) 工学的問題 (ダム, 地下発電所)

(3) 三次元問題 : a) 軸対称荷重あるいは非軸対称荷重をうける軸対称体, b) 一般的な三次元体

(4) 板の曲げ : a) 板の曲げ解析, b) 動的応答の解析

(5) 製 : a) 任意荷重をうける回転製, b) 製構造物の解析, c) 補剛された製構造物

(6) 折板構造物 (Prismatic Shell Structures) : a) 折板構造物 (Folded Plate Structures), b) 折板の解析の直交異方性床板への適用

(7) その他の応用 : a) 鉄筋コンクリート, b) ねじり, c) 自由表面をもった Darcy Flow の解析, d) アースダムへの漸増荷重法の適用, e) 熱伝導問題の解析, f) 土質構造物の動的解析

Finite Element Method の板および製構造への応用については、さきに梶田・成岡⁵⁾が土木学会誌に発表しているが、ここでは、この方法の二次元問題への適用について述べ、いくつかの応用例を紹介する。構造工学の分野において数値実験的方法に興味をもたれている読者諸氏の参考になれば幸いである。

2. 有限要素解析法 (FEM) の特色

FEM の基本的概念は、一般的 Matrix Method と同様に、すべての構造物は、個々の独立した構造要素 (Element) の集合であり、それらの要素は、各節点 (Nodal Point) で結合されていると考えることである。この構造物の各要素は、それぞれの剛性、形状などで表わされる特性をもち、これらは要素の節点の力と変形の関係より得ることができる。この特性を Stiffness Matrix とよんでいる。FEM で用いられる近似は、網目 (Mesh Size) を小さくすることと、精度のよい結果を得るような Stiffness Matrix を用いることによる物理的近似であり、基本方程式の数学的近似を用いる差分法

と異なっている。

FEM は、つぎの三つの基本的操作から成り立っている。

(1) 構造物の理想化、すなわち、無限の自由度をもつ構造物を有限の自由度しかもたない要素に分割し、構造物はこれらの要素の集合体と考えること (Finite Element Idealizations of Structures)。

(2) 要素の Stiffness Matrix を作ること。有限の節点によって結合されている要素の特性、剛性はその節点に作用している力と、それによる変形との間の関係によって表わされる。

(3) 要素の集合としての構造物を解くこと。すなわち、各要素の Stiffness Matrix を加え合わせて、構造物としての Stiffness Matrix を解くことである。

これらの操作によって FEM では、(1) 基本的考え方、(力)=(ばね)×(変形)であり、この(ばね)が Stiffness Matrix に相当すること、(2) 任意の境界においても、境界条件を力あるいは変形によって容易に与えることができること。したがって、計算概念はいちじるしく単純、明快であることなどの大きい特色がある。

3. 二次元問題に対する要素 Stiffness Matrix の誘導

FEM による解析の中心は、各要素の Stiffness Matrix を計算することである。その要素の Stiffness Matrix を誘導するのに、要素内の応力状態を仮定するもの (Stress-Control Finite Element Method) と、変形状態を仮定するもの (Deformation-Control Finite Element Method) の二つがあるが、現在のところ変形状態を仮定するものが一般的であるので、ここでは、変形状態を仮定する方法について述べる。

変形関数を仮定する場合、つぎの条件を満足しなければならない^①。

- (1) 変位関数は、要素内では連続であること。
- (2) 隣接する要素の変位は連続であること。
- (3) 変位関数は、一般化した変位の線型関数であること。
- (4) 変位関数は、独立の変形状態として、剛体の変位を含まねばならない。

二次元問題の要素として、三角形、長方形、四辺形などの形状のものが採用できるが、一般に、構造物を分解しやすいために、三角形要素が選ばれる（長方形要素の方が精度はよいが、境界条件など任意の形状がとりにくいため、二次元問題では少ない。また、板の問題では、長方形要素がよく、三角形要素では計算精度が落ちることが確かめられている^②）。

図-1^③ に示す三角形要素の節点 i, j, m では、それぞれ x, y 方向の二自由度の変位がある。これを U^A とし同様に各節点における内力を F^A とすると、

$$U^A = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m]$$

$$F^A = [X_i, Y_i, X_j, Y_j, X_m, Y_m]$$

要素の Stiffness Matrix を K^A とすると、

$$F^A = K^A \cdot U^A$$

(1)

となる。ここに、

K^A は 6×6 要素

の行列である。こ

こで、要素内では

応力の急変がない

ように要素を分割

したとすれば、要

素内でのひずみは

一様と考えてよ

く、前述の条件を

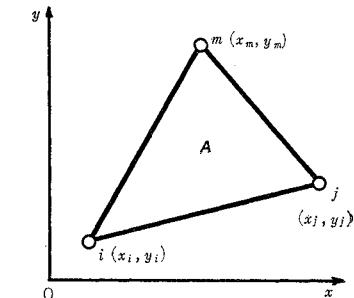


図-1 三角形要素

満足する変位関数をつぎのように選ぶことができる。

$$\left. \begin{array}{l} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{array} \right\} \dots \quad (2)$$

これらの式に、節点の座標を代入して、

$$U^A = A \cdot \alpha = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \dots \quad (3)$$

とする。ひずみは、 $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ のように変位と関係づけられるから、それらの関係をつぎのように

$$\epsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = B \cdot \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \dots \quad (4)$$

と表わす。また応力とひずみの関係はつぎのように表わされる。

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D \cdot \epsilon(x, y) = C_1 \begin{bmatrix} 1 & C_2 & 0 \\ C_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-C_2)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここで, } C_1 = E/(1-\nu^2) \\ C_2 = \nu \end{array} \right\} \text{(平面応力状態)}$$

表-1 Stiffness Matrix [K]

$$K = \frac{c_1 t}{2\phi} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_{jm}^2 + y_{jm}^2 & x_{jm}^2 + \lambda_1 y_{jm}^2 & \lambda_1 x_{mi}^2 + y_{mi}^2 & \text{[Symmetrical]} \\ \lambda_2 x_{mj} y_{jm} & x_{jm}^2 + \lambda_1 y_{jm}^2 & \lambda_2 x_{im} y_{mi} & \\ \lambda_1 x_{im} x_{mi} + y_{im} y_{mi} & \lambda_1 x_{im} x_{mi} + c_2 x_{im} y_{mi} & \lambda_1 x_{im}^2 + y_{mi}^2 & \\ \lambda_1 x_{mj} y_{mi} + c_2 x_{im} y_{jm} & x_{jm} x_{mi} + \lambda_1 y_{jm} x_{mi} & \lambda_2 x_{im} y_{mi} & x_{mi}^2 + \lambda_1 y_{mi}^2 \\ \lambda_1 x_{ij} x_{jm} + y_{ij} y_{jm} & \lambda_1 x_{ij} y_{jm} + c_2 x_{im} y_{ij} & \lambda_1 x_{ij} x_{mi} + y_{ij} y_{mi} & \lambda_1 x_{ij}^2 + y_{ij}^2 \\ \lambda_1 x_{im} y_{ij} + c_2 x_{ji} y_{jm} & x_{ij} x_{jm} + \lambda_1 y_{ij} y_{jm} & \lambda_1 x_{im} y_{ij} + c_2 x_{ji} y_{mi} & x_{ij} x_{mi} + \lambda_1 y_{ij} y_{mi} \\ \lambda_2 x_{ji} y_{ij} + c_2 x_{im} y_{ij} & & & \lambda_2 x_{ji} y_{ij} & x_{ij}^2 + \lambda_1 y_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu) \\ C_2 = \nu/(1-\nu) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(平面ひずみ} \\ \text{状態)} \end{array}$$

したがって、応力と変位の関係は、つぎのようになる。

$$\sigma = D \cdot \epsilon = D \cdot [B \cdot \alpha] = D \cdot B \cdot A^{-1} \cdot u \quad \dots \dots \dots (6)$$

上式を書きかえると、つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{c_1}{\phi} \times \begin{bmatrix} y_{mj} & c_2 x_{jm} & y_{im} & -c_2 x_{im} & -y_{ij} & c_2 x_{ij} \\ c_2 y_{mj} & x_{jm} & c_2 y_{im} & -x_{im} & -c_2 y_{ij} & x_{ij} \\ \lambda_1 x_{jm} & \lambda_1 y_{mj} & -\lambda_1 x_{im} & \lambda_1 y_{im} & \lambda_1 x_{ij} & -\lambda_1 y_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (6')$$

ここに、 $\phi = x_{ji} y_m + x_{im} y_j + x_{mj} y_i$

$$\lambda_1 = (1 - c_2)/2, \lambda_2 = (1 + c_2)/2$$

ここで仮想変位の原理を用いて、応力 σ と仮想変位 \bar{u} による内部の仮想仕事を計算すると、要素体積について、

$$\begin{aligned} W_i &= \int_V \bar{\epsilon}^T \cdot \sigma dV \\ &= \bar{u}^T \int_V (BA^{-1})^T \cdot D \cdot (BA^{-1}) dV \cdot u \quad (7) \end{aligned}$$

となる。一方、外力 F による仕事は、

$$W_e = \bar{a}^T \cdot F \quad (8)$$

であり、これらが等しいこと、すなわち $W_i = W_e$ より、外力と変形の関係がつぎのようになる。

$$\begin{aligned} F &= \left[\int_V (B \cdot A^{-1})^T \cdot D \cdot (BA^{-1}) dV \right] \cdot u \quad (9) \\ &= K \cdot u \end{aligned}$$

ここで、 K は Stiffness Matrix であり、この積分は、定義から、要素剛性を与えるものであるから、 x, y を含まない。したがって、

$$K = (\text{要素の体積}) \cdot (BA^{-1})^T \cdot D \cdot (BA^{-1}) \quad (10)$$

となり、表-1²⁾に示すように与えられる。

4. 電子計算機による計算方法

平面応力状態における応力解析のための計算機のプログラムは、大体、三つの部分に分けられる。

- (1) 要素の Stiffness Matrix を作り、構造物全体の Stiffness Matrix を作ること。
- (2) 節点変位と節点力による一次連立つりあい方程

式を解くこと。

(3) 各々の要素における応力の数値を求める。

必要な Input Data としては、

(1) Element Data : 弹性特性 (弹性係数、ポアソン比温度膨張係数など), 各要素の節点数

(2) Nodal Point Data : 各節点の x, y 座標, 荷重成分, 初期変形, 境界条件など

(3) Parameter Data : 要素, 節点の番号, 収束誤差など

これらの Input Data によって、各要素の Stiffness を作り、これらを合わせて全体の構造物の Stiffness を作る。隣り合った要素の節点の数は限られたものであるため、全体の Stiffness Matrix は多くの零要素を含むことになるので、その利点を利用して Gauss-Seidel Iteration Method を用いるのがよい。このとき、解の収束をよくするために Over Relaxation Factor を導入することが考えられている⁹⁾。

Clough は計算時間の簡単な目安として、IBM 7090 Computer の使用に対して、次式を与えている⁹⁾。

$$t = 0.002 m \cdot n \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここに, t : 使用時間 (sec)

m : 反復回数

n : 節点数

また満足すべき解を得るために、75~150 回の反復を必要とすること、および IBM 7094 では 2~3 倍計算速度が速いことを述べている。筆者らの計算経験では、東大の HITAC 5020 E を用いると式 (11) より 2 倍はやいことがわかった。

5. 非線型問題の解析

一般に、非線型問題には二つの場合がある。すなわち、要素特性 (Element Stiffness) 自体が要素の変形とともに変化する場合と、荷重下において、要素の集合の幾何学的構成が構造物のつりあい関係に大きな影響を及ぼす場合 (Large-Displacement theory) とである。ここでは、前者の場合の二次元問題のみについて説明する。前者の場合は、各要素において、非線型の応力ひずみ関係によって生ずる非線型問題である。その解析法

としては、漸増荷重法と反復法がある。

(1) 漸増荷重法

a) Incremental Load Process

荷重を小さな増分に分割して漸増的に作用させ、各荷重段階では、弾性的に計算するが、各増分で弾性係数は図-2(a)のように変化させ、非弾性特性を含ませる。このとき、各荷重段階で、Stiffness Matrix のうち、行列 [D] が変化することになる。

b) Incremental Initial Strain Process

ある荷重段階の全ひずみを弾性ひずみ、非弾性ひずみとクリープの成分に分けて考える。すなわち、

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta (\varepsilon_{inelastic} + \varepsilon_{creep}) = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_0 \dots \dots (12)$$

図-2(b) に示すように、荷重を作用させ、最初の応力とひずみ $\Delta \varepsilon_e$ を弾性的に計算し、つぎに $\Delta \varepsilon_0$ を加えて、 $\Delta \varepsilon$ として同じ弾性係数で応力、ひずみを計算する。これを繰り返し一定の応力を収束させて真の応力を求める。

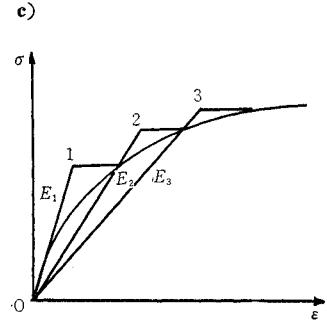
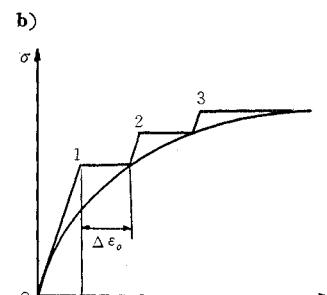
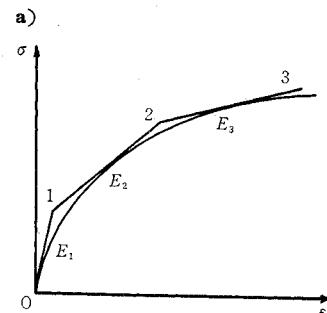
図-2 応用一ひずみ曲線

(2) 反復法

a) Direct Iterative Process

各応力に対応する弾性係数を用いる方法で、初期の弾性係数により応力分布を求め、図-2(c) のように、それに対応する新しい弾性係数(割線係数)を用いて新しく応力を計算する。この操作を応力が収束するまでくり返す。このとき、Matrix [D] は応力 σ の関数となるが、Mises の条件を用いて、Matrix [D] を応力表示した式が与えられている¹⁰⁾。

FEM の有力な手段は、非線型問題(非等方性、非等質性)においても、なんらの仮定も設定することなしに忠実にその条件を考慮して



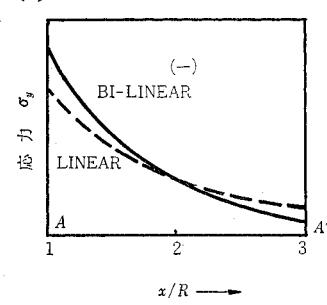
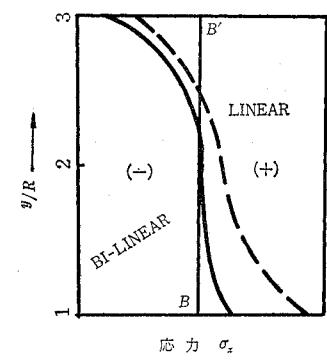
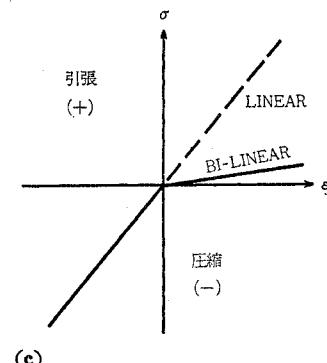
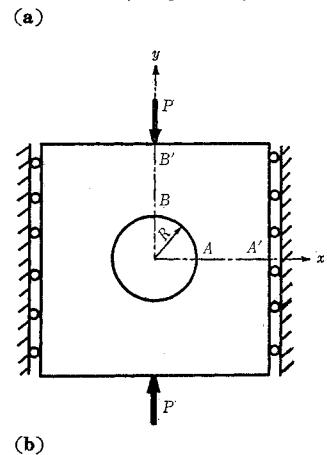
行なえることである。したがって、FEM は、形状の複雑な問題と、非線型問題にその利点を發揮して応用例も多い。図-3 (a) のような孔あき板の非線型問題の例を示そう

¹¹⁾。この場合、材料は図-3 (b) に示すように、圧縮と引張で異なる弾性係数をもつもの(bi-linear stress-strain relationship)であり、引張の弾性係数は圧縮の 1/20 とする。解析方法は、反復法で行なわれており、ま

ず全部圧縮弾性係数を用いて弾性計算を行ない、引張の出る要素で引張弾性係数を導入し、他の要素特性は同じくして計算をくり返す。これを 14 回くり返して大体満足すべき解が得られている。その結果を弾性解析と比較したもののが図-3 (c), (d) である。

反復法は、Newton-Raphson method¹²⁾で行なわれたが、この方法は多くの非線型問題に応用できる。しかし、反復法はいつも一つの解に収束するとはかぎらず、非線型問題の中には、ある荷重状態で二つ以上のつりあい状態になることがある。この場合には、荷重行程がつかめる漸増荷重法によって、解析しなければならないだろう。

図-3 非線型問題計算例
(Clough による)



6. FEM の応用例

土木構造物は、非等質性あるいは非等方性の自然の材料を用いてつくられるものが多い。しかし、今まで、数学的困難さからほとんど解析されていなかった。したがって、問題をより正確に解析するため、それらを考慮した解析が必要であるが、それは FEM の適用によりある程度可能となってきた。特に二次元問題では、ダム、トンネル、斜面などにその応用例が多い。その数例を示す。

(1) 重力ダムの応力解析¹³⁾

W. Clough および E. Wilson が重力ダムと基礎岩盤とを一体として取り扱かい、ダムは $E_c = 2.0 \times 10^6$ psi, 基礎岩盤は $E_{fx} = 5.0 \times 10^6$ psi, $E_{fy} = 1.0 \times 10^6$ psi の直交異方性体と考えて、死荷重としては自重を三角形要素の三つの節点に三等分して与え、活荷重としては静水圧と温度差による応力とを考えて、ダムの応力、変位を求めている。この場合、計算時間は 7 分程度であり、Output として各点の応力、変位がでてくる。

(2) パットレスダムの応力解析²⁾

O.C. Zienkiewicz および Y.K. Cheung が FEM を紹介するとともに、パットレスダムの応力解析を行なっている。彼らもダムと基礎岩盤を一体として考え、岩盤には、砂層、断層を入れ、それぞれ弾性係数を変え、変位条件を与えて解析している。

(3) トンネルのまわりの弾塑性応力解析¹⁰⁾

S.F. Reyes は、地山材料が Mohr-Coulomb 式で表わされる強度特性をもつと仮定し、その粘着力、内部まさつ角 ϕ を Mises の降伏条件に用いて、円孔のまわりの塑性領域の広がりを求め、最大主応力、最小主応力を図示している。この場合、計算の対象となる領域は全体の 1/4 の第一象限の部分だけでよく、解析に必要な要素の数を増すことができる。

(4) 斜面近傍の開孔のまわりの応力¹⁴⁾

H.W. Anderson は 4 種類の水平成層岩盤における自由斜面が一つの大きい断層をもつ場合に、その斜面下に矩形断面の孔を開削するときの応力状態を長方形要素を用いて解析している。

(5) 非等質性岩盤内の円孔トンネルの周辺応力¹⁵⁾

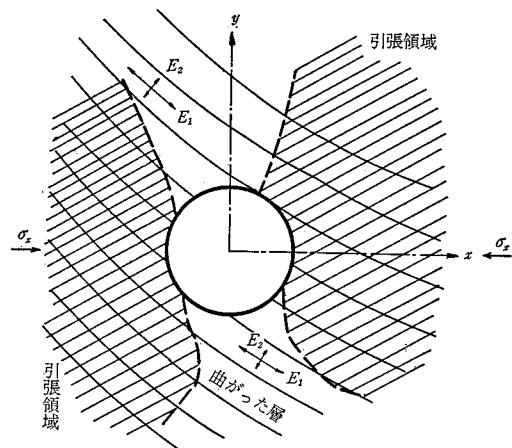
R.E. Goodman は弾性係数の異なる二つの岩盤の境界に円形トンネルを掘削した場合を対象にして、その

解析モデルを三角形要素に分割して、円孔周辺の応力状態を求めていている。そして、その場合、二つの材料の弾性係数を $E_1 = 0.1 \times 10^6$ psi, $E_2 = 10 \times 10^6$ psi にとり、それらの境界線と円孔との相対的位置によって、円孔周辺応力が、いかに変化するかを調べている。

(6) 岩盤力学問題への応用⁴⁾

O.C. Zienkiewicz は岩盤力学への応用として、図-4 に示すように斜めに曲った層の入っている地山内に円形トンネルを開削した場合を取り扱かっているが、この場合には異方特性のうち主弾性係数比は一定であるが、弾性主軸が位置によって変化するようなモデルを考えねばならない。解析結果は図に示されているように、等方等質の場合に比べて引張領域がかなり変化する。また彼は、地殻構造によって生ずる急斜面の下の応力状態をも求めている。

図-4 曲った成層地山内のトンネル周辺応力状態の解析
(Zienkiewicz による)



(7) 斜面の静的、動的解析¹⁶⁾

W.D.L. Finn は、斜面下の静的応力を水平表面をもつ半無限地盤の自重による初期応力状態と、その状態での掘削予定斜面位置での初期応力の符号を逆にした応力状態を重ね合わせることにより求めており、その計算過程に FEM を適用している。また、動的解析としては、1963 年 Alameda Park Mexico City 地震を Input してつぎの基本式を用いて、動的応力を求めていく。

$$[M]\{\ddot{r}\} + [c]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{R(t)\} \quad \dots\dots(13)$$

$$\{R(t)\} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M_n \end{bmatrix} = a_h(t) + \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \\ 0 \end{bmatrix} a_v(t) \quad \dots\dots(14)$$

ここに、 $a_h(t)$: 水平加速度

$a_v(t)$: 鉛直加速度

(8) 逐次破壊現象としての変形と耐荷力の解法¹⁷⁾

林は、非線型な応力一ひずみ関係にある非等質な岩盤がダムからの推力を受けるときの破壊状態を逐次破壊現象として解析しようと試みている。破壊条件に近いところでは、基盤の剛性が非線型に低下すること (Mohr の応力円と破壊包絡線との相対的位置に關係づけた緩み係数 R を導入して、 R と弾性係数、ボアソン比の関係を仮定している) を考慮し、応力の再分布と各変形成分を FEM の適用により逐次的に解析している。その計算例としてダム基盤を 32 の節点、58 の三角形要素に分割して荷重の増大に対する基盤の弾性係数の低下(塑性比)を漸増荷重法によって求めている。

(9) 異方性浸透流の解析¹⁸⁾

O.C. Zienkiewicz は、浸透流問題にも FEM を用い、透水係数 k が異なる層からなるダム基盤における浸透流線、等ポテンシャル線を求めていている。この問題は、構造解析の Stiffness Matrix [K] に対して、Permeability Matrix [S] を用いることであり、ダルシーの法則と連続の方程式から要素の節点の水頭 H の連立一次方程式となる。境界条件は自由面における水頭である。

(10) アースダムの地震応力解析¹⁹⁾

R.W. Clough と A.K. Chopra は、アースダムを高さ 300 ft、底辺 900 ft の二等辺三角形と仮定し、それを節点 66、要素 100 の三角形要素に分割し、式 (15) の振動基本方程式を用いて解いている。ここで、ダムは $E=81\,300 \text{ psi}$, $\nu=0.45$, $r=130 \text{pcf}$ の弾性体とし、減衰率 $[c]=20\%$ を各節点に作用させている。地震加速度として、1940 年 Elcentro 地震におけるものを用い、それを Input している。その結果として、振動モードによる固有振動数と変形性状や最大主応力、最小主応力、せん断応力分布の時間的変化を図示している。

(11) 地下発電所近傍の岩盤応力解析¹⁹⁾

J.M. Raphael と R.W. Clough は、アーチダム基礎の下流側地山内に設けられる地下発電所と、それにともなって設けられる排水孔および変圧器設置のための開孔等による周辺地山内の応力状態を解析している。計算機によるプログラムは明らかにされていないが、いずれもきわめて多くの節点数をもつ三角要素に分割して計算を行なっており、計算プログラムに特別の配慮が払われているように思われる。

(12) 自由斜面における応力および変形²⁰⁾

川本と高橋は、三角形要素による FEM を適用して自由斜面下の初期応力状態を求め、斜面の傾斜と初期応力状態の関係を明らかにしている。斜面の上部だけでなく、のり先き付近にも引張応力が生じ、その引張応力領域はかなり深いところまで達していること、引張主応力は斜面に垂直方向にあり、これによる岩塊の分離および板状化と、斜面に平行方向の大きな圧縮応力のために、のり先き部分の斜面の谷への押し出しの危険が予想されるような結果が得られている。引き続いて、筆者らは、斜面表面からの風化変質による岩盤材料の剛度の低下が、初期応力や変形にいかなる影響をおよぼすかについて計算中である。現在、計算には、東大大型計算機 HITAC 5020 E を使用して、節点数 130、要素数 200 程度が可能であるが、節点番号、配列方法、Stiffness Matrix の操作により、さらに要素数を増せるように考えている。

7. あとがき

Finite Element Method の 2 次元問題への適用について述べ、土木構造物についてのいくつかの応用例を單に列挙したにとどめたが、この方法が土木構造物の 2 次元解析に広く用いられる有利な手段であることがご理解いただけたと思う。この方法は 2 次元問題だけでなく、3 次元問題へも拡張され、殻構造物、アーチダム²¹⁾などにも応用されて、今後ますます利用度が増大するものと思われる。しかし二次元解析においてもまだこの解析法の精度、分割される要素数の限度、要素への分割状態が解析結果におよぼす影響等の問題も残されている。さらに基本的には、要素内の変位状態の仮定が問題の解析に適しているかどうか、あるいは要素内の応力状態を仮定する方が妥当であるかどうかということの検討も重要な問題であろう。分割を細かくすれば解析精度を向上させることができるが、計算機の容量に限度がある。しかし全体の Stiffness Matrix は多くの零要素を含むから、プログラムの組み方によっては、さらに有利になるだろうし、要素を次第に細かくして何段階かの計算を行なうことによっても精度を上げることもできるだろう。しかし今後、大型電子計算機の発達とともに、さらに大容量の要素集合体を一度に解析することが必要であり、同時にこの方法の適用範囲を広めて行くよう研究を進めるべきであると思う。

参考文献

- 1) Clough R.W.: The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, (1960).
- 2) Zienkiewicz and, O.C. Cheung, Y.K.: Buttress Dam on Complex Rock Foundations, Water Power, (1964), 193.

- 3) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : Solution of anisotropic seepage by finite elements, Proc. of ASCE EM 1, (1966), 111.
- 4) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : Application of the finite element method to problems of rock mechanics, Proc. of the 1st cong. Inter. Society of Rock Mechanics, (1966), 661.
- 5) 梶田建夫, 成岡昌夫 : Finite Element Method (有限要素法の解説)について, 土木学会誌, 52, 5, (1967) 45
- 6) Melosh, R.J. : Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method, Jour. of Am. Inst. Aero. Astro., 1-7, (1963), 1631
- 7) Clough, R.W. and Tocher, J.L. : Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending (1966)
- 8) Clough, R.W. : The finite element method in structural mechanics, chapter 7 "Stress Analysis" (editor Zienkiewicz), (1965), 95
- 9) 文献 8) の pp. 98
- 10) Reyes, S.F. : Elastic-plastic analysis of underground openings by the finite element method, Proc. of the 1st cong I.S.R.M., (1966), 477
- 11) 文献 8) の p. 104
- 12) Livesley, R.K. : Matrix method of structural analysis, Pergamon Press, London, (1964)
- 13) Clough, R.W. and Wilson, E.L. : Stress analysis of a gravity dam by the finite element method, Sym-
- posium on the use of computers in civil engineering, Lisbon-Portugal (1962) Paper No. 29
- 14) Anderson, H.W. : Finite element method applied to rock mechanics, Proc. of the 1st cong. I.S.R.M. (1966), 317.
- 15) Goodman, R.E. : On the distribution of stresses around circular tunnels in non-homogeneous rocks, Proc. of the 1st cong. I.S.R.M. (1966), 249
- 16) W.D.L. Finn : Static and dynamic stress in slopes Proc. of the 1st cong. I.S.R.M. (1966), 167
- 17) 林 正夫 : 逐次破壊現象としての変形と耐荷力の解析法の試み, 第4回岩盤力学シンポジウム, (1966), 41
- 18) Clough, R.W. and Chopra, A.K. : Earthquake stress, analysis in earth dams, Proc. of ASCE EM 2, (1966), 197.
- 19) Raphael, J.M. Clough, R.W. : Stresses in rock at boundary power plant, Bechtel-Leedhill, San Francisco, California, (1965). 21
- 20) 川本勝男, 高橋由行 : 岩盤斜面における初期応力について, 土木学会第 22 回年次講演会発表, (1967)
- 21) Zienkiewicz, O.C. Cheung, Y.K. : Finite element method of analysis for arch dam shells, Int. Symp. on the Theory of Arch Dams, Univ. of Southampton, (1964).

(1967.3.6・受付)

セメント協会研究所

＝刊行図書案内＝

東京都港区赤坂 7 丁目 5 番 5 号

《月刊誌 セメントコンクリート 9 月号 No247》

生コン特集

特価200円 〒30円

主要内容 :

生コン業界の動向
生コン製造設備上の問題点
生コン工場の品質管理
生コンの運搬時間と品質
生コン工場の輸送能力

生コンの品質について
生コンの上手な使い方
生コン使用上の問題点
海外の生コン事情
生コン関係の文献

9月1日発行(お申込は振替をご利用下さい。)

昭和41年度

セメント技術年報 XX

B5版 574頁 價1,300円 〒150円

お申込み次第図書目録進呈

コンクリートパンフレット

15号 コンクリート道路

樺井常忠氏執筆 60円 〒40円

コンクリート舗装全般にわたり一般向にわかりやすく説明したもの。

61号 コンクリート道路指針

近藤泰夫氏訳 60円 〒40円

英国科学工業研究局道路試験所、英國セメントコンクリート協会刊行の翻訳。

翻訳1 コンクリート舗装設計基準 および工事仕様書

近藤泰夫氏訳 60円 〒40円

米国コンクリート協会誌、1958年7月号に発表された報告の翻訳。

翻訳3 舗装の維持と補修

近藤泰夫氏訳 60円 〒40円

米国陸軍省編さんで、舗装の維持・補修に従事する技術者に対して指針を与えるもの。

翻訳4 コンクリートの舗装設計

関西道路研究会 コンクリート舗装委員訳。100円 〒50円

翻訳5 道路用コンクリート製品

松田応作氏訳 150円 〒70円

ドイツにおける道路用コンクリート製品を紹介したものの。

振替東京196803(加入者名セメント協会) 電話(583)8541(代)

土木学会誌・52-8