

Finite Element Method

— 有限要素法の解説 —

梶 田 建 夫*
成 岡 昌 夫**

要 旨 平面応力問題、板、殻などの解析の方法として最近特に注目されている Finite Element 法についてその概要を示し、特に、板について、この方法がどのように適用されるかについて述べたものである。

1. ま え が き

構造物の解析に行列を用いることは、古くから行なわれてきたが、電子計算機の利用によって、構造解析における行列法が近年非常に発展してきた。Finite Element 法は、このような行列法の一つである。この方法は、J.H. Argyris の理論を基礎とし、2次元、3次元の構造物を一般の平面構造物の解析と同じような考え方で解析しようとするものである。

このような考え方は、最初、航空機構造の解析について研究されていたが、R.W. Clough(アメリカ)が1960年に平面応力問題に、1962年に重力ダムの応力解析に用いたのをはじめとし、O.C. Zienkiewicz と Y.K. Cheung (ともに、イギリス)が板の曲げの解析に用いて以来、次第に注目されるようになった。

Finite Element 法は、主として、アメリカ、イギリスなどで研究されており、1966年7月イギリスの Newcastle upon Tyne で開かれた“Symposium on the Use of Electronic Digital Computers in Structural Engineering”では、Plates and Shells の部分に6編の Finite Element 法の論文が発表されている。こうした状況から、Finite Element 法を理解しておくことは、肝要であると思う。

この方法は二次元応力問題、板、殻の解析に用いられるが、ここでは、対象を板にしぼって、説明したいと思う。

2. Finite Element 法の原理および解析過程

この方法の基本的な概念は、“すべての構造物は個々の構成成分、要素の集合である”と考えることである。すなわち、“構造物は無数の要素を含み、その要素は無数の節点 (nodal point) で結合されている”と考えることである。このように、構造物が要素の集合体であるという概念は、平面構造物に対しては、ごく自然に用いられている。

Finite Element 法で用いられる近似は、物理的なもの、すなわち、網目を小さくすることで、数学的近似は用いない。この点が、定差分法 (finite difference method) のように、正確な物理式 (たとえば、わたり曲線の微分方程式) が数学的近似 (微係数の定差式による近似) を用いて解くものと、根本的に異なる。

Finite Element 法による解析の過程は、つぎの三つの部分に分かれる。まず、構造物を理想化すること、すなわち、最初の構造物を不連続要素の集合にわけることである。つぎは、要素の特性を計算すること、すなわち、要素の stiffness, または、flexibility を計算することである。これは、個々の要素が無数の点で結合されていると仮定するので、節点に作用する力とそれによる変形との関係 (力 = stiffness × 変形) が計算できればよい。最後は、全体の要素に対する構造解析である。すなわち、個々の要素の stiffness matrix を加え合わせ、全体の stiffness matrix $[K]$ をつくり、この行列の逆行列を計算すれば、節点に作用している外力 $\{R\}$ とそれによる変形 $\{r\}$ との関係、 $\{r\} = [K^{-1}]\{R\}$ より、与えられた荷重による変形量が容易に計算できる。

3. 板要素の stiffness matrix の誘導

要素の stiffness matrix を導くには、要素内の変位、または、応力分布を仮定することが必要である。変位を

* 学生員 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻修士課程在学

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

仮定して誘導するものは、O.C. Zienkiewicz と Y.K. Cheung, R.J. Melosh によって行なわれている。いずれも、 x, y 平面内の板の要素の変位を x, y の多項式で近似させ、stiffness matrix を誘導している。そのほか、板要素の変位パターンを仮定して誘導するものもある（参考文献 15）参照。

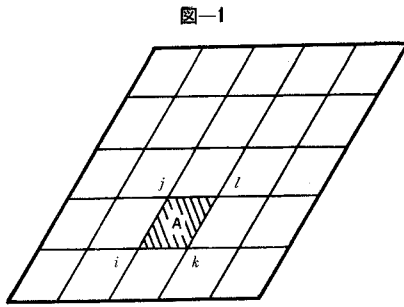


図-1

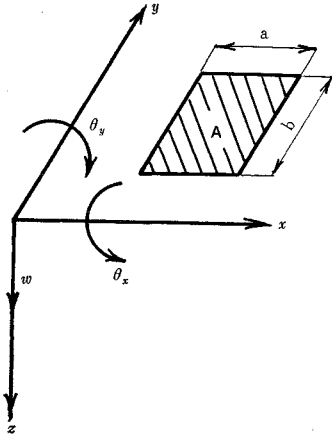


図-2

一方、R.T. Severn, P.R. Taylor らは板要素内の応力分布を x, y の多項式で仮定し、stiffness matrix を導いている。

以下は、長方形要素について最も一般的である Zienkiewicz によるものを示す。

図-1 のように、板を無数の小さな長方形要素に分け、その中で、図-2 のように、要素 A を考える。点 i, j, k, l には、それぞれ、三つの自由度（三つの独立な変位成分）が、つぎのようにある。

$$\theta_x = -\partial w / \partial y, \quad \theta_y = +\partial w / \partial x, \quad w$$

これをまとめて、

$$\text{点 } i \text{ については, } u_i = \{\theta_{xi}, \theta_{yi}, w_i\}^T$$

$$\text{要素 A については, } u^A = \{u_i, u_j, u_k, u_l\}^T$$

同様に、節点には変位に対応する力があり、つぎのように書きうる。

$$F_i = \{T_{xi}, T_{yi}, P_i\}^T, \quad F^A = \{F_i, F_j, F_k, F_l\}^T$$

要素 A の stiffness matrix を K^A とすると、つぎの式が成立する。

$$F^A = K^A u^A$$

K^A を求めるために、 w を x, y の多項式で表わす。この場合、長方形は四隅の点にそれぞれ三つの自由度があるから、12 の未知定数を用いて、つぎのように表わす。

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 x^2 + A_5 xy + A_6 y^2 + A_7 x^3$$

$$+ A_8 x^2 y + A_9 xy^2 + A_{10} y^3 + A_{11} xy^3 + A_{12} xy^3$$

w, θ_x, θ_y の式に i, j, k, l の座標を代入すると、

$$u^A = CA, \quad \text{ここで、} C \text{ は } 12 \times 12 \text{ の行列、} A \text{ は行列列}$$

$$A = C^{-1} u^A$$

板の各点における曲率とねじり率をつぎのように示す。

$$\chi = \{-\partial^2 w / \partial x^2, -\partial^2 w / \partial y^2, 2 \partial^2 w / \partial x \partial y\}^T$$

$$= BA = BC^{-1} u^A,$$

ここに、 B は 3×12 の行列

曲げモーメント、ねじりモーメントは直交異方性板に対して、

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = D\chi$$

等方性板の場合には、

$$D_x = D_y = D, \quad D_1 = \nu D, \quad D_{xy} = 0.5(1 - \nu) D$$

表-1 Stiffness Matrix $K^A = (D_x \cdot K_1 + D_y \cdot K_2 + D_1 \cdot K_3 + D_{xy} \cdot K_4) \times (1/15 ab)$ における K_1, K_2, K_3, K_4 の値 ($\rho = a/b$)

	1 列目			2 列目			3 列目				
	K_2	K_3	K_4	K_1	K_3	K_4	K_1	K_2	K_3	K_4	
1	A_{11}			A_{11}			20	0	$3\rho^{-2}$		
2	$A_{21} A_{22}$			$A_{21} A_{22}$			0	-15	0	20	0
3	$A_{31} A_{32} A_{33}$			$A_{31} A_{32} A_{33}$			-30ρ	$-15\rho^{-1}$	$-6\rho^{-1}$	$30\rho^{-1}$	15ρ
4	$B_{11} B_{12} B_{13}$	A_{11}		$B_{11} B_{12} B_{13}$			10	0	$-2\rho^{-2}$	0	0
5	$B_{21} B_{22} B_{23}$	$-A_{21} A_{22}$		$B_{21} B_{22} B_{23}$			0	0	0	10	0
6	$B_{31} B_{32} B_{33}$	$-A_{31} A_{32} A_{33}$		$B_{31} B_{32} B_{33}$			30\rho	0	$6\rho^{-1}$	$15\rho^{-1}$	-15\rho
7	$C_{11} C_{12} C_{13}$	$D_{11} -D_{12} -D_{13}$	A_{11}	$C_{11} C_{12} C_{13}$			10	0	$-8\rho^{-2}$	0	0
8	$C_{21} C_{22} C_{23}$	$-D_{21} D_{22} D_{23}$	$-A_{21} A_{22}$	$C_{21} C_{22} C_{23}$			0	0	0	10	0
9	$C_{31} C_{32} C_{33}$	$-D_{31} D_{32} D_{33}$	$A_{31} -A_{32} A_{33}$	$C_{31} C_{32} C_{33}$			-15ρ	$15\rho^{-1}$	$6\rho^{-1}$	$-30\rho^{-1}$	0
10	$D_{11} D_{12} D_{13}$	$C_{11} -C_{12} -C_{13}$	$B_{11} -B_{12} B_{13}$	$D_{11} D_{12} D_{13}$	A_{11}		5	0	$2\rho^{-2}$	0	0
11	$D_{21} D_{22} D_{23}$	$-C_{21} C_{22} C_{23}$	$-B_{21} B_{22} -B_{23}$	$D_{21} D_{22} D_{23}$	$A_{21} A_{22}$		0	0	0	5	0
12	$D_{31} D_{32} D_{33}$	$-C_{31} C_{32} C_{33}$	$B_{31} -B_{32} B_{33}$	$D_{31} D_{32} D_{33}$	$-A_{31} -A_{32} A_{33}$		15ρ	0	$-6\rho^{-1}$	$-15\rho^{-1}$	0

$$F^A = (T_{x1}/a, T_{y1}/b, P_1, \dots)^T \quad u^A = (a \theta_{x1}, b \theta_{y1}, w_1, \dots)^T$$

である。

ここで仮想仕事の原理を用いて計算すると

$$K^A = (C^{-1})^T \left\{ \iint B^T D B dx dy \right\} C^{-1}$$

が得られる。

曲げモーメント、ねじりモーメントの計算には、つぎの式を用いる。

$$M = DBC^{-1}u^A = E^A u^A, \quad E^A = DBC^{-1}$$

長方形要素に対する K^A と E^A の値を表-1, 2 に示す。これは O.C. Zienkiewicz の与えたものであるが、われわれは HITAC 5020 を用いて詳細に追跡し、誤りがないことを確かめた。

表-2 $M = (1/ab)E^A u^A$ における E^A の値

$$\begin{aligned} m_1 &= 2D_x, \quad m_1' = 4D_x, \quad m_4 = 2D_{xy}, \quad m_7 = 6p^{-1}D_1, \quad m_{10} = 2p^{-1}D_{xy}, \\ m_2 &= 2D_y, \quad m_2' = 4D_y, \quad m_5 = 6p^{-1}D_x, \quad m_8 = 6pD_1, \quad m_{11} = m_5 + m_8, \\ m_3 &= 2D_1, \quad m_3' = 4D_1, \quad m_6 = 6pD_y, \quad m_9 = 2pD_{xy}, \quad m_{12} = m_6 + m_9, \end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$-m_3'$	m_1'	m_{11}	$-m_3$	0	$-m_8$	0	m_1	$-m_5$	0	0	0
2	$-m_2'$	m_2'	m_{12}	$-m_2$	0	$-m_6$	0	m_2	$-m_7$	0	0	0
3	m_{10}	$-m_9$	$-m_4$	0	m_9	m_4	$-m_{10}$	0	m_4	0	0	$-m_4$
4	m_3	0	$-m_8$	m_3'	m_1'	m_{11}	0	0	0	0	m_1	$-m_5$
5	m_2	0	$-m_6$	m_2'	m_2'	m_{12}	0	0	0	0	m_2	$-m_7$
6	0	$-m_9$	$-m_4$	m_{10}	m_9	m_4	0	0	m_4	$-m_{10}$	0	$-m_4$
7	0	$-m_1$	$-m_5$	0	0	0	$-m_3'$	$-m_1$	m_{11}	$-m_3$	0	$-m_8$
8	0	$-m_2$	$-m_7$	0	0	0	$-m_2$	$-m_2'$	m_{12}	$-m_2$	0	$-m_6$
9	m_{10}	0	$-m_4$	0	0	m_4	$-m_{10}$	$-m_9$	m_4	0	m_9	m_4
10	0	0	0	0	$-m_1$	$-m_5$	m_3	0	$-m_8$	m_3'	$-m_1'$	m_{11}
11	0	0	0	0	$-m_2$	$-m_7$	m_2	0	$-m_6$	m_2'	$-m_2'$	m_{12}
12	0	0	$-m_4$	m_{10}	0	m_4	0	$-m_9$	m_4	$-m_{10}$	m_9	$-m_4$

なお、等分布荷重の作用する場合を考えてみよう。いままで、外力は節点に作用する集中荷重（モーメントを含む）としてきたが、板要素に等分布荷重が作用する場合には、これを節点に作用する集中荷重になおすか、または、つぎのような方法がある。

要素に作用する等分布荷重と等価な nodal force N^A を考えると、仮想変位 $\delta u^A = I$ によってなされる仕事は

$$W_N = (\delta u^A)^T N^A = N^A \quad (I: \text{単位行列})$$

等分布荷重 q による仕事は

$$W_D = \iint (\delta w)^T q dx dy$$

$$\begin{aligned} w &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3\}^T A \\ &= LA = LC^{-1}u^A \end{aligned}$$

$$\delta w = LC^{-1}\delta u^A = LC^{-1}$$

したがって、

$$N^A = \iint (LC^{-1})^T q dx dy$$

N^A は 12 の項をもつベクトルとなり、等分布荷重のかわりに節点に作用させる外力となる。

これを長方形要素（横 a 、縦 b ）について計算すると、つぎようになる。

$$N^A = q \left\{ \begin{aligned} &-\frac{ab^2}{24}, \frac{a^2b}{24}, \frac{ab}{4}, \frac{ab^2}{24}, \frac{a^2b}{24}, \frac{ab}{4}, \\ &-\frac{ab^2}{24}, -\frac{a^2b}{24}, \frac{ab}{4}, \frac{ab^2}{24}, -\frac{a^2b}{24}, \\ &\frac{ab}{4} \end{aligned} \right\}^T$$

a, b が小さければ、各節点に集中荷重 $qab/4$ を作用させるだけで近似できる。

4. 板の曲げの問題の解析

節点に作用する外力を N 、それによる変位を u とすると、

$$N = \{N_i, \dots\}^T, \quad u = \{u_i, \dots\}^T$$

ここで、 N, u は前と同じように三つの成分をもつ。

全体の構造物に対する stiffness matrix を T とすると、

$$N = Tu$$

行列 T の要素は、節点に近接している要素の stiffness の要素を加えたもので、つぎようになる。

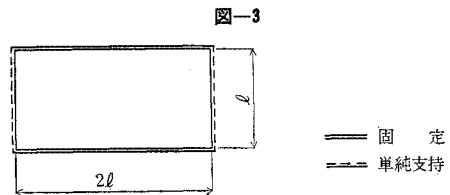
$$T_{ij} = \sum_{A=1,2,\dots} k_{ij}^A$$

ここで、 k_{ij}^A は要素 A の stiffness matrix の要素

境界条件により不用となる変位に相当する行、列を行列 T よりぬき出し、その行列の逆行列を計算すれば、外力による各節点の変位が得られる。 $M = E^A u^A$ の式に、各要素の変位を代入して計算すると、節点の曲げモーメント、ねじりモーメントなどが得られる。

5. 計算例 No. 1

図-3 のような、相対する 2 辺固定、他の 2 辺単純支



2	4		
1	3	6	
		5	



持の長方形板の中央点のたわみ、曲げモーメント M_x , M_y を計算しよう。

変形が対称であるので、板の 1/4 のみを考えるとよい。

(1) 2×2 分割の場合

境界条件は、点 1, 2, 4 でつぎのようである。

$$\text{点 1 : } \theta_{x1} = w_1 = 0$$

$$\text{点 2 : } \theta_{x2} = \theta_{y2} = w_2 = 0$$

$$\text{点 4 : } \theta_{x4} = \theta_{y4} = w_4 = 0$$

点 3 については、この点を中心として対称であるから、

$$\text{点 3 : } \theta_{x3} = \theta_{y3} = 0$$

したがって、変位の未知数は θ_{y1} と w_3 のみである。

荷重状態については、等分布荷重を節点に作用する集中荷重になおして考えるものとする。板の 1/4 の部分に作用する全荷重は $q \cdot (2l) \cdot (l/4) = ql^2/2$ である。これを、1~4 の四つの節点に等分すると $ql^2/8$ となる。したがって、 $P_3 = ql^2/8$ となる。

未知数は θ_{y1}, w_3 のみであるので、stiffness matrix のうち、第 2 行第 2, 9 列と、第 9 行第 2, 9 列の要素のみを残し、他はすべて 0 とすると、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{15ab} \begin{bmatrix} 20D_x + 8p^2D_{xy} & & & \\ & -30p^{-1}D_x - 6pD_{xy} & & \\ & & -30p^{-1}D_x - 6pD_{xy} & \\ & & & 60p^{-2}D_x + 60p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b\theta_{y1} \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

$a=l, b=l/2, p=a/b=2$, 等方性板の場合を考え、 $D_x = D_y = D, D_1 = \nu D, D_{xy} = 0.5(1-\nu)D, \nu = 0.3$ とすれば

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ ql^2/8 \end{Bmatrix} = \frac{2D}{15l^2} \begin{bmatrix} 31.2 & -19.2 \\ -19.2 & 293.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1}l/2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

これを解いて、

$$w_3 = 0.00333 ql^4/D, \theta_{y1} = 0.00410 ql^3/D$$

となる。 M_{x3} は行列 E^A の第 7 行と w_3, θ_{y1} を用いて、つぎのように計算できる。

$$\begin{aligned} M_{x3} &= (1/ab) \{ (6p^{-1}D_x + 6pD_1)w_3 - 2D_x(\theta_{y1} \cdot l/2) \} \\ &= (2D/l^2) (6.6w_3 - \theta_{y1} \cdot l) = 0.0358 ql^2 \end{aligned}$$

M_{y3} は E^A の第 8 行と w_3, θ_{y1} とを用いて、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} M_{y3} &= (1/ab) \{ (6pD_y + 6p^{-1}D_1)w_3 - 2D_1(\theta_{y1} \cdot l/2) \} \\ &= (2D/l^2) (12.9w_3 - 0.3\theta_{y1} \cdot l) = 0.0835 ql^2 \end{aligned}$$

(2) 2×4 分割の場合

境界条件、変形の対称条件より未知数は $\theta_{y1}, \theta_{y3}, w_3, w_5$ の四つとなる。また、荷重状態は $P_3 = ql^2/8, P_5 = ql^2/16$ となる。この場合の stiffness matrix は、1-2-3-4 要素、3-4-5-6 要素のものを加えたもので、(18×18)の行列となる。この行列より、未知数に対応する要素をぬき出し、残りの行列に $p=1, D_x = D_y = D, D_1 = 0.3\nu D, D_{xy} = 0.35D (\nu=0.3)$ を代入すると、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ ql^2/8 \\ ql^2/16 \end{Bmatrix} = \frac{4D}{15l^2} \begin{bmatrix} 22.8 & 9.3 & -32.1 & 0 \\ 9.3 & 45.6 & 0 & -32.1 \\ -32.1 & 0 & 316.8 & -68.4 \\ 0 & -32.1 & -68.4 & 158.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \cdot l/2 \\ \theta_{y3} \cdot l/2 \\ w_3 \\ w_5 \end{Bmatrix}$$

これを解いて、

$$w_3 = 0.00235 ql^4/D, w_5 = 0.00278 ql^4/D$$

$$\theta_{y3} = 0.00280 ql^3/D, \theta_{y1} = 0.00548 ql^3/D$$

M_{x5} の計算には、 E^A の第 7 行と θ_{y3}, w_5, w_3 とを用いて、

$$\begin{aligned} M_{x5} &= \{ -2D_x \cdot b\theta_{y3} - 6p^{-1}D_x \cdot w_3 \\ &\quad + (6p^{-1}D_x + 6pD_1) \cdot w_5 \} / ab \\ &= (4D/l^2) (-l \cdot \theta_{y3} - 6w_3 + 7.8w_5) \\ &= 0.0191 ql^2 \end{aligned}$$

同様に、 E^A の第 8 行と θ_{y3}, w_3, w_5 から、

$$M_{y5} = 0.0665 ql^2 \text{ を得る。}$$

以上をとりまとめると、中心点のたわみ、曲げモーメントはつぎのようになる。

	たわみ (ql^4/D)	$M_x (ql^2)$	$M_y (ql^2)$
2×2 分割	0.00333	0.0358	0.0835
2×4 分割	0.00278	0.0191	0.0665
Timoshenko	0.00260	0.0142	0.0420

文献 5) では、周辺固定の正方形板が等分布荷重満載の場合について、2×2, 4×4, 6×6, 8×8 分割の計算を行っている。本文では、異なる計算例を示したものである。

6. 板の振動の解析

等分布荷重 q のかわりに、板に働く動的な荷重 $m\dot{w}$ (m : 板の要素の質量, $\dot{w} = \partial^2 w / \partial t^2$) を考えると、この荷重と等価な nodal force V^A は、

$$V^A = \iint (LC^{-1})^T m \dot{w} dx dy$$

さて、

$$\dot{w} = LC^{-1}(\ddot{u}^A)$$

であるから、

$$V^A = [(C^{-1})^T \iint L^T m L dx dy] C^{-1} \ddot{u}^A$$

これをつぎのようにおく。

$$V^A = M^A \ddot{u}^A, M^A = (C^{-1})^T \iint L^T m L dx dy C^{-1}$$

M^A を質量行列 (mass matrix) という。これを表 3 に示す。

構造物全体の mass matrix, stiffness matrix を $[M], [K]$ とする。外力の作用しない場合、

表-3 MASS MATRIX M^A ($p=a/b$)

A_{11}			$80 p^{-2}$		
A_{21}	A_{22}		-63	$80 p^2$	
A_{31}	A_{32}	A_{33}	-461 p^{-1}	461 p	3454
B_{11}	B_{12}	B_{13}	-60 p^{-2}	42	274 p^{-1}
B_{21}	B_{22}	B_{23}	-42	40 p^2	199 p
B_{31}	B_{32}	B_{33}	-274 p^{-1}	199 p	1226
C_{11}	C_{12}	C_{13}	40 p^{-2}	-42	-199 p^{-1}
C_{21}	C_{22}	C_{23}	42	-60 p^2	-274 p
C_{31}	C_{32}	C_{33}	-199 p^{-1}	274 p	1226
D_{11}	D_{12}	D_{13}	-30 p^{-2}	28	116 p^{-1}
D_{21}	D_{22}	D_{23}	28	-30 p^2	-116 p
D_{31}	D_{32}	D_{33}	-116 p^{-1}	116 p	294

注: mass matrix の最初の3列のみを示す。
他の4~12列については表-1の表現と同様である。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

が成立する。行列 $[M^{-1}K]$ の固有値、固有ベクトルが求められると、振動の問題は容易に解析される。

7. 計算例 No.2

図-4のような周辺固定の正方形板の固有振動数を求めよう。図のように 2×2 分割にすると、未知数は w_3 のみであるから、 $[M], [K]$ の(9,9)要素をぬき出すと、

$$\frac{mab}{25200} \cdot 3454 \cdot \ddot{w}_3 + \frac{1}{15ab} (60 p^{-2} D_x + 60 p^2 D_y + 30 D_1 + 84 D_{xy}) w_3 = 0$$

ここで、 $a=l/2$, $b=l/2$, $p=a/b=1$, 等方性板 $\nu=0.3$ として、 $D_x=D_y=D$, $D_1=0.3D$, $D_{xy}=0.35D$ を代入して、

$$\frac{3454}{25200} \cdot \frac{ml^2}{4} \cdot \ddot{w}_3 + \frac{158.4}{15} \cdot \frac{4D}{l^2} \cdot w_3 = 0$$

$$\therefore \ddot{w}_3 + 1232.7(D/ml^4) \cdot w_3 = 0$$

さて、正規振動をする場合を考え、円振動数を p とおけば、 $\ddot{w}_3 = -p^2 w_3$ となる。したがって、これを代入して、

$$mp^2 l^4 / D = 1232.7$$

標準的な表現にするために、両辺を π^4 で割って

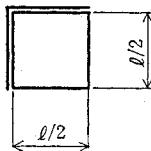
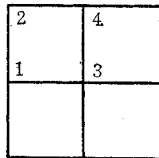
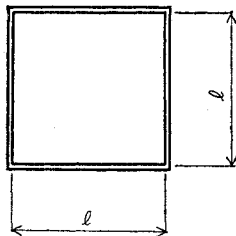
$$mp^2 l^4 / \pi^4 D = 1232.7 / \pi^4 = 12.68$$

この値の正しいのは 13.2948 (友近の値) である。

この計算では 2×2 分割で、未知数が w_3 一つであるために、matrix表示は使わなくてもすんだのである。

さて、第6,7章は文献7)に取り扱われていたことが想像されたが、Journal of Mechanical Engineering

図-4



Sciences が、わが国では、都立大、東北大、日本大、東洋大、九大の図書館にしかない。したがって、われわれで独自に表-3をつくりあげ、数値計算を行なってみた。執筆後、九大山崎教授のご好意で文献のコピーを送ってもらって調べたところ、表-3は文献7)で求められているのと全く一致し、また、数値計算例の 2×2 分割の場合は全く一致していた。

これは、文献7)の著者がイギリスの South Wales and Monmouthshire 大学の機械工学教室の方で Zienkiewicz の流儀をくんでいるし、著者も同様の流儀で計算したから、当然のことである。

8. 板の安定の解析

板の中央面に作用する応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ による potential energy V_s は、つぎのようになる。

$$V_s = \frac{t}{2} \iint \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix} = GA = GC^{-1} u^A$$

とすると、

$$V_s = \frac{t}{2} \iint (GC^{-1} u^A)^T \sigma (GC^{-1} u^A) dx dy$$

$$= (u^A)^T \left\{ \frac{t}{2} \iint (C^{-1})^T G^T \sigma GC^{-1} dx dy \right\} u^A$$

となる。

$$V_s = (1/2) (u^A)^T K^A u^A$$

とすると、

$$K^A = t \iint (C^{-1})^T G^T \sigma GC^{-1} dx dy$$

となる。 K^A を安定係数行列 (stability coef. matrix) という。

ひずみエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \iint \chi^T M dx dy = \frac{1}{2} \iint (BC^{-1} u^A)^T D BC^{-1} u^A dx dy$$

$$= \frac{1}{2} (u^A)^T K^A u^A$$

板要素の全ポテンシャルエネルギーは

$$V = U + V_s = \frac{1}{2} (u^A)^T K^A u^A + \frac{1}{2} (u^A)^T K^A u^A$$

$$= \frac{1}{2} (u^A)^T [K^A + K^A] u^A$$

構造物全体の stability coefficient matrix を K' とすると、

$$|K + K'| = 0$$

の条件より、座屈応力が求められる。

参考までに、 $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ の場合の K^A を計算すれば、表-4 のようである。

表-4 STABILITY COEFFICIENT MATRIX K^A

A_{11}	$12p^{-3}$	$p-a < b$
$A_{21} A_{22}$	0	$56p$
$A_{31} A_{32} A_{33}$	$-66p^{-2}$	42
$B_{11} B_{12} B_{13}$	$-9p^3$	0
$B_{21} B_{22} B_{23}$	0	$28p$
$B_{31} B_{32} B_{33}$	$-39p^{-2}$	21
$C_{11} C_{12} C_{13}$	$-12p^{-3}$	0
$C_{21} C_{22} C_{23}$	0	$-14p$
$C_{31} C_{32} C_{33}$	$66p^{-2}$	-42
$D_{11} D_{12} D_{13}$	$9p^{-3}$	0
$D_{21} D_{22} D_{23}$	0	$-7p$
$D_{31} D_{32} D_{33}$	$39p^{-2}$	-21

注: stability coefficient matrix の最初の 3 列のみを示す。第 4~12 列については、表-1 の表現と同様である。

9. 計算例
No. 3

図-5 の四辺固定の正方形板が一方向から圧縮応力を受けた場合の座屈応力を求めよう。

この場合も、振動の場合と同様、 2×2 分割するものとする。

K^A の (9,9) 要素は、

$$\sigma_x \cdot t \cdot (552b / 1260a)$$

K^A の (9,9) 要素は、

$$(60p^{-2}D_x + 60p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy}) / 15ab$$

である。ここに、 t : 板厚、 $\sigma_x = -\sigma$ (圧縮応力であるから)、 $a=b=l/2$ 、 $p=a/b=1$ 、 D_x, D_y, D_1, D_{xy} は等方性板の場合には、 $D_x=D_y=D, D_1=0.3D, D_{xy}=0.35D$ とおけば

$$-\sigma \cdot t \cdot \frac{552}{1260} + \frac{4}{15l^2} \cdot 158.4D = 0$$

これより、

$$\sigma_{cr} = 96.417(D/t \cdot l^2) = 9.78(\pi^2 D/t \cdot l^2)$$

この正しい値は 10.08 である。そう大きな誤差はない。

なお、文献 10) には stability coef. matrix が示されているが、これは R.J. Melosh の式によっている。本文では、表-1, 2 が Zienkiewicz 式によっているため、これと調子をあわすべく、特別に計算したものであ

て、文献 10) よりのそのままの引用ではない。

10. 参考文献

Finite Element 法に関する参考文献をあげると、つぎのようである。

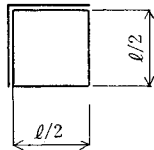
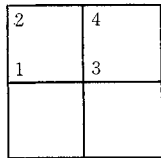
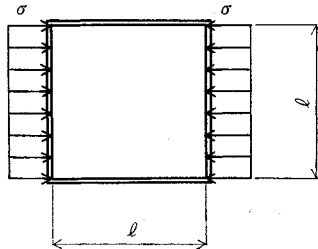
- 1) M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp : Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aeron. Sci., 23 (1956), pp. 805~823.
- 2) R.W. Clough : The finite element in plane stress analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburg, Pa., September 1960, pp. 345~378.
- 3) R.J. Melosh : A Stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending, J. Aeron. Sci., 28 (1961), pp. 34~42.
- 4) R.J. Melosh : Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method, J. Am. Inst. Aero. Astro., 1 (1963), pp. 1631~1637.
- 5) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung : The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Inst. Civil Engrs., 28 (1964) pp. 471~488.
- 6) T.H.H. Pian : Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, J. Am. Inst. Aero. Astro., 2(1964), pp. 1333~1336.
- 7) D.J. Dawe : A finite element approach to plate vibration problems, J. Mech. Engng Sci., 7 (1965), pp. 28~32.
- 8) R.W. Clough : The finite element method in structural mechanics in "Stress analysis", John Wiley & Sons, Ltd., London 1965, pp. 85~119.
- 9) R.T. Severn, P.R. Taylor : The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed, Proc. Inst. Civil Engrs, (1966), pp. 153~170.
- 10) K.K. Kapur, B.J. Hartz : Stability of plates using the finite element method, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, April, 92 (1966), EM 2, pp. 177~195.

Newcastle upon Tyne で 1966 年 7 月に開催されたシンポジウムでは、この方法に関する論文が、Session No. 3 の合計 19 のうち、6 編を占めていた。これらをあげるとつぎのようである。

- 11) Harald Hansteen, Finite element displacement analysis of plate bending based on rectangular elements.
- 12) F. Sawko, R.J. Cope : The use of finite elements for the analysis of right bridge decks.
- 13) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung : Plate and shell problems Finite element displacement approach.
- 14) M. Flower, R.T. Severn, P.R. Taylor : Static and dynamic analysis of plates and shells using the finite element method.
- 15) Helge Ramstad, Ivar Holand : The finite element method for analysis of skew plates in bending by use of parallelogram elements.
- 16) B.M. Irons : Numerical integration applied to finite element methods.

本文では、長方形要素を説明したが、三角形要素、平

図-5



行四辺形要素については、8),9),13),15)などで述べられている。振動の問題は7),14)に座屈の問題は10)で述べられている。その他、応力分布を仮定して stiffness matrix を導くものが6),9)で取り扱かれている。

11. あとがき

Finite Element 法は 1960 年 Clough 教授が発表して以来、数年にして確固たる地歩を構造解析学に占めた感じがある。このような空気の中で、O.C. Zienkiewicz と Y.K. Cheung が The Finite Element Method in という著書を McGraw Hill から出すそうである(10月現在未入手)。また、Clough 教授が 10月31日、日本鋼構造協会主催のもとに、“The Finite Element Method in Structural Mechanics” という演題で講演されることになっている。これら2つを通じ、この研究

の機運が高まることを祈ってやまない。

ここに示した計算例は、内容を了解してもらい意味で、手計算でも可能な 2×2 または、2×4 分割のものに限ったが、Finite Element 法は、本来、電子計算機の助けなしには演算不可能である。

さらに、ここでは、長方式の場合に限ったが、平行四辺形、三角形も可能であり、三角形の場合を応用すれば、ほとんどの場合の解析が可能である。

(1966.10.28・受付)

追記 上記の1.書物は刊行された。2. R.W. Clough 一派による The Finite Element Method in Structural Mechanics というコースが、カリフォルニア大学の Univ. Extension の仕事として、1967.3.20~3.24 Berkeley で開かれた。このコースの講義はいずれ出版されるものと思う。(1967.5.3)

鹿島研究所出版会 専門分野別在庫目録

土木・都市・建設経営・施工管理

〈図書目録呈〉

新刊

- 地域社会と都市
都市開発講座<全3巻>① A5判300頁 ¥ 980
- 都市問題概説
磯村英一・黒沼稔共著 A5判260頁 ¥ 950
- 建築用シーリング材の選び方と使い方
波多野一郎他著 A5判250頁 ¥ 1,200
- 病院の地域化
ブリッチマン著 谷村秀彦訳 A5判200頁予 ¥ 1,500

土木一般

- 土木年鑑1967 ¥ 3,500
- 現場技術者のための土質工学 ¥ 2,500
- 道路と景観—景観工学への序説— ¥ 760
- 土地造成 ¥ 1,000
- 軟弱粘土の圧密
—新圧密理論とその応用— ¥ 750
- 鉄筋コンクリートの耐久性 ¥ 430
- アーチダム ¥ 2,400

- 基礎反力の解法(重版出来) ¥ 400
- 山口昇博士論文選集 ¥ 1,000
- 高速道路計画論 ¥ 2,400
- 都市住宅(SD臨時増刊) ¥ 500
- 建設機械手帳1967年版 ¥ 300
- トンネル施工の問題点と対策 ¥ 1,300

建設工学シリーズ

- 軟弱地盤における建築の
地下掘削工法 ¥ 590
- 井筒基礎 ¥ 450
- 簡易索道の計画と設計(重版出来) ¥ 980
- 荷役・運搬の計画と設計 ¥ 1,200
- アースドリル基礎工法(重版出来) ¥ 600
- 構造物基礎の応力調整工法 ¥ 580
- 道路土工の調査から設計施工まで ¥ 1,300
- シールド工法 ¥ 1,600
- 水底トンネル ¥ 840
- 爆破—付ANFO爆薬— ¥ 900

都市計画

- 都市問題事典 ¥ 3,500
- 駐車場の計画と設計 ¥ 2,500
- 新都市の計画 ¥ 2,500
- 都市の自動車交通 ¥ 4,800
- 新しい都市の未来像(重版出来) ¥ 920
- フランスの都市計画 ¥ 900
- 都市の新しい運輸計画 ¥ 750

- オランダの総合開発計画 ¥ 2,000
- 敷地計画の技法 ¥ 1,600
- 東京2,000万都市の改造計画 ¥ 1,500
- 都市の土地利用計画 ¥ 3,200

建設経営・施工管理

- 新しい工程管理(重版出来)
—PERT・CPMの理論と実際— ¥ 1,300
- 建設業成功の秘訣 ¥ 680
- 工事原価管理(重版出来) ¥ 650
- 新版ジョイント・ベンチャー ¥ 480
- 国際ジョイント・ベンチャー
(重版出来) ¥ 1,500
- 工事入手から未収金回収まで ¥ 480
- 工事管理(重版出来) ¥ 800
- 創造工学による設計手順(重版出来) ¥ 700
- 創造工学による技術予測 ¥ 700
- 建設経営入門 ¥ 750

建設業経営選書<全13巻>

- 建築の施工計画 ¥ 750
- 建設業経営における
電子計算機の利用(重版出来) ¥ 700
- 建設請負の法律実務(重版出来) ¥ 700
- 建設業の経理(重版出来) ¥ 750
- 建築の施工管理 ¥ 750
- 建設業の原価管理 ¥ 750
- 建設業の企画と調査 ¥ 750
- 土木の見積と工程管理 ¥ 980

鹿島研究所出版会

■ 東京都港区赤坂六丁目5-13 電話(582)2251 振替東京180883