

# 吊橋の耐風安定性に関する研究

— 迎角  $0^\circ$  の風に対するフラッター限界風速 —

山本 宏\*・笠口 展 宏\*\*  
坂田 弘\*\*・西谷 晴 光\*\*\*

## 1. まえがき

周知のように、吊橋は他の形式の橋梁にくらべて剛性が小さいので、強風や地震によって揺れやすく、補剛桁の設計が適当でなければ、空力弾性的に不安定現象をおこす。わが国のような台風常襲地帯では、耐風安定性の問題は重要である。わずかに  $19 \text{ m/sec}$  の風速で激しい振動をおこして落橋した Tacoma Narrows 橋をはじめ、風による被害を受けた吊橋は多いが、その原因としては、

- (1) 自然風の息づき現象
- (2) カルマン渦の発生による強制振動
- (3) 気流中に発生する特定の周期の渦による選択振動
- (4) Negative Slope Theory
- (5) フラッター

(6) 山陰等にある場合のパフェッティング的なもの等が考えられている。いずれにしても励振力としては空気力が作用するわけで、空気力の作用方法・大きさ等がわかれば、振動方程式を解くことによって一応解明できるはずである。筆者らは、上記第5項の原因に着目して試験研究を行なった。

風によって構造物が受ける空気力は、構造物の形状・構造・風の迎角などによって定まるが、これを推定することは非常に困難であって、模型実験によらざるを得ない。まして気流中で振動する構造物に作用する空気力（非定常空気力）ではなおさらのことである。この空気力の測定方法については、従来から二、三の方法が用いられているが、筆者らは、2次元模型により非定常空気力を直接とりだし、これを用いて2次元模型実験を併用して、吊橋耐風安定性の問題を調べた。

しかし、このような2次元の検討では、吊橋の橋軸方向の質量分布、幾何学的空気力学的振動モードが入らない。したがって3次元の検討を行なっておく必要がある。航空機の翼のフラッター計算では、3次元の検討の際にも、空気力としては2次元模型で得られた非定常空気力を使ってよいと一般にいわれているが、吊橋の場合にも、この考えを適用することができるかどうかを3次元模型実験を併用して検討した。

以下は、これらの結果の報告であるが、大別して、非定常空気力の測定、フラッター計算と実験について述べる。

なお、ここでは迎角  $0^\circ$ （すなわち水平風）の場合を取り扱う。

## 2. 非定常空気力の測定

吊橋は剛性が小さいので、風の作用によって振動を開始する。振幅が大きかったり、時間とともに振幅が増加していく傾向にある場合が危険である。Tacoma Narrows 橋の落橋の原因として追求された理論的観点をまとめると、

- (1) Negative Slope Theory
- (2) Flutter Theory
- (3) Vortex Theory

であるが、Negative Slope Theory は二、三の問題があり、うまく説明できないようである。

Flutter Theory で説明しようとしたのが、Steinman Bleich である。風による吊橋の振動を調べるには、外力である空気力を知る必要がある。Steinman は空気力を求めるために、一様直線流れの中で振動する物体を、同様な流れの中で静止させて実験しようとして、物体に適当な曲率をつけている。Bleich は、Theodorsen による平板の振動状態の空気力の理論値を吊橋の場合に修正し、半実験的に修正係数を求めている。

\* 正会員 九州工業大学助教授 開発土木教室

\*\* 三菱重工業KK長崎研究所

\*\*\* 正会員 三菱重工業KK広島研究所

Farquharson は、模型の振動を風洞中で観察し、それを相似則によってストローハル数と関係づけ、実橋の風による振動現象を調べようとした。ストローハル数を重視しているため、Vortex Theory の立場に立つといわれる。

一方、わが国では、東大平井教授は2次元模型を風洞気流中にスプリングで支持し、これに振動を与えて振動の減衰波形から非定常空気力を求められた。また、九大河島教授は、航空機の場合に気流中で2次元翼模型を強制振動して、Strain gauge によって非定常空気力を取り出されている。

ここでは、河島教授の強制加振法を用いて、2次元模型により非定常空気力を求める。

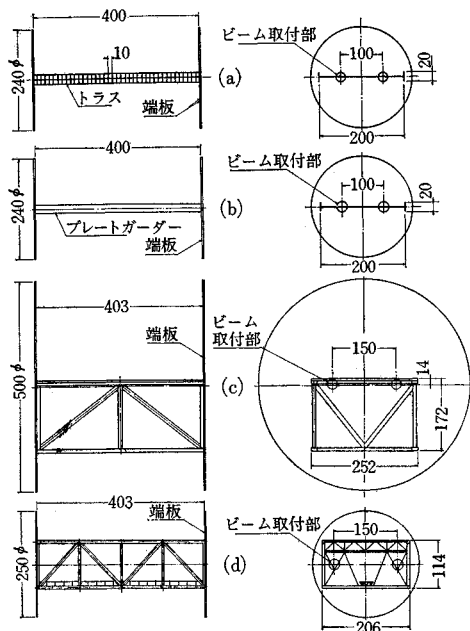
### (1) 計測装置

上記のように、吊橋2次元模型を密閉風路中で、上下加振機構と回転加振機構ととりつけて、模型を強制振動させ、Strain gauge により空気力を計測する。文献9) に述べたので、ここでは詳細は省略する。

### (2) 模型

非定常空気力を求めた模型を図-1 に示す。(a) はトラス型補剛桁を単純化したもので T 形と呼ぶ。(b) はプレート ガーダー形式のもので PG 形、(c)、(d) はトラス形のもので図示のような断面のもの、それぞれ、TS 形、TC 形と呼ぶことにする。

図-1 非定常空気力計測用模型  
(a-T 型、b-PG 型、c-TS 型、d-TC 型)



### (3) 非定常空気力

2. (1), (2) によって非定常空気力を求める。吊橋が空気力の作用でフラッターを開始する場合、一般には上下振動(たわみ振動)と回転振動(ねじれ振動)とが連成するが、連成振動の場合の空気力は、純上下振動と純回転振動の場合の空気力の重ね合わせで近似的に表わされると仮定する。したがって、以下の実験データは、純上下と純回転の振動を別々に行なったときの空気力である。空気力は、つぎの方法で無次元化した。

$$L_h = \pi \rho b^2 \omega^2 h_0 l C_{Lh} \dots \dots \dots (1)$$

$$L_\alpha = \pi \rho b^3 \omega^2 \alpha_0 l C_{L\alpha} \dots \dots \dots (2)$$

$$M_h = \pi \rho b^3 \omega^2 h_0 l C_{Mh} \dots \dots \dots (3)$$

$$M_\alpha = \pi \rho b^4 \omega^2 \alpha_0 l C_{M\alpha} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $L_h, L_\alpha$  は上下振動と回転振動時に模型に作用する揚力で、上下方向の弾性軸の変位  $h$  とともに下向きが正。また、 $M_h, M_\alpha$  は上下と回転振動時の縦揺れモーメントで、迎角  $\alpha$  とともに頭上げ方向を正とする(図-2)。 $l$  は模型のスパン長、 $b$  は幅員の 1/2、 $h_0, \alpha_0$  はそれぞれ上下振動と回転振動の振幅、 $\omega$  は振動数、 $\rho$  は空気密度である。なお、この場合の振動は単弦振動で

図-2 力の向きと変位の向き

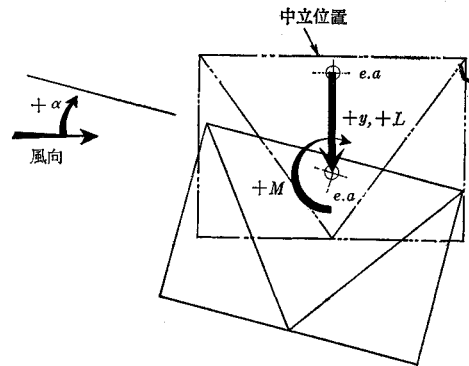
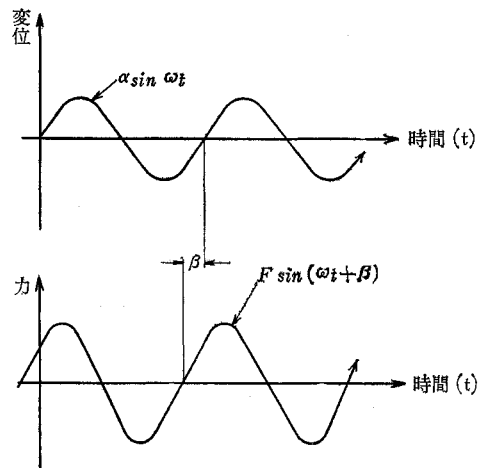


図-3 変位と力の関係



あるが、変位と力の関係は図-3のようになる。振幅を  $a$ 、円振動数を  $\omega$  とすれば、

$$\text{変位} = a \cdot \sin \omega t \dots\dots\dots (5)$$

力は  $\beta$  だけ位相が進んでいるので、大きさを  $F$  とすれば、

$$\text{力} = F \cdot \sin (\omega t + \beta) \dots\dots\dots (6)$$

となる。この  $F$  が、(1)~(4) の  $|L_h|$ 、 $|L_a|$ 、 $|M_h|$ 、 $|M_a|$  に相当する。式(6)の力を複素表示すると、

$$\text{力} = F_R + iF_I \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $F = \sqrt{F_R^2 + F_I^2}$ 、 $\beta = \tan^{-1} \frac{F_I}{F_R}$

式(1)~(4)の  $C_{Lh}$  などを式(7)の複素表示で表わせば、

$$\left. \begin{aligned} C_{Lh} &= [C_{Lh}]_R + i [C_{Lh}]_I \\ C_{La} &= [C_{La}]_R + i [C_{La}]_I \\ C_{Mh} &= [C_{Mh}]_R + i [C_{Mh}]_I \\ C_{Ma} &= [C_{Ma}]_R + i [C_{Ma}]_I \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

図-4 TS型模型の  $|C_{Lh}|$ 、 $|C_{La}|$ 、 $|C_{Ma}| \sim k$  の関係

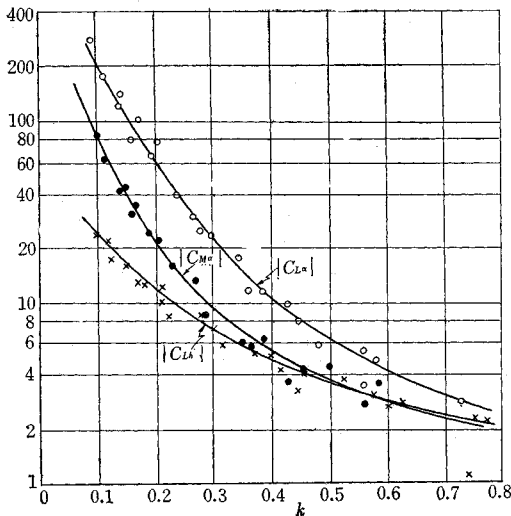


図-5 TS型模型の  $|C_{Mh}| \sim k$  の関係

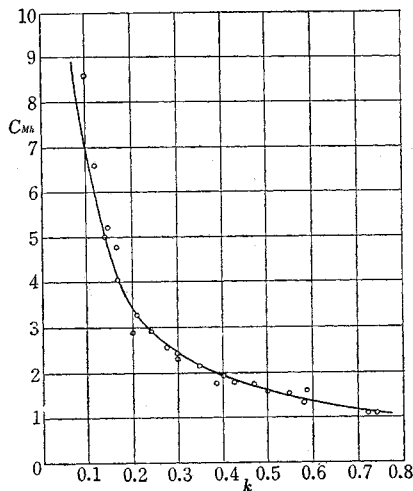


図-4~7には、模型で計測した  $|C_{Lh}|$ 、 $|C_{La}|$ 、 $|C_{Mh}|$ 、 $|C_{Ma}|$ 、 $\beta$  と  $k$  の関係のうち、TS型のものを示す。ただし、 $k$  は Reduced Frequency と呼ばれる量で、強制加振振動数(またはフラッター振動数)を  $\omega$  rad/s、模型(または実橋)の幅員の1/2を  $bm$ 、風速を  $V$  m/s とすると、次式で表わされる。

$$k = \frac{\omega b}{V} \dots\dots\dots (9)$$

図-6  $\beta^\circ \sim k$  の関係 (TS型の  $C_{Lh}$ 、 $C_{La}$ )

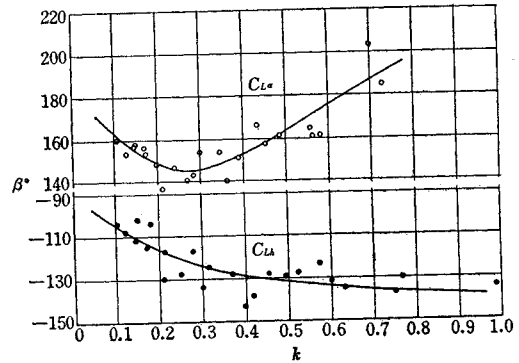
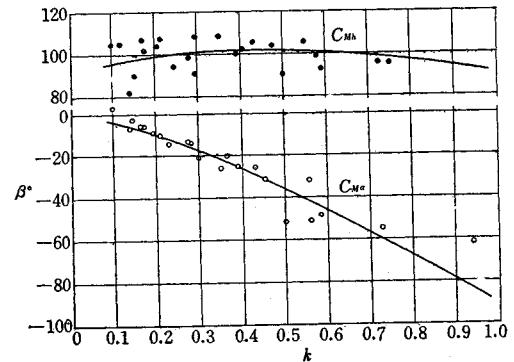


図-7  $\beta^\circ \sim k$  の関係 (TS型の  $C_{Mh}$ 、 $C_{Ma}$ )



### 3. 吊橋の2次元フラッター

以上の非定常空気を力を用いてフラッター計算を行なうが、計算値を実験で確かめるためにフラッター実験を行なった。

#### (1) フラッター実験

使用した実験装置は文献9)に示したので、ここでは特にふれない。フラッター実験に使用した模型は、非定常空気を計測した模型と形状寸法とも同じである。フラッター模型の支持金具類を含めた質量、慣性能率を表-1に示す。この模型を表-2に示す上下と回転の固有振動を与えるバネの組み合わせで支持する。また、減衰係数  $g$  を表-2に示す。このような状態で起こしたフラッター限界風速を表-3に示す。

表-1 2次元模型の質量と慣性能率

模型種類	質量 (kg・s <sup>2</sup> /m)	慣性能率 (kg・s <sup>2</sup> /m)
T 型	1.043	0.002680
PG 型	1.103	0.003273
TS 型	0.5360	0.003720
TC 型	0.4393	0.000590

表-2 模型の振動特性 (無風時)

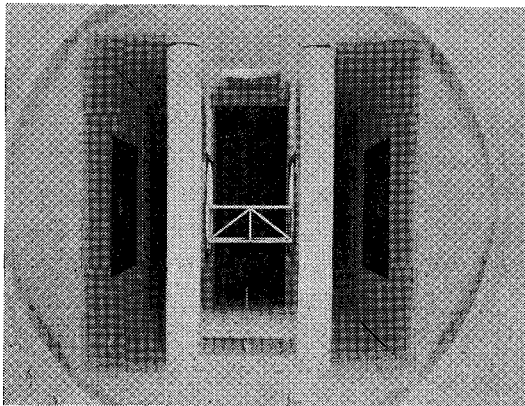
模型	組み合わせ	上下固有振動数 $\omega_h$ (rad/s)	上下減衰係数 $g_h$	回転固有振動数 $\omega_\alpha$ (rad/s)	回転減衰係数 $g_\alpha$
T型	Case 1	32.06	0.0170	50.24	0.0543
	Case 2	31.71	0.0158	45.53	0.0506
PG型	Case 1	14.50	0.0722	32.71	0.0442
	Case 2	31.40	0.0236	46.52	0.0213
	Case 3	31.21	0.0195	39.31	0.0406
TS型	Case 1	10.24	0.0235	12.44	0.1211
	Case 2	9.93	0.0208	16.78	0.0947
	Case 3	9.93	0.0313	23.69	0.1639
TC型	Case 1	11.06	0.0146	25.20	0.0864
	Case 2	15.52	0.0091	25.70	0.0769
	Case 3	11.22	0.0327	26.30	0.1013

表-3 模型のフラッター特性 (2自由度)

模型	組み合わせ	フラッター開始速度 $V_F$ (m/s)	$(V_F/b \omega_\alpha)_S$	フラッター停止速度 $V_F$ (m/s)	$(V_F/b \omega_\alpha)_E$ *
T型	Case 1	29.1	5.8	—	—
	Case 2	23.7	5.2	—	—
PG型	Case 1	12.5	3.81	8.42	2.57
	Case 2	9.22	1.98	7.80	1.68
	Case 3	10.9	2.78	8.57	2.18
TS型	Case 1	6.71	4.32	6.48	4.17
	Case 2	12.47 : 8.82	5.95 : 4.21	8.32	3.97
	Case 3	14.75 : 14.67	4.98 : 4.95	13.23	4.47
TC型	Case 1	21.82	8.45	20.55	7.96
	Case 2	18.8	7.14	18.5	7.03
	Case 3	25.1 : 23.3	9.33 : 8.66	22.6	8.40

注: ( )<sub>S</sub> はフラッター発生を示し, ( )<sub>E</sub> はフラッター停止を示す。

写真-1 2次元模型風洞実験



T 形と PG 形のフラッターの特長は, PG 形と同程度の振動特性の場合, T 形の方がフラッター速度が大きいこと, また突然激しいフラッターを起こし, 風速を少しでも下げればただちにフラッターが停止すること等である。

表-4 模型のフラッター特性 (1自由度)

模型	組み合わせ (上下振動固有)	フラッター開始速度 $V_F$ (m/s)	$(V_F/b \omega_\alpha)_S$	フラッター停止速度 $V_F$ (m/s)	$(V_F/b \omega_\alpha)_E$
PG型	Case 1	10.32	3.16	8.86	2.71
	Case 2	15.18	3.26	8.63	1.85
	Case 3	11.26	2.87	7.52	1.91

る。PG 形のフラッター開始速度は, 停止速度より若干大きい。また T 形は発散的な振動を行なうに反して, PG 形は定常振幅の振動を行ない, その振幅は速度を増すと大きくなる。PG 形の方は回転振動が優勢で, 上下振動が行なえぬように拘束した場合でも, フラッターを発生する。この場合の実験値を表-4 に示す。TS 形, TC 形は, T 形と PG 形の中間的な現象で, 上下と回転振動が連成したフラッターである。

## (2) フラッター計算

吊橋の部分模型は, その部分が弾性変形しないものと考えられ, 2次元模型といえる。2次元といえば, スパン方向に無限に長いものであるが, その一部を取りだし両端を端板と風路壁で仕切って気流の端をまわる流れを防止しているの, 流れの状態はほとんど2次元になる。この場合の2次元フラッターの計算式は,

$$M_0 \ddot{h} + \frac{M_0 \omega_h^2 g_h}{\omega} \dot{h} + M_0 \omega_h^2 h = \pi \rho b^3 \omega^2 \left( C_{Lh} \frac{h}{b} + C_{L\alpha} \alpha \right) \dots \dots \dots (10)$$

$$I \ddot{\alpha} + \frac{I \omega_\alpha^2 g_\alpha}{\omega} \dot{\alpha} + I \omega_\alpha^2 \alpha = \pi \rho b^4 \omega^2 \left( C_{Mh} \frac{h}{b} + C_{M\alpha} \alpha \right) \dots \dots \dots (11)$$

ただし,  $M_0$  は単位長さあたりの質量 (kg・s<sup>2</sup>/m/m),  $I$  は単位長さあたりの弾性軸まわりの慣性能率 (kg・m・s<sup>2</sup>/m),  $\omega_h$  は上下固有振動数 (rad/s),  $\omega_\alpha$  は回転固有振動数,  $\omega$  はフラッター振動数 (rad/s),  $g_h, g_\alpha$  はそれぞれ上下と回転振動の減衰係数である。付加質量の項は, 慣性力の項にくらべて小さいとして省略する。

フラッター時の振動は単弦振動であるとすれば,

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 \exp(i \omega t) \\ \alpha &= \alpha_0 \exp(i \omega t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

であるから, 式 (10)~(12) よりフラッター行列式は式 (14) のようになる。ただし,  $h_0, \alpha_0$  は複素表示の振幅で,

$$\left. \begin{aligned} \mu &= M_0 / \pi \rho b^2, \nu = I / \pi \rho b^4, \tau = (\omega_h / \omega_\alpha)^2 \\ x_1 &= (\omega_\alpha / \omega)^2 (1 + i g_h), x_2 = (\omega_\alpha / \omega)^2 (1 + i g_\alpha) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

である。

$$\begin{vmatrix} \mu(1 - \tau x_1) + C_{Lh} & C_{L\alpha} \\ C_{Mh} & \nu(1 - x_2) + C_{M\alpha} \end{vmatrix} = 0 \dots (14)$$

a) T 形模型のフラッター計算

式 (14) で,  $1-\tau x_1=X_1, 1-x_2=X_2 \dots\dots\dots(15)$

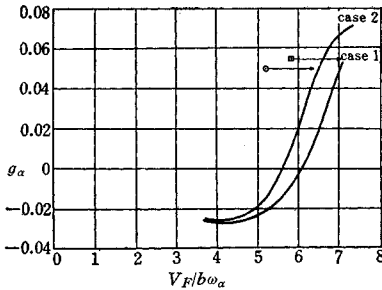
とおけば,

$$X_1=1-\tau(1-X_2), r=\tau(1+ig_h)/(1+ig_a) \dots\dots\dots(16)$$

となり, 式 (14) は,

$$\left[1-\tau(1-X_2)+\frac{C_{Lh}}{\mu}\right]\left[X_2+\frac{C_{M\alpha}}{\nu}\right]-\frac{C_{Mh}C_{L\alpha}}{\mu\nu}=0 \dots\dots\dots(17)$$

図-8 T 形模型フラッター計算値



となる。これを解くには、いわゆる U-g 法を用いる。計算結果と実験値は、図-8 のようになる。

b) PG 形模型のフラッター計算

PG 形のフラッター計算式は近似的に ( $k \geq 0.2$ ),

$$\left[X_1+\frac{C_{Lh}}{\mu}\right]\left[X_2+\frac{C_{M\alpha}}{\nu}\right]=0 \dots\dots\dots(18)$$

となり, これの解は文献 9) によって,

$$X_2=-C_{M\alpha}/\mu \dots\dots\dots(19)$$

で与えられる。PG 形は前記のように、回転振動が優勢な失速フラッターを発生するので、非定常空気力計測では、振幅を 2°, 4°, 8°, 10° に変化させた。これらの場合について式 (19) を計算したのが 図-9 である。

c) TS, TC 形模型のフラッター計算

同様に計算すると、図-10, 11 を得ることができる。

図-9 PG 型フラッター計算値および実験値

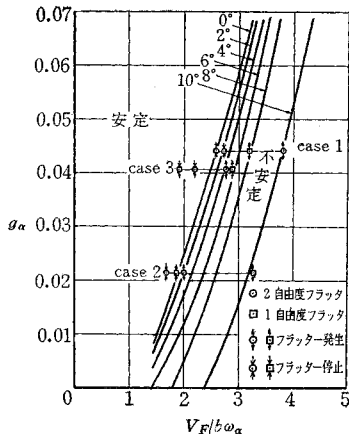


図-10 TS 型模型のフラッター計算値と実験値

Case 1, Case 2, Case 3

( $\dot{S}$  フラッター発生速度,  $\dot{E}$  フラッター停止)

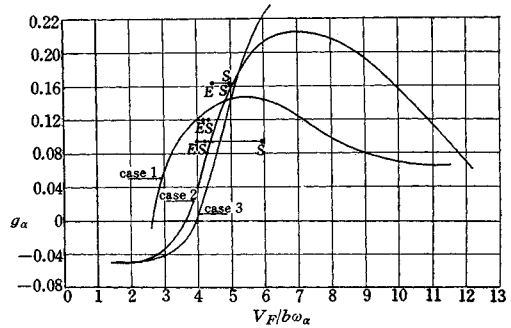
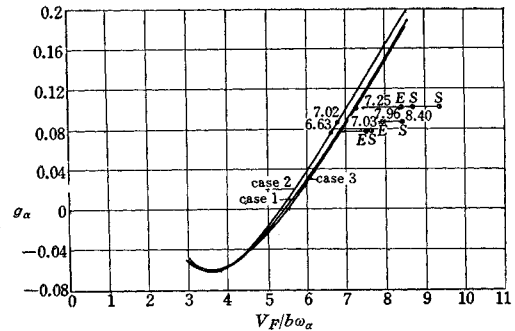


図-11 TC 型模型のフラッター計算値と実験値

Case 1, Case 2, Case 3

( $\dot{S}$  フラッター発生,  $\dot{E}$  フラッター停止, ● 計算値)



(3) 考 察

T, PG, TS, TC 形模型の計算値と実験値は、上記のように比較的よく一致している。これからみると、吊橋のフラッター現象を取り扱うには、非定常空気力を計測するのが有効であると考えられる。

4. 吊橋の 3 次元フラッター

3. に述べた 2 次元的検討では、吊橋の軸方向の質量分布、幾何学的空気力学的振動モードが入っていない。したがって、つぎに 3 次元的検討を行なう。すなわち、2 次元模型による非定常空気力と 3 次元フラッターの Strip Theory を用いて、3 次元模型(全経間模型)のフラッター理論への展開を図った。ここでは、TS 形模型に相似なものについて検討する。

(1) 模 型

このような実験を行なう場合、模型は相似則を満たさねばならない。しかし、ここで使用した風洞の最大風速以内でフラッターを発生させようとする、必ずしも相似則を満足するものとはすることができず、つぎの点で変

形模型にせざるを得なかった。すなわち、

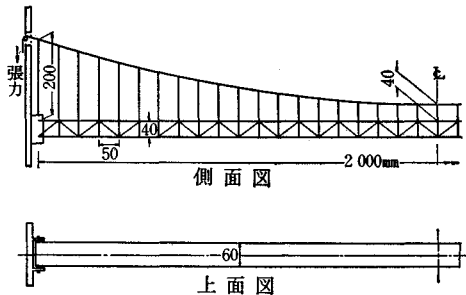
(1) 模型の補剛トラスの剛性を低くするため、下弦材、斜材はすべて途中を切断した。しかしトラスの形状はとどめている(したがって、全スパンにわたり剛性は上弦材によって保持されている)。

(2) 床板および縦桁は単純化して平板で代用。

(3) 上下および回転振動の振動数比を調節し、かつ減衰を適当な大きさにするために、上弦材に張力を導入する。

使用模型は 図-12 に示すが、全径間模型としては、塔および側径間の影響を考えねばならないが、ここではこれらの影響を無視して、中央径間のみを取り出した。

図-12 3次元(主径間)模型



(2) 模型の振動数計算と実験結果

吊橋の振動理論は Bleich によるエネルギー法解析があるので、これを参照して振動数とモードを計算する。減衰率は、風洞に模型を設置した状態で、自由減衰法により実験的に求めた。

さて、振動する吊橋の  $\xi$  次の上下振動の変位  $h(x, t)$ 、回転振動の変位  $\alpha(x, t)$  をつぎのように表わす。

$$\left. \begin{aligned} h(x, t) &= h_{\xi} f_{\xi}(x) \\ h_{\xi} &= h_{\xi 0} \exp [i \omega_{h \xi} t + \phi_{\xi}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x, t) &= \alpha_{\xi} F_{\xi}(x) \\ \alpha_{\xi} &= \alpha_{\xi 0} \exp [i \omega_{\alpha \xi} t + \theta_{\xi}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $f_{\xi}(x)$ 、 $F_{\xi}(x)$  は正規化した振動の変位曲線、 $\omega_{h \xi}$ 、 $\omega_{\alpha \xi}$  は  $\xi$  次の振動の円振動数、 $\phi_{\xi}$ 、 $\theta_{\xi}$  は各振動時の位相差である。

運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l I_{\alpha} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 dx \dots\dots\dots (22)$$

ひずみエネルギーは、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[ EI \int_0^l \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 dx + H_W \int_0^l \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{64 f^2 E_c A_c}{e^4 L_E} \left[ \int_0^l h dx \right]^2 + S \int_0^l \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 dx \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ GJ \int_0^l \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{b_e^2}{2} H_W \int_0^l \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{32 f^2 b_e^2 A_c E_c}{l^4 L_E} \left[ \int_0^l \alpha dx \right]^2 \right] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

式中、

$m$ : 単位長さあたりの質量

$I_{\alpha}$ : 単位長さあたりの弾性軸まわりの慣性モーメント

$$= r^2 m_s + \frac{b_e^2}{4} m_c$$

$r$ : 補剛桁の慣性回転半径

$m_s, m_c$ : それぞれ補剛桁とケーブルの単位長さあたりの質量

$EI, GJ$ : それぞれ補剛桁のたわみ剛性とねじり剛性

$E_c, A_c$ : それぞれケーブルの弾性係数と断面積

$L_E, f$ : それぞれケーブルの長さおよび垂距

$l$ : スパン長  $b_e$ : 両側吊材の間隔

$H_W$ : 死荷重によるケーブルの水平張力

$S$ : 模型の補剛桁に加えられた軸力

$$h = h(x, t), \alpha = \alpha(x, t)$$

である。また、 $h(x, t)$  のたわみが生じたときのケーブルの増加水平張力を  $H_c$ 、補剛桁の単位長さあたりの重量を  $W_s$  とするとき、吊橋のたわみ理論からつぎの関係がある。

$$\frac{H_c L_E}{A_c E_c} - \frac{W_s}{H_W} \int_0^l h dx = 0 \dots\dots\dots (24)$$

これらの式によって、Ritz の方法で計算すると表-5 の

表-5 3次元模型の振動特性

(a) 3次元模型の固有振動数(1次)

項目	上下振動数		回転振動数	
	対称	逆対称	対称	逆対称
実験値	10.6 c/s	8.8 c/s	9.8 c/s	10.5 c/s
計算値	11.3 c/s	8.6 c/s	9.7 c/s	13.6 c/s

(b) 3次元模型の対数減衰率

振動種類	対数減衰率* $\delta$
上下対称振動	0.0844
逆対称振動	0.0248
回転対称振動	0.1386
逆対称振動	0.1262

\*  $g = \delta/\pi$

(c) 上下、回転振動の変位曲線

振動種類	振動モード関数
上下対称	$f_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l} - 11.105 \sin \frac{3\pi x}{l}$
上下逆対称	$f_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}$
回転対称	$F_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$
回転逆対称	$F_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}$

表-6 3次元模型の諸元

項目	数値
質量(単位長さあたり) (kg・s <sup>2</sup> /mm)	0.0454
慣性モーメント(単位長さあたり、弾性軸まわり) (kg・s <sup>2</sup> /m)	0.701 × 10 <sup>-4</sup>
フラッター速度 (m/s)	13.1
空気密度 (kg・s <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> )	0.1200

結果を得る。表-6 は3次元模型の諸元である。

(3) フラッター計算

a) フラッター時の振動モード

フラッター時の変位曲線は、自由振動の変位曲線の重ね合わせで表わされるものとし、上下と回転振動の変位を、それぞれつぎのように表わす。

$$h(x, t) = \sum_{\xi} h_{\xi} f_{\xi}(x) \quad \dots(25)$$

$$\alpha(x, t) = \sum_{\xi} \alpha_{\xi} F_{\xi}(x) \quad \dots(26)$$

b) エネルギー

エネルギーは式 (22), (23) に記したが、つぎの記号を用いると、

$$k_{h\xi\xi} = EI \int_0^l [f_{\xi}''(x)]^2 dx + HW \int_0^l [f_{\xi}'(x)]^2 dx + \frac{64f^2 E_c A_c}{l^4} \left[ \int_0^l f_{\xi}(x) dx \right]^2 \dots(27)$$

$$k_{h\xi\eta} = EI \int_0^l [f_{\xi}''(x)] [f_{\eta}''(x)] dx + HW \int_0^l [f_{\xi}'(x)] [f_{\eta}'(x)] dx + \frac{64f^2 E_c A_c}{l^4} \left[ \int_0^l f_{\xi}(x) dx \right] \left[ \int_0^l f_{\eta}(x) dx \right] \dots(28)$$

( $\xi \neq \eta, \eta = 1, 2, 3, \dots$ )

$$k_{\alpha\xi\xi} = 2EY \int_0^l [F_{\xi}''(x)]^2 dx + 2 \left[ E\eta_0 b_e d + \frac{HWb_e^2}{4} \right] \int_0^l [F_{\xi}'(x)]^2 dx + \frac{2E_c A_c}{LE} \left( \frac{4fb_e^2}{l^2} \right) \left[ \int_0^l F_{\xi}(x) dx \right]^2 \dots(29)$$

$$k_{\alpha\xi\eta} = 2EY \int_0^l [F_{\xi}''(x)] [F_{\eta}''(x)] dx + 2 \left[ E\eta_0 b_e d + \frac{HWb_e^2}{4} \right] \int_0^l [F_{\xi}'(x)] [F_{\eta}'(x)] dx + \frac{2E_c A_c}{LE} \left( \frac{4fb_e^2}{l^2} \right) \left[ \int_0^l F_{\xi}(x) dx \right] \left[ \int_0^l F_{\eta}(x) dx \right] \dots(30)$$

( $\xi \neq \eta$ )

エネルギーはつぎのように表わすことができる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\xi} M_{\xi\xi} (\dot{h}_{\xi})^2 + \sum_{\substack{\xi, \eta \\ (\xi < \eta)}} M_{\xi\eta} \dot{h}_{\xi} \dot{h}_{\eta} + \frac{1}{2} \sum_{\xi} I_{\xi\xi} (\dot{\alpha}_{\xi})^2 + \sum_{\substack{\xi, \eta \\ (\xi < \eta)}} I_{\xi\eta} \dot{\alpha}_{\xi} \dot{\alpha}_{\eta} \dots(31)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\xi} k_{h\xi\xi} h_{\xi}^2 + \sum_{\substack{\xi, \eta \\ (\xi < \eta)}} k_{h\xi\eta} h_{\xi} h_{\eta} + \frac{1}{2} \sum_{\xi} k_{\alpha\xi\xi} \alpha_{\xi}^2 + \sum_{\substack{\xi, \eta \\ (\xi < \eta)}} k_{\alpha\xi\eta} \alpha_{\xi} \alpha_{\eta} \dots(32)$$

散逸関数  $D$  はつぎの形で表わすものとする。

$$D = \frac{\sum_{\xi} M_{\xi\xi} \omega_{h\xi}^2 \dot{h}_{\xi}^2 g_{h\xi}}{2\omega} + \frac{\sum_{\xi} I_{\xi\xi} \omega_{\alpha\xi}^2 \dot{\alpha}_{\xi}^2 g_{\alpha\xi}}{2\omega} \dots(33)$$

ただし、 $g_{h\xi}, g_{\alpha\xi}$  は、 $\xi$  次の自由振動における減衰係数

であり、 $M_{\xi\xi} = \int_0^l m [f_{\xi}(x)]^2 dx, I_{\xi\xi} = \int_0^l I_n [F_{\xi}(x)]^2 dx$  である。

また、

$$\eta_0 = \frac{b_e d}{\frac{\mu_V d^2}{A_V} + \frac{\mu_h b_e^2}{A_h}}, \quad \epsilon_V = \frac{b_e}{2} - \frac{\mu_V}{A_V} \eta_0 d$$

$$\epsilon_h = \frac{d}{2} - \frac{\mu_h}{A_h} \eta_0 b_e, \quad Y = I \epsilon_V^2 + I_h \epsilon_h^2$$

$I_h$  = 補剛桁の横方向断面2次モーメント

$$\mu_V = 1/\sin^2 r \cdot \cos r, \quad \mu_h = 1/2 \sin^2 r \cdot \cos r$$

$r$  = トラスの斜材が弦材となす角度

$A_h, A_V$  = それぞれ横構と補剛桁斜材の断面積

$d$  = トラス上下弦材の中心間距離

( $'$ ), ( $''$ ) は  $x$  に関する微分, ( $\dot{\phantom{x}}$ ) は  $t$  に関する微分である。

c) 一般力

フラッター時の振動変位を式 (25), (26) の形で表わせば、その場合に作用する空気力は、単位長さについて

$$L' = \pi \rho b^2 \omega^2 C_{Lh} h(x, t) + \pi \rho b^3 \omega^2 C_{La} \alpha(x, t) \dots(34)$$

$$M' = \pi \rho b^3 \omega^2 C_{Mh} h(x, t) + \pi \rho b^4 \omega^2 C_{Ma} \alpha(x, t) \dots(35)$$

となる。これから、一般座標が  $h_{\xi}$  あるいは  $\alpha_{\xi}$  ( $\xi = 1, 2, 3, \dots$ ) のときの一般力  $Q_{h\xi}, Q_{\alpha\xi}$  を求めると、

$$Q_{h\xi} = \int_0^l L' f_{\xi}(x) dx \quad (\xi = 1, 2, 3, \dots) \dots(36)$$

$$Q_{\alpha\xi} = \int_0^l M' F_{\xi}(x) dx$$

なお、空気力による付加質量は、構造物自体の質量、慣性性能率にくらべて小さいとして省略する。

d) フラッター行列式

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = Q_q \dots(37)$$

$$(q = h_{\xi}, \alpha_{\xi})$$

に式 (31), (32), (33), (36) を代入すると、

$h_{\xi}$  に関しては、

$$M_{\xi\xi} \ddot{h}_{\xi} + \sum_{\substack{\eta \\ (\eta \neq \xi)}} \Lambda_{\eta\xi} \dot{h}_{\eta} + \frac{M_{\xi\xi} \omega_{\eta\xi}^2 h_{\xi} g_{h\xi}}{\omega} + k_{h\xi\xi} h_{\xi} + \sum_{\substack{\eta \\ (\eta \neq \xi)}} k_{h\xi\eta} h_{\eta} = Q_{h\xi} \dots(38)$$

$\alpha_{\xi}$  に関しては、

$$I_{\xi\xi} \ddot{\alpha}_{\xi} + \sum_{\substack{\eta \\ (\eta \neq \xi)}} I_{\xi\eta} \dot{\alpha}_{\eta} + \frac{I_{\xi\xi} \omega_{\alpha\xi}^2 \alpha_{\xi} g_{\alpha\xi}}{\omega} + k_{\alpha\xi\xi} \alpha_{\xi} + \sum_{\substack{\eta \\ (\eta \neq \xi)}} k_{\alpha\xi\eta} \alpha_{\eta} = Q_{\alpha\xi} \dots(39)$$

となる。いま、

$$L_{h\xi\xi} = \int_0^l \pi \rho b^2 \omega^2 C_{Lh} [f_{\xi}(x)]^2 dx$$

$$\left. \begin{aligned} \pi h_{\xi\eta} &= \int_0^l \pi \rho b^2 \omega^2 C_{Lh} [f'_\xi(x)] [f_\eta(x)] dx \\ L_{\alpha\xi\xi} &= \int_0^l \pi \rho b^3 \omega^2 C_{L\alpha} [F'_\xi(x)] [f_\xi(x)] dx \\ L_{\alpha\xi\eta} &= \int_0^l \pi \rho b^3 \omega^2 C_{L\alpha} [f'_\xi(x)] [F_\eta(x)] dx \\ &\dots\dots\dots(40) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{h\xi\xi} &= \int_0^l \pi \rho b^3 \omega^2 C_{Mh} [F'_\xi(x)] [f_\xi(x)] dx \\ M_{h\xi\eta} &= \int_0^l \pi \rho b^3 \omega^2 C_{Mh} [F'_\xi(x)] [f_\eta(x)] dx \\ M_{\alpha\xi\xi} &= \int_0^l \pi \rho b^4 \omega^2 C_{M\alpha} [F'_\xi(x)]^2 dx \\ M_{\alpha\xi\eta} &= \int_0^l \pi \rho b^4 \omega^2 C_{M\alpha} [F'_\xi(x)] [F'_\eta(x)] dx \\ &\dots\dots\dots(41) \end{aligned} \right\}$$

とおくと、

$$Q_{h\xi} = L_{h\xi\xi} h_\xi + \sum_{(\eta \neq \xi)} L_{h\xi\eta} h_\eta + L_{\alpha\xi\xi} \alpha_\xi + \sum_{(\eta \neq \xi)} L_{\alpha\xi\eta} \alpha_\eta \dots\dots\dots(42)$$

$$Q_{\alpha\xi} = M_{h\xi\xi} h_\xi + \sum_{(\eta \neq \xi)} M_{h\xi\eta} h_\eta + M_{\alpha\xi\xi} \alpha_\xi + \sum_{(\eta \neq \xi)} M_{\alpha\xi\eta} \alpha_\eta \dots\dots\dots(43)$$

となる。さらに、フラッター時の振動は振動数  $\omega$  の単弦振動であるとする、

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_\xi &= i\omega h_\xi, \quad \dot{\alpha}_\xi = i\omega \alpha_\xi \\ \ddot{h}_\xi &= -\omega^2 h_\xi, \quad \ddot{\alpha}_\xi = -\omega^2 \alpha_\xi \\ \ddot{h}_\eta &= -\omega^2 h_\eta, \quad \ddot{\alpha}_\eta = -\omega^2 \alpha_\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

であるから、式 (36), (37) は、

$$\begin{aligned} &(k_{h\xi\xi} - \omega^2 M_{\xi\xi} - L_{h\xi\xi} + iM_{\xi\xi} \omega h_{\xi\xi}^2 g_{h\xi}) h_\xi \\ &+ \sum_{(\eta \neq \xi)} (k_{h\xi\eta} - M_{\xi\eta} \omega^2 - L_{h\xi\eta}) h_\eta - L_{\alpha\xi\xi} \\ &- \sum_{(\eta \neq \xi)} L_{\alpha\xi\eta} \alpha_\eta = 0 \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-M_{h\xi\xi} h_\xi - \sum_{(\eta \neq \xi)} M_{h\xi\eta} h_\eta + (k_{\alpha\xi\xi} - \omega^2 I_{\xi\xi} - M_{\alpha\xi\xi} \\ &+ iI_{\xi\xi} \omega \alpha_{\xi\xi}^2 g_{\alpha\xi}) \alpha_\xi + \sum_{(\eta \neq \xi)} (k_{\alpha\xi\eta} - I_{\xi\eta} \omega^2 - M_{\alpha\xi\eta}) \alpha_\eta \\ &= 0 \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

したがって、フラッター行列式はつぎのような形になる。これを解けば、フラッターの解が得られるわけである。

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & B_{11} & B_{12} \cdots \\ A_{21} & A_{22} \cdots & B_{21} & B_{22} \cdots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ C_{11} & C_{12} \cdots & D_{11} & D_{12} \cdots \\ C_{21} & C_{22} \cdots & D_{21} & D_{22} \cdots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_{\xi\xi} &= k_{h\xi\xi} - \omega^2 M_{\xi\xi} - L_{h\xi\xi} + iM_{\xi\xi} \omega h_{\xi\xi}^2 g_{h\xi} \\ A_{\xi\eta} &= k_{h\xi\eta} - \omega^2 M_{\xi\eta} - L_{h\xi\eta} \quad (\xi \neq \eta) \\ B_{\xi\xi} &= -L_{\alpha\xi\xi}, \quad B_{\xi\eta} = -L_{\alpha\xi\eta} \quad (\xi \neq \eta) \\ C_{\xi\xi} &= -M_{h\xi\xi}, \quad C_{\xi\eta} = -M_{h\xi\eta} \quad (\xi \neq \eta) \\ D_{\xi\xi} &= k_{\alpha\xi\xi} - \omega^2 I_{\xi\xi} - M_{\alpha\xi\xi} + iI_{\xi\xi} \omega \alpha_{\xi\xi}^2 g_{\alpha\xi} \\ D_{\xi\eta} &= k_{\alpha\xi\eta} - \omega^2 I_{\xi\eta} - M_{\alpha\xi\eta} \quad (\xi \neq \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(48)$$

なお、吊橋では自由振動の変位曲線は、普通直交するので、フラッター行列式はかなり簡単になる。

e) フラッター計算と実験値

幅員 6 cm, 主径間 2 m の模型 (図-12) で計算と実験を行なった。振動実験の結果は表-5 に示されている。表-5 から、対称一次と逆対称一次の振動の変位曲線は、条件、 $\int_0^l [f_\xi(x)]^2 dx = l, \int_0^l [F_\xi(x)]^2 dx = 0$  で正規化して表わすと、対称一次振動、

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 0.9488 \sin \frac{\pi x}{l} - 1.048 \sin \frac{3\pi x}{l} \\ F_1(x) &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots(49)$$

逆対称一次振動、

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= \sqrt{2} \sin \frac{2\pi x}{l} \\ F_2(x) &= \sqrt{2} \sin \frac{2\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

これらによって上式の計算を行なうが、この場合のフラッターの解は、対称振動と逆対称振動とで、それぞれ別

写真-2 3次元模型実験

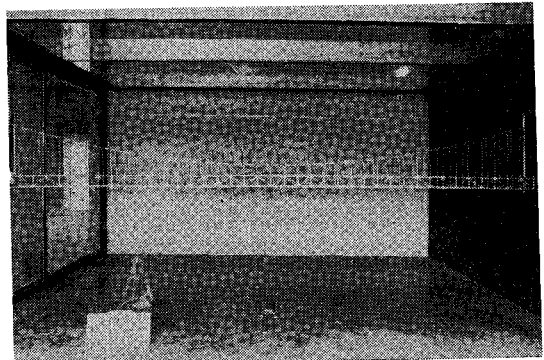
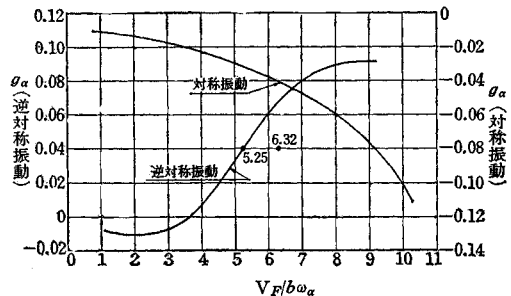


図-13 3次元模型の対称および逆対称振動形での  $V_F/b\omega_\alpha \sim g$  曲線 (●計算値)





々に与えられる。なお、計算に必要な構造量と非定常空気力は前に与えられている。また、振動数は実験値を用いることとし、U-g法によって計算すると、図-13、を得ることができる。図-13によれば、対称モードの場合にはgはマイナスとなるので、求められた解は、物理的に存在しない。したがって、この場合のフラッターは対称モードでは起こらず、逆対称モードでおこるといえる。図中、実験値をプロットしている。

## 5. 結 論

以上、吊橋の耐風安定性を Flutter Theory で取り扱ったが、本研究の範囲では、つぎのように結論できる。

まず、2次元模型によって非定常空気力を直接計測し、これを用いて2次元フラッター限界風速を計算したが、表-7に示すように、計算値と実験値はよく一致している。すなわち、2次元模型によって計測された非定常空気力を用いれば、限界風速をよく推定することができる。

表-7 計算値と実験値の比較

	模 型	組 み 合 せ	計 算 値 / 実 験 値	模 型	組 み 合 せ	計 算 値 / 実 験 値
2 次 元	T 型	Case 1	1.22	TS型	Case 1	0.95
		Case 2	1.25		Case 2	1.12
					Case 3	1.15
	PG型	Case 1	1.00	TC型	Case 1	0.88
		Case 2	1.49		Case 2	0.94
		Case 3	0.87		Case 3	0.86
3 次 元	TS型				0.82	

つぎに、2次元的に計測された非定常空気力と3次元フラッターの Strip Theory を用いて、3次元の吊橋フラッター限界風速を求めると表-7のように、0.82を得ることができた。すなわち、航空機の翼のフラッター計算の場合のように、吊橋の場合も、2次元模型で計測された非定常空気力を用いて3次元フラッター計算をす

ることができるものと思われる。

ここで取り扱った試験は、初期迎角 0° の場合である。実際の台風時には ±10° 程度の風の吹き上げ、吹き下ろしを考えねばならない。このような大迎角の場合にもここに述べた方法は適用可能と考えられるが、実験的に確認する必要がある、現在実施中である。別の機会に報告する。

この試験研究を実施するにあたり、九州大学 河島教授、木村助教授、東京大学 平井教授、中央大学 岡内助教授、東洋大学 高田教授に貴重なご意見とご指導をいただいた。ここに厚くお礼申し上げる。

## 参 考 文 献

- 1) "Aerodynamic Stability of Suspension Bridge" Univ. of Washington, Engineering Experiment Station, Bulletin No. 116, part I~V.
- 2) 平井: "鋼橋Ⅲ", 技報堂
- 3) Steinman, D.B.: "Rigidity and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges" Proc. of A.S.C.E. (1945-4)
- 4) Steinman, D.B.: "Aerodynamic Theory of Bridge Oscillations" Proc. of A.S.C.E. (1949-10)
- 5) Bleich, Fr., McCullough, C.B., Rosecrans, R. and Vicent G.S.: "The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges" Department of Commerce, Bureau of Public Roads, United States Government Printing Office (1950).
- 6) Theodorsen, Th.: "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter" NACA TR No. 496 (1935)
- 7) 東大橋梁研究室: 道路公団若戸橋工事々務所 "若戸吊橋の耐風安定性に関する実験的研究" (昭 35)
- 8) Kawashima, S., Kimura, H. and Shibato, T.: "Measurement of Aerodynamic Forces on Oscillating Airfoil" Proc. of 13th Japan National Congress for Applied Mechanics (1963).
- 9) 釜口・坂田: "吊橋の耐風安定性に関する基礎研究" 日本航空学会誌 Vol. 13, No. 133 (昭 40-2)
- 10) Scanlan, R.H. and Rosenbaum, R.: "Introduction to the Study of Aircraft vibration and Flutter" Mc Millan (1960).

(1966.5.11・受付)

## 第 21 回年次学術講演会講演概要集頒布

去る5月末札幌市において開催された第21回年次学術講演会の概要集の残部が下記のとおりありますのでご希望の方は土木学会本部または北海道支部へ前金にてお申込み下さい。注:まとめてご注文の場合は送料300円です。

第I部門 応用力学・構造力学・橋梁等 155編	定価 450円(〒100円)
第II部門 水理学・水文学・河川・港湾・海岸・発電水力・衛生工学等 167編	定価 500円(〒100円)
第III部門 土質力学・基礎工学・土木機械・施工等 137編	定価 400円(〒100円)
第IV部門 鉄道・道路・コンクリートおよび鉄筋コンクリート・土木材料・都市計画・空港・測量等 160編	定価 500円(〒100円)