

STUDY ON FREE VIBRATION OF CURVED GIRDER BRIDGES

(曲線桁橋の自由振動に関する研究)

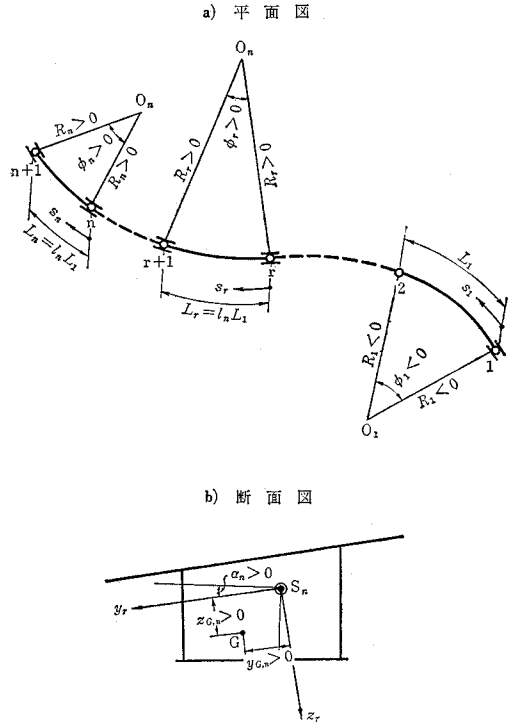
小松 定夫・中井 博

本文では、まず曲線桁橋に種々な静的荷重が作用するときの基礎微分方程式を導き、その結果から曲線桁橋が自由振動するときの運動方程式を誘導した。そして、簡明な振動数方程式の近似角を与えた。つぎに、曲線桁橋の平面形状や断面寸法によって、曲げ振動とねじり振動がどのような連成関係にあるかを明らかにし、種々な場合についての実用公式を示した。さらに、2, 3の曲線桁橋について実験を行ない、理論の妥当性を確認した。

1. 理論的研究

曲線桁橋の自由振動は、たとえ、対称断面の場合でも桁軸の曲率の影響により曲げとねじりの連成作用が生じる。これは直線桁橋と著しく異なる現象である。さらに、曲線桁橋では、1) 曲率中心に対し外側の主桁ほど大きい断面にする。2) 床版にはカントをつける。そのために、一般に曲線桁橋の断面は非対称である。したがって、せん断中心と重心が一致しないので、曲線桁橋が自由振動すれば主軸2方向の曲げ振動とねじり振動とが著しく連成することになる。そこで、図-1 に示す一般

図-1 曲線桁橋の平面および断面形状



的な平面形状と断面寸法を持つ曲線桁橋に任意の静的荷重が作用するときの外力と変形についての基礎微分方程式を誘導した。つぎに、D'Alembert の原理によって曲線桁橋が自由振動するときの運動方程式を得た。そして、Galerkin 法を用いて振動数方程式の近似解を与えた。その結果、曲線桁橋の連成振動数  $p_i$  (円振動数  $i=1, 2, \dots$ ) は以下に示す実用公式によって求められる。

$$\begin{vmatrix} (p_i v v^2 - p_i^2) A_s^* & 0 & p_i^2 s_y^* \\ 0 & (p_i w w^2 - p_i^2) A_s^* & (p_i \beta w^2 - p_i^2) s_z'^* \\ p_i^2 s_y^* & (p_i w \beta^2 - p_i^2) s_z^* & (p_i \beta \beta^2 - p_i^2) I_s^* \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} p_i v v^2 &= \frac{E_s I_\eta'^*}{m^* A_s^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 - (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi_r}{L_r}\right)^2 A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}} \right\} \\ p_i w w^2 &= \frac{E_s I_\xi'^*}{m^* A_s^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 - (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi_r}{L_r}\right)^2 A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}} \right\} \\ p_i \beta w^2 &= \frac{E_s I_\xi'^*}{m^* S_z'^* L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{L_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n A_{i,r}} - \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{L_r}\right)^3 A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}} \right\} \\ p_i w \beta^2 &= \frac{E_s C_w^*}{m^* S_z^* L_1^5} \left\{ (k_i L_1)^4 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{L_r}\right) \nabla_{i,r}}{\sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}} + \frac{L_1^2}{C_w^*} \left( \frac{G_s J^*}{E_s} + I_\xi'^* \right) (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{L_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n \nabla_{i,r}} \right\} \dots (2) \end{aligned}$$

$$p_{i,\beta\beta}^2 = \frac{E_s C_w^*}{m^* I_s^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 + \frac{G_s J^* L_1^2}{E_s C_w^*} (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} + \frac{I_\xi'^* L_1^2}{C_w^*} \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_r}{l_r}\right)^2 V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\}$$

式(1)~(2)の記号は以下のようである。

- $I_\xi' = R_s/R_0 \times I_\xi$ ,  $I_\eta' = R_s/R_0 \times I_\eta$
- $I_\xi, I_\eta$ : 主軸  $\xi, \eta$  に関する断面 2 次モーメント
- $R_0, R_s$ : 図心 0 あるいはせん断中心  $S$  の曲率半径
- $I_s$ : せん断中心に関する極断面 2 次モーメント
- $J$ : ねじり抵抗,  $C_w$ : 曲げねじり抵抗
- $A_s$ : 断面積
- $S_y = A_s z_G$ ,  $S_z = A_s y_G$ ,  $S_z' = S_z - I_s/R_s$
- $m = R_G/R_s \times \tau_s/g$

$\tau_s$ : 材料の密度,  $g$ : 重力加速度,  $R_G$ : 重心  $G$  の曲率半径,  $E_s$ : ヤング係数,  $G_s$ : せん断弾性係数

その他の記号は図-1 参照。ただし, 上述のあらゆる断面定数  $Q_{W,r(S_r)}$  は次式による平均値を用いる。

$$Q_{W,r}^* = \frac{\sum_{r=1}^n L_r \times 1/L_r \int_0^{L_r} Q_{W,r(S_r)} ds_r}{\sum_{r=1}^n L_r} \quad (3)$$

また, 式(2)の固有値  $k_i L_1$  はつぎのようにして求める。

a) 単純曲線桁橋 ( $n=1$ )

$$k_i L_1 = i\pi \quad (i=1, 2, \dots)$$

b) 連続曲線桁橋

$k_i L_1$  値はつぎの  $A_{i,r}, A_{i,r+1}, A_{i,r+2}$  に関する連立同次方程式の固有値として求められる。

$$\begin{aligned} & A_{i,r} l_r \psi_{i,r} + A_{i,r+1} (l_r \chi_{i,r} + l_{r+1} \chi_{i,r+1}) \\ & + A_{i,r+2} l_{r+1} \psi_{i,r+1} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに,

$$\begin{aligned} & A_{i,1} = A_{i,n+1} = 0 \\ & \psi_{i,r} = \{ \text{cosec } l_r k_i L_1 - \text{cosech } l_r k_i L_1 \} / l_r k_i L_1 \\ & \chi_{i,r} = \{ \text{coth } l_r k_i L_1 - \cot l_r k_i L_1 \} / l_r k_i L_1 \end{aligned} \quad (6)$$

つぎに, 式(2)の  $A_{i,r}, V_{i,r}$  値は次式で求める。

a) 単純曲線桁橋

$$A_{i,1} = V_{i,1} = 1/2 \quad (7)$$

b) 連続曲線桁橋

$$\begin{aligned} & V_{i,r} = l_r \{ (\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) \mu_{i,r} + \lambda_{i,r} \lambda_{i,r+1} \kappa_{i,r} \} \\ & A_{i,r} = l_r \{ (\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) v_{i,r} + \lambda_{i,r} + \lambda_{i,r+1} \theta_{i,r} \} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに,

$$\lambda_{i,r} = A_{i,r} / A_{i,2} \quad (9)$$

$$\mu_{i,r} = (l_r k_i L_1 \psi_{i,r} \phi_{i,r} - \chi_{i,r}) / 2$$

$$\kappa_{i,r} = \zeta_{i,r} - \psi_{i,r}$$

$$\begin{aligned} U_{i,r} = 1/2 \times \{ & \text{cosec}^2 l_r k_i L_1 + \text{cosech}^2 l_r k_i L_1 \\ & - (\text{coth } l_r k_i L_1 - \text{coth } l_r k_i L_1 \\ & + \cot l_r k_i L_1) / l_r k_i L_1 \} \end{aligned}$$

$$\theta_{i,r} = \phi_{i,r} / l_r k_i L_1 - (\text{cosech } l_r k_i L_1 \text{ coth } l_r k_i L_1 + \text{cosec } l_r k_i L_1 \cot l_r k_i L_1)$$

$$\zeta_{i,r} = \text{cosech } l_r k_i L_1 \text{ coth } l_r k_i L_1$$

$$- \text{cosec } l_r k_i L_1 \cot l_r k_i L_1$$

$$\phi_{i,r} = \text{cosec } l_r k_i L_1 + \text{cosech } l_r k_i L_1$$

.....(10)

最後に, 曲線桁橋の自由振動数は桁の材料や, 平面形状あるいは断面寸法などの幾何学的形状に密接な関係があることを知った。そして, 桁橋の幾何学的形状によってどのような自由振動が生じるかを分類し, 整理することができた。また, それぞれの場合についての実用公式も与えた。

## 2. 実験的研究

大阪市近辺に建設された 2, 3 の曲線桁橋について行なった実験結果と理論値とを表-1 に示す。これらの結果を比較すれば, 本研究による理論値と実測値とはよく一致することが認められる。一方, 曲線桁橋を直線桁橋とみなして固有振動数を算定すれば, 実際のものより固有振動数は大きくなることがわかった。これよりねじり振動の影響を無視すれば, 曲線桁橋の剛性を過大評価することになることを知った。したがって, 曲線桁橋の動的挙動を明確にするには曲げのみならずねじり振動も考慮する必要がある。なお, 逆対称平面形状を有する S 字型曲線桁橋では, 直線桁橋と見なして取り扱ってもよいことを知った。このことは理論によっても実験によっても確認することができた。

〔小松: 正会員 工博 大阪大学 教授 工学部〕  
〔中井: 正会員 大阪市立大学 講師 工学部〕

表-1 固有振動数 (cycle/sec) の実測値 (Test) と理論値 (cal)

橋 名	西宮インターチェンジ橋		長柄バイパス橋		十三バイパス橋		中之島 S 字橋 (模型 1:20)	
	Test	Cal	Test	Cal	Test	Cal	Test	Cal
スパン $L$ (m)	29.4+29.4		32.5+30.8+35.0		19.5+21.0+19.5		3.0+3.6+3.0	
曲率半径 $R_s$ (m)	40.8		39.4~51.0		40.2~52.0		4.2~∞	
桁形式	非合成並列 2 箱桁		鋼床版 1 箱桁		非合成並列 I 型桁		鋼床版並列 2 箱桁	
振動次数	Test	Cal	Test	Cal	Test	Cal	Test	Cal
1	2.60	2.665	3.44	3.360	6.10	6.535	23	23.8
2	—	4.195	—	4.568	7.95	8.811	33	34.5
3	—	9.495	—	7.172	—	12.05	44	44.1
4	—	11.72	—	8.788	—	12.11	85	92.9