

論 文 紹 介

今月は論文集第134号(41年10月発行) 登載論文としてつぎの4編を紹介いたします。今月紹介した論文に対する討議は42年4月20日まで受付けます。次号では第135号(41年11月発行) 登載予定論文として下記の5編を紹介いたします。

多谷虎男・猿田園彦：レール継目部応力の三次元光弾性実験

市原松平・古川 清：土圧計の検定に関する実験的研究

渡辺 明：プレテンション工法における鋼線の摩擦係数およびその測定法に関する研究

中村英夫・柴田正雄：道路透視図作製の新しい方法

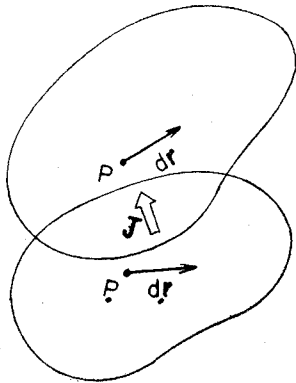
上田年比古・崎山正常：海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透

変形の表現について

佐 武 正 雄

変形の大きい場合にも適用できる連続体の変形の表現について述べたものである。変形の大きい一いわゆる有限変形の場合には、変形を表現する量も多様となってくるが、それらの量の定義や相互関係などについて記し、その力学的意味を明確にして弾性法則や塑性法則などの構成の基礎を与えようとしたものである。従来、大きい変形を取り扱う場合でも微小変形の場合のひずみが主として用いられ、力学法則についても微小変形の場合の形式的拡張が多く行なわれてきたように思われる。正しい力学法則を確くためには、まず変形の各種の表現のもつ特性を十分把握し、合理的に使用することが必要であろう。微小変形の場合についても、従来同一視されている諸量を区別して用いるならば、力学法則の正しい理解が得られるものと考えられる。

図-1



ここでは本文に述べたことがらのうち、重要な2,3の点を抄録する。なお、テンソルの記法としては、簡便な symbolic 記法を主として用いる。

1. 変換テンソル J

変形前の物体内の1点に考えた任意の方向の線素 dr が変形により dr' に変化するとき

$$dr' = dr \cdot J \quad \dots\dots\dots(1)$$

によって、変換テンソル J を定義する。 J は変形の記述の基礎となるもので、 J を用いると変形による面素 dS 、体素 dV の変換は

$$dS = dS_0 \cdot {}_0J \left({}_0J = \frac{1}{2} J \times \times J \right) \dots\dots\dots(2)$$

$$dV = dV_0 |J| \left(|J| = \frac{1}{6} (J \times \times J) \cdot J \right) \dots\dots\dots(3)$$

と記すことができる (subscript 0 は変形前のものであることを示す)。

2. 無限小変換テンソル $(D\Phi)$

線素 dr の変化の速度を示すため、変形のパラメーターによる微分を D で示し

$$D(dr) = dr \cdot (D\Phi) \dots\dots\dots(4)$$

によって、無限小変換テンソル $(D\Phi)$ を定義する。 $(D\Phi)$ と J との間には

$$(D\Phi) = J^{-1} \cdot DJ \dots\dots\dots(5)$$

の関係がある。 $(D\Phi)$ から一つの状態テンソル Φ を求めることはつねに可能であるとは限らない。すなわち、 $(D\Phi)$ はつねに積分可能とは限らず、一般に

$$\oint (D\Phi) \neq 0 \dots\dots\dots(6)$$

である。この意味で $(D\Phi)$ はカッコを付して記すのである (このことは後述の $(D\epsilon)$ についても同様)。しかし、 $(D\Phi)$ が積分可能で、しかもその積分 Φ (初期条件 $\Phi = 0$ をみたとす) と $D\Phi$ とが可換である場合には、 $\exp \Phi$ を定義し

$$J = \exp \Phi \dots\dots\dots(7)$$

と記すことができる。斉1次変形はこの一例である。

3. ひずみの定義

ひずみの symbolic 表現としては、つぎの3種類 $\epsilon, \epsilon, (D\epsilon)$ を考えることができる。

$$ds^2 - ds_0^2 = dr \cdot dr' \cdot 2\epsilon = dr dr' \cdot 2\epsilon \dots\dots\dots(8)$$

$$D(ds^2) = dr dr' \cdot 2(D\epsilon) \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 ds は線素 dr の長さである。 ϵ は変形前の状態を基準に、 ϵ は変形後の状態を基準にひずみを測ったもので、それぞれ第1種、第2種有限ひずみと呼ぶ。 $(D\epsilon)$ は変形の過程の各瞬間におけるひずみの増分を示し、ひずみ増分また無限小ひずみと呼ばれている。定義から容易に

$$\epsilon = \frac{1}{2} (J^{-1} \cdot J - I) \dots\dots\dots(10)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (I - J^{-1} \cdot {}^t J^{-1}) \dots\dots\dots(11)$$

$$(D\epsilon) = \frac{1}{2} \{ J^{-1} \cdot DJ + {}^t (J^{-1} \cdot DJ) \} = (D\Phi)_{sym} \dots\dots\dots(12)$$

の関係が得られる。式(12)によれば、 $(D\Phi)$ を対称部分と交代部分とに分解し

$$(D\Phi) = (D\epsilon) - \frac{1}{2}I \times (DW) \dots \dots \dots (13)$$

と記すことができる。ここに、 (DW) は無限小回転ベクトルである。

4. J の分解, 変形テンソル

J は対称テンソルであるとは限らないが、 $J \cdot {}^t J$ は正値対称テンソルとなり、 $\mathring{M} \cdot \mathring{M} = J \cdot {}^t J$ (記号的に $\mathring{M} = \sqrt{J \cdot {}^t J}$) と記せば、

$$J = \mathring{M} \cdot R \dots \dots \dots (14)$$

と分解することができる。ここに、 \mathring{M} は純粋に変形を示す対称テンソル、また R は回転を示す直交テンソルとなる。この分解は可換ではないが、同様に $M = \sqrt{{}^t J \cdot J}$ とおき

$$J = R \cdot M \dots \dots \dots (15)$$

の分解を与えることもできる。 \mathring{M} , M をそれぞれ第1種、第2種変形テンソルと呼ぶ。有限変形の弾性法則を組立てる場合などは、この \mathring{M} を用いるのが便利である。また \mathring{M} と、 \mathring{M} の増分 $D\mathring{M}$ とが可換で $\log \mathring{M}$ が定義可能の場合 (この場合を第1種変形と称す) には、式 (14) の J の分解と式 (13) の $(D\Phi)$ の分解との間に

$$(D\epsilon) = {}^t R \cdot D(\log M) \cdot R \dots \dots \dots (16)$$

$$(DW) = R \cdot \times DR \dots \dots \dots (17)$$

等の関係が成り立つ。

本文では、第1種変形の例として“単純曲げ変形”について説明する。 \mathring{M} と $D\mathring{M}$ とが可換とならないものを第2種変形と呼び、この場合の取扱いは複雑となる。

(1965.12.2・受付)

[筆者：正会員 工博 東北大学助教授 工学部]

補正エネルギー法による直線材 構造物の弾塑性解析

山崎徳也・太田俊昭・石川信隆

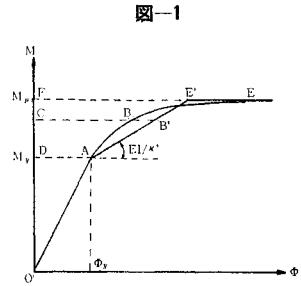
1. ま え が き

本論文は鋼構造物の弾塑性挙動を解明するため、まずエネルギー等置法を用いて塑性領域における $M-\phi$ 曲線を $M-\phi$ 近似直線で置換したうえで、補正エネルギーの実用式を弾性と同じ簡単な M の2次式として誘導し、ついで変分原理いわゆる Complementary Minimum Principle を適用して弾塑性領域におけるエネルギー法の実用化を試み、各種静定ばりを対象とする弾塑性解析を行なって、厳密解あるいは塑性解析との比較検討を行ない、その実用性を確認した。さらに“弾塑性たわみ角式”を導いて弾性解析におけるたわみ角法に準ずる不静

定構造物の弾塑性解析を可能ならしめた。

2. 補正エネルギー の実用式

一般に単位長さ当りの曲げ応力によって生ずる補正エネルギーは $\int \phi dM$ で定義され、図-1の $M-\phi$ 曲線における面積 OABC で



与えられる。いま弾塑性領域における非線形要素の主要因たる $M-\phi$ 曲線部 ABE を線型化するため、直線 AE' で置換すれば弾塑性領域における補正エネルギーは面積 OAB'C に相当するゆえ、結局次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{1}{2EI} [M^2 + (\kappa' - 1)(M - M_y)^2] \dots (1)$$

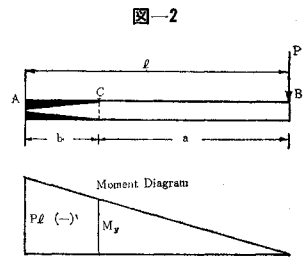
ゆえに

$$U = \int_{E+P} \frac{M^2}{2EI} ds + \kappa \int_P \frac{(M - M_y)^2}{2EI} ds \dots (2)$$

ここに、積分記号の添字 E および P はそれぞれはり外縁面での弾性領域および塑性領域の長さを示し、また $\kappa = \kappa' - 1$ で κ' は $M-\phi$ 近似直線の勾配を表わし、図-1の面積 OAEF と面積 OAB'E' とを等置することにより決定され、長方形断面では $\kappa' = 4$ となる。

3. 誤差の検討

各種荷重に対する静定ばり弾塑性解析を行なったが、ここでは図-2のごとき片持ばりの B 点に集中荷重 P が作用した場合の同点の



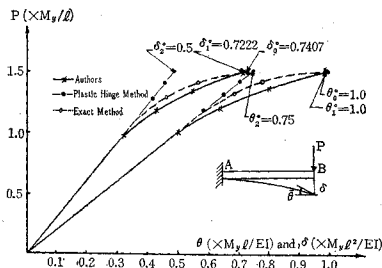
たわみおよびたわみ角を求め、その算法の一例を示すことにする。すなわち式 (2) に変分原理を適用して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\partial U}{\partial P} \\ &= \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{\kappa}{EI} \left[\frac{P}{3}(l^3 - a^3) + \frac{M_{yc}}{2}(l^2 - a^2) \right] \\ \theta_1 &= \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_{M_B=0} \\ &= \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{\kappa}{EI} \left[\frac{P}{2}(l^2 - a^2) + M_{yc}(l - a) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $M_{yc} = -M_y$, $a = M_y/P$

図-3に式 (3) のたわみおよびたわみ角と荷重との関係を示し、厳密解および塑性解析による算定結果も併記して比較検討を行ないきわめて高精度をえた。

図-3



4. 弾塑性たわみ角式の誘導

図-4 に示すごとき弾塑性部材 AB を考え、A,B 両端より a, b の範囲に塑性領域が生ずるものとすれば、部材全体に貯えられる補正エネルギーは式(1)より次式となる。

$$U = \int_A^B \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa \int_A^C \frac{(M - M_{ya})^2}{2EI} dx + \kappa \int_D^B \frac{(M - M_{yb})^2}{2EI} dx \dots (4)$$

ここに、 M_{ya} , M_{yb} は C および D 点の降伏曲げモーメント。

図-4 より任意点の曲げモーメントは次式で示される。

$$M = \frac{l-x}{l} M_{AB} - \frac{x}{l} M_{BA} + M_0(x) \dots (5)$$

ただし、 $M_0(x)$ は AB 材を単純ばりで見做したときの荷重による任意点の曲げモーメントを表わす。

式(4)に式(5)を代入して変分原理を適用すれば両端 A, B における切線角 τ_A , τ_B が算出され、これをたわみ角 θ と部材角 R とに置換したのち、連立に解いて M_{AB} , M_{BA} を求めると所要の弾塑性たわみ角式がつぎのごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(\alpha_{AB}\phi_A + \beta_{AB}\phi_B) + \tau_{AB}\psi_{AB} + \xi_a M_{ya} + \xi_b M_{yb} + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{AB}(\alpha_{BA}\phi_B + \beta_{BA}\phi_A) + \tau_{BA}\psi_{AB} + \eta_a M_{ya} + \eta_b M_{yb} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ここに、形状項 $\alpha, \beta, \tau, \xi, \eta$ はそれぞれ a, b の値によって定まる係数で本文に数表化して実用に便ならしめた。

さらに部材の両端および途中で塑性領域が生ずる場合も同様に誘導でき、本文に算出した。

5. 不静定構造物の弾塑性解析法

本たわみ角式を用いることにより、多層多スパンの長方形ラーメンや連続ばりなどの弾塑性解析が可能となるが、その解法骨子は慣用の弾性たわみ角法と類似で、各節点における節点方程式および層方程式を用いて未知たわみ角および未知部材角と同数の方程式をうるとともに、塑性領域範囲を示す a, b などの未知数に対しては弾塑性境界条件式としての曲げモーメントの適合条件式、たとえば図-4における塑性部分の先端 C および D 点の算出曲げモーメントが降伏曲げモーメント M_{ya} , M_{yb} に等しかるべき条件より

$$\left. \begin{aligned} M_{ya} &= +M_y = \frac{l-a}{l} M_{AB} - \frac{x}{l} M_{BA} + M_0(a) \\ M_{yb} &= -M_y = \frac{b}{l} M_{AB} - \frac{l-b}{l} M_{BA} + M_0(l-b) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

が成立し、これが領域未知数 a および b に対応するわけで結局未知数と同数の方程式がえられることになるが、その算法はくり返し試算を必要とする。

(1965.12.1 および 1966.1.17・受付)

山崎：正 会員 工博 九州大学教授 土木工学科
太田：学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科学生
石川：学生会員 工修 同

主桁のねじり剛性を考慮した任意の形状の格子桁の解法

小松 定夫・大山 峰

本研究は、一般にねじり剛性を有する主桁と横桁とが斜交する任意形状の格子桁の解析を行ない、数値計算例として台形に開いた単純格子桁を解き、直角格子桁に対する偏角の影響について調べたものである。

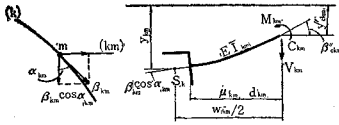
主桁がねじり剛性をもつ格子桁は、主桁 N 本、横桁 ρ 本するとき、横桁の midpoint で切断して基本形を作ることにより、不静定量として横桁の midpoint において、せん断力およびモーメントが存在するから $2\rho(N-1)$ 次の不静定構造物となる。以下に取り扱う格子構造様式はつぎの仮定を満足するものとする。

1) 横桁のねじり剛性を無視する。2) 横桁は直線材である。3) 横桁はすべての主桁と剛結している。

一般に横桁 (km) に対して主桁 k が偏角 α_{km} 、主桁 $k+1$ が偏角 α_{k+1m} で剛結する場合、横桁の midpoint C_{km} で切断した場合、つぎのつりあい条件式が成り立つ。

$$Y_{ckm}' = Y_{k+1m} + \frac{W_{km}}{2} \beta_{k+m} \cos \alpha_{k+1m} - \left[\frac{V_{km}(1-\mu_{km})^2 d_{km}^3}{3EI_{km}} - \frac{M_{km}(1-\mu_{km})^2 d_{km}^2}{2EI_{km}} \right]$$

(a) 主桁 k と横桁 km の変形図



$$\beta_{ckm}' = \beta_{k+1m} \cos \alpha_{k+1m} - \frac{V_{km}(1-\mu_{km})^2 d_{km}^2}{2EI_{km}} - \frac{M_{km}(1-\mu_{km})d_{km}}{EI_{km}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$y_{ckm}'' = y_{km} - \frac{W_{km}}{2} \beta_{km} \cos \alpha_{km} + \frac{V_{km}\mu_{km}^2 d_{km}^3}{3EI_{km}} - \frac{M_{km}\mu_{km}^2 d_{km}^2}{2EI_{km}} \beta_{ckm}'' = \beta_{km} \cos \alpha_{km} - \frac{V_{km}\mu_{km}^2 d_{km}^2}{2EI_{km}} + \frac{M_{km}\mu_{km}d_{km}}{EI_{km}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

断面 C_{kn} における連続条件は $y_{ckn}'' = y_{ckn}'$, $\beta_{ckn}'' = \beta_{ckn}'$ であるから式 (1), (2) より

$$y_{k+1n} - y_{kn} + \frac{W_{kn}}{2} (\beta_{k+1n} \cos \alpha_{k+1n} + \beta_{kn} \cos \alpha_{kn}) = \frac{V_{kn}d_{kn}^3}{3EI_{kn}} \{\mu_{kn}^3 + (1-\mu_{kn})^3\} + \frac{M_{kn}d_{kn}^2}{2EI_{kn}} \{(1+\mu_{kn})^2 - \mu_{kn}^2\} \beta_{k+1n} \cos \alpha_{k+1n} - \beta_{kn} \cos \alpha_{kn} = \frac{V_{kn}d_{kn}^2}{2EI_{kn}} \{(1-\mu_{kn})^2 - \mu_{kn}^2\} + \frac{M_{kn}d_{kn}}{EI_{kn}} \quad \dots\dots\dots(3)$$

一方、主桁 k の横桁取付点 n における変形量はつぎのようになる。

$$y_{kn} = y_{kno} + \sum_{m=1}^{\infty} (V_{km} - V_{k-1m}) \delta_{knm} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ M_{km} - M_{k-1m} - \left(\frac{W_{km}}{2} V_{km} + \frac{W_{k-1m}}{2} V_{k-1m} \right) \right\} \times (\delta_{tknm} \cos \alpha_{kn} + \delta_{knm} \sin \alpha_{kn}) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\beta_{kn} = \beta_{kno} + \sum_{m=1}^{\infty} (V_{km} - V_{k-1m}) \phi_{knm} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ M_{km} - M_{k-1m} - \left(\frac{W_{km}}{2} V_{km} + \frac{W_{k-1m}}{2} V_{k-1m} \right) \right\} \times (\phi_{tknm} \cos \alpha_{kn} + \phi_{knm} \sin \alpha_{kn})$$

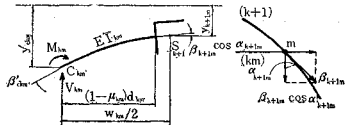
式 (3), (4) より、結局、つぎの行列が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}, \quad \therefore \begin{bmatrix} V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 A, B, C, D は係数行列、 V, M は横桁中点

図-1

(b) 主桁 $k+1$ と横桁 km の変形図



において生じる不静定量、 G, H は荷重項を示す。

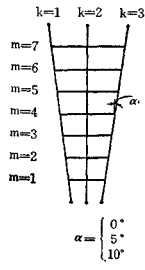
つぎに、第 k 主桁の格点 n における断面力および変形量はつぎのようになる。

$$S_{kn} = S_{k0} + [h_k i_k] \begin{bmatrix} V_{k-1} \\ M_{k-1} \end{bmatrix} + [k_k j_k] \begin{bmatrix} V_k \\ M_k \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 S_{k0} は基本形における第 k 主桁の外力による断面力または変形量、 h_k, i_k, k_k, j_k は係数行列、 V_k, M_k は第 k パネル横桁中点における断面力である。

数値計算例として図-2に示すような主桁3本、横桁7本の単純支持直角格子桁および5°, 10° 偏角した台形格子桁を考え、載荷点格点における断面力および変形量の影響面を求めた。計算結果の一例を図-3, 4に示す。

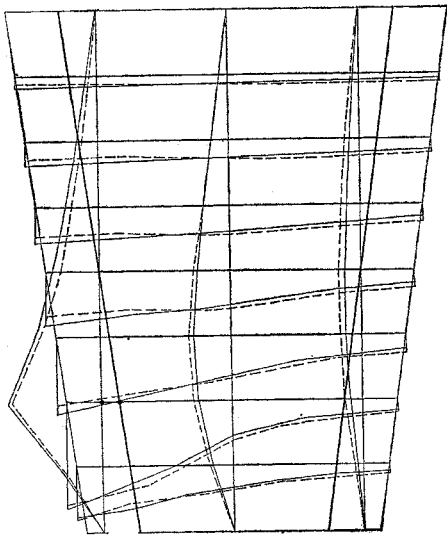
図-2 数値計算例に用いた格子桁の形状



以上の数値計算結果より偏角 α の影響について考察すれば以下のようなものである。

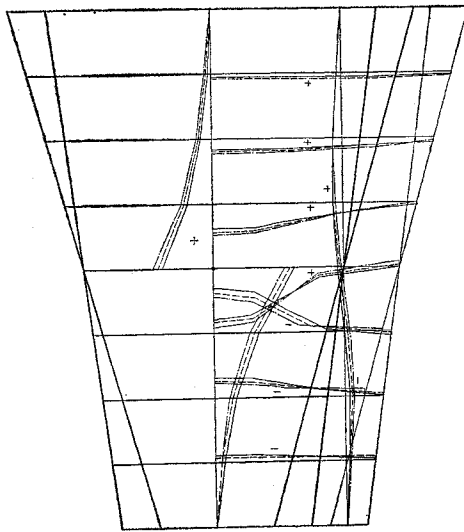
図-3 格点 (1, 2) における曲げモーメントの影響面

(—— $\alpha=0^\circ$ - - - - $\alpha=10^\circ$)



曲げモーメント int の縮尺
876543210 × 10³ kg-cm

図-4 格点(2, 4)におけるせん断力の影響面
 (—— $\alpha=0^\circ$ - - - - $\alpha=5^\circ$ ——— $\alpha=10^\circ$)



せん断力 int の縮尺
 $876543210 \times 10^3 \text{ kg}$

- 1) 主桁格点の曲げモーメントの影響面については、 α の影響は端主桁よりも中間主桁の方が著しい。
- 2) せん断力の影響面については、端断面では大差ないが、スパン中央に近づくにつれて α の影響が著しい。
- 3) スパン中央におけるたわみの影響面は大差ない。

本研究では、数値計算例として台形に開いた単純支持格子桁のみを取り扱ったが、本理論はさらに、桁間隔の異なる曲線格子桁、斜交格子桁およびこれらの連続形式にまで適用できるものである。

(1966.1.31・受付)

小松：正会員 工博 大阪大学教授 工学部
 大山：正会員 工修 KK橋梁設計事務所

工業用水計画における水量・水質配分について

合田 健・末石富太郎・住友 恒

本論文は、限られた水源から工業用水需要地における水量・水質上の種々の要求事項を満たしつつ、合理的に用水を取得配分するための計画法について、実用化に主眼をおきながらくわしく論じたものである。問題をモデル化するにあたっては、水量・水質に関する要求事項を数式によって表現し、これを制約式とし、一方この工業用水の取得に要する総用水経費を水量と水質の関数として表現した。これらの制約式を満たしつつ、総用水経費を最小化することを目標として、水量水質配分の最適条件を見出すことを試み、ここに得られる解によって合理的計画法を決定する方法を示した。本計画法の特徴は、用水取得計画に水質条件をくわしく取り入れることにより、従来の用水取得における水質上のむだをはぶき、同時に総用水経費の最小化をはかったこと、計画に影響をおよぼしうる種々の因子の微少変化にとまらぬ総用水経費の変化量すなわち限界費用を求め、これによって各因子に対する一つの価値付けを行なって、水源における水量・水質制御の方向などを正確に把握しうるようにしたこと、数学的モデル化によって得られる数値解の意義を検討して、実際解との誤差の程度を推定し、この計画法自からの精度を簡単に検討したこと、および検討方法を極力簡単にして実用化するために、2, 3の近似解法をも示したことなどである。最後に実際計算例を示し、現在実施されている工業用水配分計画が大幅に合理化される可能性のあることを述べた。

(1966.1.21・受付)

合田：正会員 工博 京都大学教授 衛生工学科
 末石：正会員 工博 京都大学助教授 同
 住友：正会員 京都大学助手 同

1966年水工学シリーズ

A. ダム・河川コース B5判 220 ページ 定価：1200円(〒100円)

内容：河川の不安定流について／林 泰造■流 砂／椿東一郎■河川の蛇行について／井口昌平■ダム洪水吐の水理設計／安芸周一■粘性流体(血液流動と Grouting の水理)／伊藤 剛■河道設計法／土屋昭彦■河川の乱流現象／日野幹雄■水資源計画論／西川 喬■河川流出に関する諸問題／石原安雄■地下密度流／嶋 祐之■

B. 海岸・港湾コース B5判 232 ページ 定価：1300円(〒100円)

内容：高潮問題／篠原謹爾■河口処理について／富永康照■津 波／梶浦欣二郎■港湾工作物の水理的諸問題／伊藤喜行■海岸施設に関する2,3の問題について／渡部弥作■密度流の諸問題／岩崎敏夫■海岸侵食論／岩垣雄一■波圧論／永井莊七郎■漂 砂／佐藤昭二

申込先：東京都新宿区四谷1丁目 土木学会へ